

Helicopter Theory

Wayne Johnson

Princeton University Press
1980

У. ДЖОНСОН

Теория вертолета

1

В 2-х книгах

Перевод с английского

В. Э. Баскина,

С. Ю. Есаулова,

В. С. Каплана

Москва
«Мир»
1983

ББК 39.54

Д42

УДК 629.735.45 : 533.661

Джонсон У.

Теория вертолета: В 2-х книгах. Пер. с англ.— М.: Мир, 1983. — (Авиационная и ракетно-космическая техника). Кн. 1. 502 с., ил.

Монография известного американского инженера-вертолетчика. Наиболее полное на начало 1980-х годов изложение теории и методов расчета вертолетов различных схем. В русском переводе выходит в двух книгах.

В кн. 1 рассматриваются проблемы аэродинамики, динамики движения, управления, устойчивости и общего проектирования вертолетов в упрощенной постановке.

Для специалистов, занимающихся проектированием вертолетов, а также аспирантов и студентов авиационных вузов.

Редакция литературы по новой технике

Д 3806030000-438 173-84, ч. 1
041(01)-83

© 1980 by Princeton University Press

© Перевод на русский язык, «Мир», 1983 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКОВ

Вертолеты нашли широкое применение в промышленности, строительстве, сельском хозяйстве, военном деле. Они незаменимы для сообщения с труднодоступными районами, при тушении пожаров, спасении людей во время стихийных бедствий и т. д. Универсальность применения вертолетов объясняется тем, что они могут использоваться в широкой области полетных режимов, включая висение, и не требуют специально оборудованных площадок для взлета и посадки.

Без тщательного расчетного анализа на стадии проектирования, проводимого с широким использованием быстродействующих вычислительных машин, создание современного вертолета невозможно. Это объясняется как сложностью явлений обтекания несущего винта, так и связью аэродинамических нагрузок лопасти с ее движением и деформациями, а также движением вертолета в целом.

Предлагаемая вниманию читателей монография известного американского специалиста по вертолетам представляет собой наиболее полное на сегодняшний день изложение теории вертолета, включающее целую иерархию математических моделей аэродинамики, динамики, аэроупругости, управляемости и устойчивости движения вертолета. При изложении аэродинамики несущего винта много места отведено классическим схемам импульсной теории винта. Рассмотрены модели вихревой теории, которые допускают аналитическое решение, хотя бы приближенное. Впервые так полно излагаются теория обтекания лопасти нестационарным потоком с учетом повторного влияния вихревого следа и методы расчета шума, создаваемого вертолетом. Вопросы динамики лопастей несущего винта рассмотрены в книге весьма подробно вплоть до использования наиболее сложного представления движения дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. При исследовании динамики несущего винта и вертолета в целом автор, отступая от традиционной формы изложения, широко пользуется весьма уместным здесь математическим аппаратом теории автоматического управления.

Книга вообще написана своеобразно. Большинство вопросов автор излагает неоднократно, но каждый раз все более подробно. В результате каждую главу можно читать практически независимо. Такой подход способствует творческому усвоению материала студентами, а квалифицированным специалистам позволяет начать изучение проблем с желаемого уровня их детализации.

В книге приведена обширная библиография, содержащая почти 1800 названий. К сожалению, в ней не нашла достаточного отражения отечественная литература по вертолетам. Поэтому переводчики сочли целесообразным привести дополнительный список публикаций, который в совокупности с основным дает более полную картину исследований в вертолетостроении. При

переводе книги были также устранены или отмечены некоторые неточности в формулировках и математических выкладках.

По широте охвата, глубине рассмотрения и методу изложения материала книга У. Джонсона представляет собой значительное явление в литературе по вертолетам. Ее можно рассматривать и как учебное пособие, и как подробный справочник, своего рода энциклопедию по теории вертолета. Несомненно, эта книга будет полезна научным работникам и инженерам вертолетной промышленности, а также студентам старших курсов и аспирантам соответствующих специальностей.

Гл. 1—6 переведены В. С. Капраном, гл. 7—9, 11, 12, 14, 15—С. Ю. Есауловым, гл. 10, 13, 16, 17 — В. Э. Баскиным.

В. Э. Баскин, С. Ю. Есаулов, В. С. Капран

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Ниже приведены основные обозначения, использованные в книге. В список не включены обозначения, встречающиеся только в одной главе. Очень часто используются безразмерные величины, масштабами которых служат плотность ρ воздуха, частота вращения Ω несущего винта и его радиус R (см. также разд. 1.3).

- a — производная подъемной силы сечения лопасти по углу атаки;
- $A = \pi k^2$ — площадь диска несущего винта;
- $A_x = NcR = \sigma A$ — суммарная площадь лопастей в плане;
- B — коэффициент концевых потерь;
- c — длина хорды лопасти;
- C — функция уменьшения подъемной силы Теодорсена;
- C' — функция уменьшения подъемной силы Лоуи;
- $c_d = D/(\rho U^2 c/2)$ — коэффициент сопротивления сечения лопасти;
- $C_H = H/[\rho A (\Omega R)^2]$ — коэффициент продольной силы;
- $c_l = L/(\rho U^2 c/2)$ — коэффициент подъемной силы сечения лопасти;
- $c_m = M_a/(\rho U^2 c^2/2)$ — коэффициент аэродинамического момента сечения лопасти;
- $C_{M_x} = M_x/[\rho AR (\Omega R)^2]$ — коэффициент момента крена;
- $C_{M_y} = M_y/[\rho AR (\Omega R)^2]$ — коэффициент момента тангажа;
- $C_P = P/[\rho A (\Omega R)^3]$ — коэффициент мощности;
- C_{P_0} — коэффициент мощности, затрачиваемой на набор высоты;
- C_{P_i} — коэффициент индуктивной мощности;
- C_{P_p} — коэффициент профильной мощности;
- $C_{P_{вр}}$ — коэффициент мощности, затрачиваемой на преодоление вредного сопротивления;
- $C_Q = Q/[\rho AR (\Omega R)^2]$ — коэффициент аэродинамического крутящего момента;
- $c_{зв}$ — скорость звука;
- $C_T = T/[\rho A (\Omega R)^2]$ — коэффициент силы тяги;
- $C_Y = Y/[\rho A (\Omega R)^2]$ — коэффициент поперечной силы;
- D — аэродинамическое сопротивление сечения лопасти; сопротивление вертолета;

- e — безразмерный относ. ГШ или ВШ;
 EI, EI_{zz} — жесткость лопасти на изгиб в плоскости взмаха;
 EI_{xx} — жесткость лопасти на изгиб в плоскости хорд;
 $f = D/(\rho V^2/2)$ — площадь эквивалентного сопротивления фюзеляжа и втулки вертолета;
 F_r — радиальная аэродинамическая сила в сечении лопасти;
 F_x — составляющая аэродинамической силы сечения, параллельная плоскости диска;
 F_z — составляющая аэродинамической силы сечения, нормальная к плоскости диска;
 g — ускорение силы тяжести;
 GJ — жесткость на кручение;
 h — превышение центра втулки над центром масс вертолета;
 H — продольная сила несущего винта (направлена назад); коэффициент аэродинамической перерезывающей силы лопасти в плоскости вращения (употребляется с индексом);
 I_x — характеристика инерционных свойств лопасти (обычно $I_x = \int_0^R mr^2 dr$) или момент инерции лопасти относительно оси ГШ;
 $I_y = \int_0^R I_{\theta} dr$ — инерционная характеристика лопасти в установочном движении (по углу установки);
 $I_{\rho k} = \int_0^R \rho_k^2 I_{\theta} dr$ — обобщенная масса при крутильных колебаниях лопасти по k -му тону;
 $I_{\eta k}, I_{\beta k} \left(= \int_0^R \eta_{zk}^2 m dr \right)$ — обобщенная масса при изгибных колебаниях лопасти по k -му тону в плоскости взмаха;
 I_x — момент инерции вертолета относительно продольной оси; коэффициент инерционной связи шага со взмахом $\left(\int_0^R x_1 r m dr \right)$;
 I_y — момент инерции вертолета относительно поперечной оси;
 I_z — момент инерции вертолета относительно вертикальной оси;

$$I_{\beta} = \int_0^R \eta_{\beta}^2 m dr \text{ — обобщенная масса в маховом движении}$$

лопасти по основному тону;

$$I_{\beta a} = \int_0^R \eta_{\beta} m r dr \text{ — коэффициент инерционной связи махового движения лопасти и движения втулки;}$$

$$I_{\beta \xi} = \int_0^R \eta_{\beta} \eta_{\xi} m dr / (1 - e) \text{ — коэффициент кориолисовой связи махового движения и качания лопасти;}$$

$$I_{\xi} = \int_0^R \eta_{\xi}^2 m dr \text{ — обобщенная масса в качании лопасти по основному тону;}$$

$$I_{\xi k} = \int_0^R \eta_{\xi k}^2 m dr \text{ — обобщенная масса изгибных колебаний лопасти по } k\text{-му тону в плоскости диска;}$$

$$I_{\xi a} = \int_0^R \eta_{\xi} m r dr \text{ — коэффициент инерционной связи качания лопасти и движения втулки;}$$

I_{θ} — момент инерции сечения относительно продольной оси лопасти;

$$I_{\theta} = \int_0^R m r^2 dr \text{ — момент инерции лопасти относительно оси вала;}$$

$k = \omega b / U$ — приведенная частота (ω — частота, b — половина длины хорды профиля, U — скорость невозмущенного потока);

$k_x = \sqrt{I_x / M}$ — радиус инерции вертолета относительно продольной оси;

$k_y = \sqrt{I_y / M}$ — радиус инерции вертолета относительно поперечной оси;

$k_z = \sqrt{I_z / M}$ — радиус инерции вертолета относительно вертикальной оси;

$K_P, K_{P\beta}$ — коэффициент компенсации взмаха [входит в формулу $\Delta\theta = -K_P\beta$ ($K_P = \text{tg } \delta_3$), положителен при взмахе лопасти вверх и отклонении ее носка вниз];

$K_{P\xi}$ — коэффициент компенсации качания [входит в формулу $\Delta\theta = -K_{P\xi}\xi$, положителен при отклонении лопасти назад, а ее носка — вниз];

- K_{β} — жесткость пружины в ГШ;
 K_{ξ} — жесткость пружины в ОШ;
 K_{θ} — жесткость пружины в системе управления;
 L — подъемная сила сечения лопасти; производная устойчивости вертолета при крене (употребляется с индексами);
 $l_{р.в}$ — расстояние между осями несущего и рулевого винтов;
 $m = 1, 2, \dots, N$ — номер лопасти; коэффициент аэродинамического момента тангажа (употребляется с индексом); погонная масса лопасти;
 M — коэффициент совершенства несущего винта ($= C_T^{3/2} / (\sqrt{2} C_P)$); число Маха в сечении лопасти; масса вертолета, включающая массу несущего винта; производная устойчивости вертолета при тангаже (употребляется с индексом); аэродинамический коэффициент в выражении момента относительно оси ГШ (употребляется с индексом);
 \dot{m} — массовый расход воздуха через диск несущего винта (используется в импульсной теории);
 M_a — аэродинамический момент сечения лопасти;
 $M_x = \int_0^R m dr$ — масса лопасти;
 M_f — аэродинамический момент относительно продольной оси лопасти (установочный момент);
 M_F — аэродинамический момент в плоскости взмаха (момент взмаха);
 M_L — аэродинамический момент в плоскости вращения (момент качания);
 $M_x = \Omega R / c_{зв}$ — концевое число Маха;
 M_x — момент крена на втулке несущего винта (положителен, когда наклоняет винт в сторону отступающей лопасти);
 M_y — момент тангажа на втулке несущего винта (положителен, когда наклоняет винт назад);
 $M_{1,90}$ — число Маха в концевом сечении лопасти на азимуте 90° ;
 N — число лопастей; производная устойчивости вертолета при рыскании (употребляется с индексом);
 $N_* = (v_{\Phi\Phi}^2 - 1) / (-vM_{\beta}) = (8/v)(v^2 - 1) + K_P$ — параметр продольно-поперечной связи для махового движения лопасти;

N_F — момент в корневой части лопасти, действующий в плоскости взмаха;

N_L — момент в корневой части лопасти, действующий в плоскости диска;

p — звуковое давление;

P — мощность на валу несущего винта;

ρ_k — обобщенная координата крутильных колебаний по k -му тону (ρ_0 — угол поворота как твердого тела);

Q — аэродинамический крутящий момент несущего винта (положителен, когда для вращения винта нужно приложить крутящий момент двигателя); коэффициент аэродинамического момента лопасти относительно оси вала или оси ВШ (употребляется с индексом);

q_k, q_{zk} — обобщенная координата изгибных колебаний лопасти по k -му тону в плоскости взмаха;

q_{xk} — обобщенная координата изгибных колебаний по k -му тону в плоскости диска;

r — радиальная координата сечения лопасти или на диске несущего винта;

R — радиус несущего винта; коэффициент аэродинамической радиальной перерезывающей силы (употребляется с индексом);

s — собственное значение или оператор Лапласа;

$S_x = \int_0^R mr dr$ — статический момент лопасти;

S_r — радиальная перерезывающая сила в корне лопасти;

S_x — перерезывающая сила в корневой части лопасти, параллельная плоскости диска;

S_z — вертикальная перерезывающая сила в корневой части лопасти;

$S_\beta = \int_0^R m\eta_\beta dr$ — статический момент, учитывающий форму изгиба лопасти в плоскости взмаха;

$S_\zeta = \int_0^R m\eta_\zeta dr$ — статический момент, учитывающий форму изгиба лопасти в плоскости диска;

t — время;

T — сила тяги несущего винта; коэффициент силы тяги лопасти (употребляется с индексом);

T/A — нагрузка на диск;

T/A_x — нагрузка на лопасть;

$U = (u_T^2 + u_P^2)^{1/2}$ — результирующая скорость в сечении лопасти;

u_{Π} — продольная составляющая скорости порыва;

u_P — перпендикулярная плоскости диска составляющая скорости потока, обтекающего сечение лопасти;

u_R — радиальная составляющая скорости потока, обтекающего сечение лопасти;

u_T — параллельная плоскости диска составляющая скорости потока, обтекающего сечение лопасти;

v — индуктивная скорость в плоскости диска (направлена вниз);

V — скорость перемещения несущего винта или вертолета относительно воздуха;

v_{Π} — поперечная составляющая скорости порыва;

$v_{\text{и}} = \sqrt{T/(2\rho A)}$ — идеальная индуктивная скорость на режиме висения;

w — индуктивная скорость в дальнем следе;

W — полетный вес вертолета;

w_{Π} — вертикальная составляющая скорости порыва;

x — абсцисса в невращающейся системе координат на диске несущего винта (положительна, когда отсчитывается назад); отклонение сечения в плоскости диска; координата в плоскости сечения, отсчитываемая вдоль хорды;

X — производная продольной силы вертолета (употребляется с индексом);

x_A — расстояние по хорде от продольной оси лопасти до центра давления сечения;

x_B — продольное смещение вертолета как твердого тела;

$x_{\text{вт}}$ — продольное смещение втулки;

x_I — расстояние по хорде от продольной оси лопасти до центра масс сечения;

y — ордината в невращающейся системе координат на диске несущего винта (положительна, когда отсчитывается вправо, в сторону наступающей лопасти);

Y — поперечная сила несущего винта (направлена в сторону наступающей лопасти); производная поперечной силы вертолета (употребляется с индексом);

y_B — поперечное смещение вертолета как твердого тела;

$y_{\text{вт}}$ — поперечное смещение втулки;

- z — аппликата в невращающейся системе координат на диске несущего винта (положительна, когда отсчитывается вверх); отклонение сечения в плоскости взмаха;
 Z — производная вертикальной силы вертолета (употребляется с индексом);
 z_B — вертикальное смещение вертолета как твердого тела;
 $z_{вт}$ — вертикальное смещение втулки;
 α — угол атаки сечения лопасти; угол атаки плоскости диска (положителен при наклоне диска вперед);
 α_x — возмущение положения втулки по крену;
 α_y — возмущение положения втулки по тангажу;
 α_z — возмущение положения втулки по рысканию;
 $\alpha_{1, 270}$ — угол атаки концевое сечения лопасти на азимуте 270° ;
 $\alpha_{\mu+0.4, 270}$ — угол атаки сечения с координатами $r/R = \mu + 0.4$ и $\psi = 270^\circ$;
 β — угол взмаха (положителен при взмахе вверх);
 $\beta_{\text{констр}}$ — конструктивный угол конусности;
 β_{1c} — угол продольного наклона конуса лопастей (положителен при наклоне вперед);
 β_{1a} — угол поперечного наклона конуса лопастей (положителен при наклоне в сторону отступающей лопасти);
 $\gamma = \rho a c R^4 / I_d$ — массовая характеристика лопасти;
 Γ — циркуляция присоединенного вихря;
 $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ — коэффициенты в формуле $c_a = \delta_0 + \delta_1 \alpha + \delta_2 \alpha^2$;
 δ_3 — угол, определяющий коэффициент компенсации взмаха ($K_p = \text{tg } \delta_3$);
 ζ — угол качания (положителен, когда лопасть отклоняется противоположно вращению);
 $\zeta_{\text{констр}}$ — конструктивный угол отставания;
 η, η_β — форма основного тона махового движения;
 η, η_ζ — форма основного тона качания;
 η_k, η_{2k} — форма изгибных колебаний по k -му тону в плоскости взмаха;
 η_{xk} — форма изгибных колебаний по k -му тону в плоскости диска;
 θ — угол установки лопасти (положителен, когда носок лопасти поднят вверх);
 θ_B — угол тангажа вертолета как твердого тела;
 $\theta_{уп}$ — угол установки, определяемый управлением (общий и циклический шаг);
 $\theta_{\text{эфф}}$ — угол установки, определяемый упругим кручением лопасти;

- $\theta_{\text{тр}}$ — угол наклона траектории полета (скорость набора высоты $V_c = V \sin \theta_{\text{тр}}$);
 $\theta_{\text{кр}}$ — градиент линейной крутки лопасти;
 θ_0 — общий шаг лопасти;
 θ_{1c}, θ_{1s} — коэффициенты циклического шага лопасти;
 $\theta_{0,75}$ — общий шаг на радиусе $r = 0,75 R$;
 λ — коэффициент протекания [$\lambda = (V \sin \alpha + v) / (\Omega R)$], положителен, когда поток через диск направлен сверху вниз); удлинение лопасти;
 λ_c — коэффициент скорости;
 $\lambda_i = v / (\Omega R)$ — индуктивный коэффициент протекания;
 λ_x — коэффициент продольного изменения индуктивной скорости;
 λ_y — коэффициент поперечного изменения индуктивной скорости;
 λ_0 — коэффициент средней индуктивной скорости;
 $\mu = V \cos \alpha / (\Omega R)$ — характеристика режима работы винта;
 ν, ν_β — собственная частота основного тона махового движения;
 $\nu_{\text{эфф}}, \nu_{\beta \text{эфф}}$ — эффективная собственная частота махового движения при наличии компенсатора взмаха ($\nu_{\text{эфф}}^2 = \nu^2 + \gamma K_p / 8$);
 ν_k, ν_{zk} — собственная частота изгибных колебаний по k -му тону в плоскости взмаха;
 ν_{xk} — собственная частота изгибных колебаний по k -му тону в плоскости диска;
 ν_ξ — собственная частота основного тона качания;
 ξ_k — форма крутильных упругих колебаний по k -му тону;
 ρ — плотность воздуха; радиальная координата при интегрировании по размаху лопасти;
 $\sigma = N_0 / (\pi R)$ — коэффициент заполнения;
 $\varphi = \text{arctg}(u_p / u_T)$ — угол притекания потока к сечению лопасти;
 φ_B — угол крена вертолета как твердого тела;
 ψ — азимут лопасти или полярная координата на диске винта; безразмерное время ($\psi = \Omega t$);
 ψ_B — угол рыскания вертолета как твердого тела;
 ψ_m — азимут m -й лопасти ($m = 1, 2, \dots, N$);
 $\omega, \omega_0, \omega_\theta$ — собственная частота тангажа вертолета; собственная частота проводки управления;
 ω_k — собственная частота упругих крутильных колебаний по k -му тону;
 Ω — частота вращения несущего винта (рад/с).

ИНДЕКСЫ

- $0, 1c, 1s, \dots, nc, ns$ — коэффициенты Фурье периодической функции, разложенной в тригонометрический ряд;
 $0, 1c, 1s, \dots, nc, ns, N/2$ — коэффициенты фурье-преобразования координат (общее число N);
 c — набор высоты или спуск;
 ПУ — плоскость управления;
 v — режим висения;
 ПИ — плоскость вращения;
 — индуктивный;
 m — номер лопасти (от 1 до N);
 н.в — несущий винт;
 ППУ — плоскость постоянных углов установки;
 0 — профильный;
 вр — вредный;
 p — производная устойчивости вертолета по угловой скорости крена;
 q — производная устойчивости вертолета по угловой скорости тангажа;
 r — производная устойчивости вертолета по угловой скорости рыскания;
 ПКЛ — плоскость концов лопастей;
 р.в — рулевой винт;
 u — производная устойчивости вертолета по продольной скорости;
 v — производная устойчивости вертолета по поперечной скорости;
 w — производная устойчивости вертолета по вертикальной скорости;
 β — аэродинамическая сила, обусловленная углом взмаха лопасти;
 $\dot{\beta}$ — аэродинамическая сила, обусловленная скоростью махового движения лопасти или угловым перемещением втулки;
 ζ — аэродинамическая сила, обусловленная углом качания лопасти;
 $\dot{\zeta}$ — аэродинамическая сила, обусловленная скоростью качания лопасти или рысканием втулки;
 θ — аэродинамическая сила, обусловленная углом установки лопасти;
 $\dot{\theta}$ — аэродинамическая сила, обусловленная скоростью установочного (по углу установки лопасти) движения;

λ — аэродинамическая сила, обусловленная вертикальной скоростью втулки или возмущением индуктивной скорости;

μ — аэродинамическая сила, обусловленная скоростью движения втулки в плоскости диска;

$(\dots)^*$ — $d(\dots)/dt$ или $d(\dots)/d\psi$;

$(\dots)'$ — $d(\dots)/dt$;

$(\dots)^*$ — нормализованная (нормированная) величина (инерционные характеристики лопасти отнесены к I_n , а инерционные характеристики вертолета — к $NI_n/2$).

I

Введение

1.1. ВЕРТОЛЕТ

Вертолет — это летательный аппарат, в котором для создания подъемной и пропульсивной сил, а также для управления используются вращающиеся крылья. На рис. 1.1—1.3 показаны наиболее распространенные типы вертолетов. Лопасти несущего винта вращаются вокруг вертикальной оси, ометая диск в горизонтальной или почти горизонтальной плоскости. Аэродинамические силы возникают вследствие движения крыла относительно воздуха. Вращающиеся крылья вертолета могут создавать эти силы даже тогда, когда скорость самого аппарата равна нулю. В этом отличие вертолета от летательного аппарата с фиксированными крыльями, который для того, чтобы держаться в воздухе, должен перемещаться. Таким образом, вертолет способен совершать вертикальный полет, включая вертикальные взлет и посадку. Эффективность вертикального полета — важнейшая характеристика несущего винта вертолета.

Несущий винт должен эффективно создавать силу тяги, равную весу вертолета. Под эффективностью вертикального полета понимается малая величина отношения мощности, потребляемой несущим винтом, к создаваемой им силе тяги, так как мощность силовой установки и расход топлива пропорциональны потребляемой мощности. Для винтокрылых аппаратов высокая эффективность вертикального полета обусловлена малой нагрузкой на диск (отношение силы тяги винта к площади диска, ометаемого лопастями). По теореме импульсов, подъемная сила несущего винта создается путем ускорения воздуха вниз, так как подъемной силе соответствует равная ей и противоположно направленная реакция, с которой лопасти воздействуют на воздух. Следовательно, воздух в следе несущего винта обладает кинетической энергией, на образование которой при установившемся горизонтальном полете должна быть затрачена мощность силовой установки вертолета. Это индуктивная мощность; она составляет абсолютный минимум мощности, требуемой для устойчивого полета, и ее затраты необходимы как для фиксированных, так и для вращающихся крыльев. Установлено, что для винтокрылых аппаратов на режиме висения затраты индуктивной мощности на единицу силы тяги пропорциональны корню квадратному из нагрузки на диск. Следовательно,

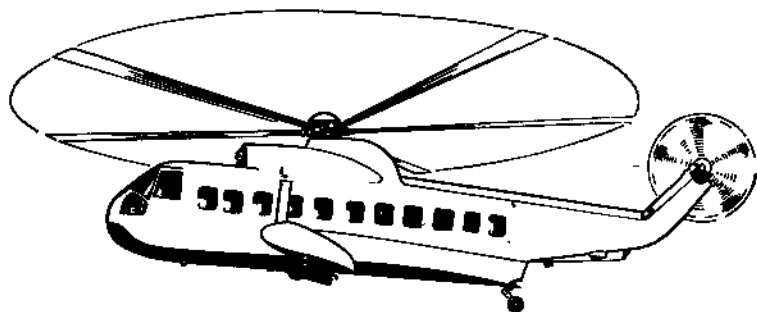


Рис. 1.1. Вертолет одновинтовой схемы.



Рис. 1.2. Вертолет одновинтовой схемы с двухлопастным несущим винтом.

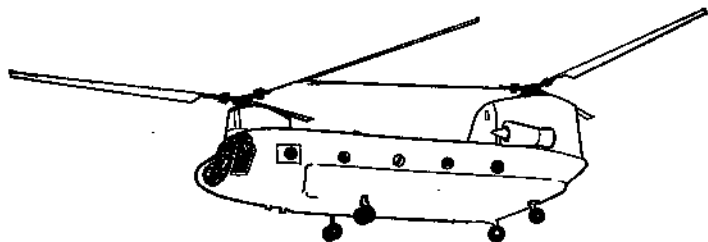


Рис. 1.3. Вертолет продольной схемы.

эффективность создания силы тяги возрастает с уменьшением нагрузки на диск. При заданном полетном весе индуктивная мощность обратно пропорциональна радиусу несущего винта, поэтому для вертолетов характерны несущие винты большого диаметра с большой площадью диска. Для вертолетов типичные значения нагрузки на диск изменяются в пределах от 100 до 500 Па. Винты малого диаметра используются в авиации главным образом как движители (пропеллеры, винты турбовентиляторных двигателей и др.). В этих случаях приемлема большая нагрузка на диск, так как винт работает при большой осевой скорости, а сила тяги составляет только часть полетного веса. Однако использование винтов с большой нагрузкой на диск для создания подъемной силы резко снижает эффективность вертикального полета: увеличивается потребная мощность силовой установки и сильно сокращается возможная продолжительность висения. Среди всех аппаратов вертикального взлета и посадки (АВВП) вертолет имеет наименьшую нагрузку на диск, а значит, способен наиболее эффективно совершать вертикальный полет. Таким образом, вертолет можно определить как летательный аппарат, в котором для создания подъемной силы используются малонагруженные винты большого диаметра.

Однако вертолет должен летать и горизонтально. Поэтому требуется средство для создания пропульсивной силы, преодолевающей сопротивление несущего винта и всего аппарата при полете вперед. Эта пропульсивная сила создается, по крайней мере на малых скоростях полета, самим несущим винтом за счет наклона вперед вектора силы тяги. Кроме того, несущий винт может создавать силы и моменты, которые передаются аппарату и используются для управления его положением, высотой и скоростью полета. На самолете подъемную, пропульсивную и управляющие силы создают отдельные аэродинамические поверхности. На вертолете же все эти силы порождает несущий винт.

Способность совершать вертикальный полет достигается определенной ценой, которая должна быть оправдана выигрышем от применения АВВП для выполнения поставленной задачи. Цель конструктора состоит в том, чтобы спроектировать летательный аппарат, который будет выполнять требуемые операции при минимальных затратах на его поддержание в воздухе. Для поддержания АВВП в воздухе требуется большая мощность, чем у самолета. Этот фактор влияет на стоимость аппарата и на стоимость полета. Для передачи мощности от двигателя на несущий винт с малой частотой вращения и большим крутящим моментом требуется большой редуктор. Тот факт, что несущий винт — сложная механическая система, увеличивает стоимость аппарата и эксплуатационные расходы. Кроме того, несущий винт является источником вибраций, что повышает стоимость

ремонтно-профилактических работ, утомляет летчика, создает дискомфорт для пассажиров. На лопасти несущего винта действуют большие переменные нагрузки, сокращающие срок службы отдельных частей аппарата и приводящие в общем к увеличению расходов по обслуживанию. Характеристики устойчивости и управляемости вертолета часто оказываются на пределе возможного, особенно на режиме висения, если не использована надежная система автоматического управления. В частности, характеристики полета по приборам становятся неудовлетворительными, если отсутствует система повышения устойчивости. В транспортной авиации шум становится все более важным фактором, так как он является главной формой воздействия авиации на людей и окружающую среду. Хорошо спроектированный вертолет относится к наименее шумным летательным аппаратам, но использование его возможности взлетать и садиться вертикально часто предполагает его работу в черте городов, а это приводит к усилению ограничений по шуму. Все перечисленные трудности можно преодолеть и спроектировать вертолет с очень хорошими характеристиками. Методы расчета, необходимые для решения этой задачи, и составляют предмет данной книги.

1.1.1. НЕСУЩИЙ ВИНТ ВЕРТОЛЕТА

Обычный несущий винт вертолета состоит из двух или большего числа одинаковых, разделенных равными угловыми промежутками лопастей, прикрепленных к центральной втулке. Винт равномерно вращается под действием крутящего момента, который передается, как правило, от двигателя на вал. Подъемные силы и сопротивления лопастей — этих вращающихся крыльев — создают аэродинамический момент, силу тяги и другие силы и моменты несущего винта. Большой диаметр винта, требуемый для эффективного вертикального полета, и большое удлинение лопастей, диктуемое необходимостью иметь высокое аэродинамическое качество вращающихся крыльев, делают лопасти гораздо более гибкими, чем у винтов с большой нагрузкой на диск (например, пропеллеров). Следовательно, при полете аппарата лопасть несущего винта под действием аэродинамических сил будет совершать значительные движения. Эти движения могут вызвать большие напряжения в лопасти или большие моменты в ее корне, которые через втулку передаются вертолету. Поэтому при проектировании лопастей и втулки несущего винта следует позаботиться о том, чтобы эти нагрузки были по возможности малы. Центробежные силы препятствуют отклонению вращающейся лопасти от плоскости диска, так что ее движение будет наиболее заметным вблизи комля. Вследствие этого поиски про-

ектировщиков обычно сосредоточиваются на конструкции втулки винта.

Наиболее часто используемое конструктивное решение, которое было найдено на заре развития вертолетов и которому только недавно предложена замена, заключается в шарнирной подвеске лопасти ко втулке. Такая подвеска позволяет лопасти свободно двигаться в плоскости диска и в нормальной к ней плоскости. На рис. 1.4 показана схема расположения шарниров лопасти. Изгибающий момент на всей корневой части лопасти

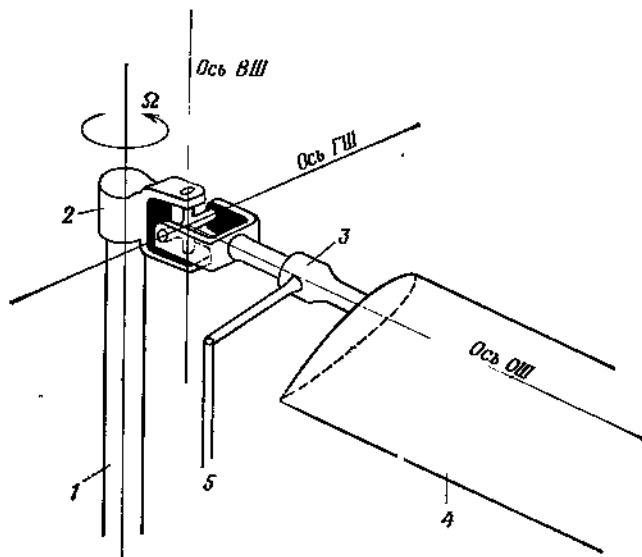


Рис. 1.4. Схема шарнирного узла несущего винта и комля лопасти (показана только одна из лопастей винта).

1 — вал винта; 2 — втулка; 3 — корпус ОШ; 4 — лопасть; 5 — к системе управления.

должен быть мал (так как он равен нулю на оси шарнира) и не должен передаваться от корня через втулку на вертолет. Таким образом, благодаря движению лопасти в шарнире уменьшаются изгибающие моменты, которые в противном случае возрастали бы у корня лопасти. Движение лопасти, допускаемое шарнирами, оказывает большое влияние на характеристики несущего винта и усложняет расчет этих характеристик. У некоторых современных конструкций несущего винта шарниры отсутствуют, так что движение лопасти определяется только ее изгибом. Нагрузки втулки и лопастей в этом случае всегда больше, чем при наличии шарниров. Однако конструктивное решение остается в принципе тем же самым, так как лопасть при этом делают достаточно гибкой, чтобы ее движение могло быть существенным: иначе она не выдержит нагрузок даже при

использовании самых современных материалов и технологии. Следовательно, движение лопасти остается доминирующим фактором, хотя нагрузка корня и момент на втулке, свойственные бесшарнирному винту, сильно влияют на конструкцию вертолета и на его эксплуатационные характеристики.

Движение шарнирно-подвешенной лопасти состоит в основном из поворотов ее как твердого тела в каждом из шарниров, причем этим поворотам препятствуют центробежные силы, которые создают восстанавливающие моменты, действующие на вращающуюся лопасть. Движение в горизонтальном шарнире (ГШ), ось которого лежит в плоскости диска винта (и перпендикулярна радиальному направлению вдоль лопасти), приводит к отклонению лопасти от плоскости диска. Такое движение называется *маховым*. Движение в вертикальном шарнире (ВШ) вызывает отклонение лопасти в плоскости диска и называется *качанием*. У бесшарнирного винта качание и маховое движение определяются основными тонами изгибных колебаний лопасти соответственно в плоскости диска и в перпендикулярной ей плоскости (плоскости взмаха). Так как центробежные силы значительно уменьшают изгибы, эти тоны сходны с колебаниями лопасти как твердого тела в шарнирах. Исключением является корневая часть лопасти, где изгиб наибольший. Кроме махового движения и качания лопасти имеется еще возможность изменения ее угла установки, которая используется для управления несущим винтом. Изменение угла установки позволяет управлять углом атаки лопасти, а следовательно, и аэродинамическими силами несущего винта. Такое изменение угла установки, называемое *установочным движением*, обычно осуществляют ее поворотом в осевом шарнире (ОШ). У шарнирного винта подшипник ОШ расположен, как правило, дальше от оси вращения, чем ГШ и ВШ; у бесшарнирного винта подшипник ОШ может быть расположен дальше от оси вращения или ближе к ней, чем та часть корня лопасти, где изгибы в плоскости диска и в плоскости взмаха максимальны. Существуют также конструкции несущего винта, в которых ОШ, ГШ и ВШ отсутствуют. У таких винтов изменение угла установки происходит за счет скручивания лопасти у ее корня.

Таким образом, конструкция втулки определяет способ осуществления махового движения и качания лопасти, что позволяет дать основную классификацию типов несущих винтов.

а) **Шарнирный несущий винт.** Лопасти подвешены ко втулке посредством ГШ и ВШ.

б) **Несущий винт типа качалки.** Две лопасти, составляющие единую конструкцию, подвешены к валу винта посредством одного ГШ, образуя качалку. ВШ у такого винта нет. Ему аналогичен карданный несущий винт, имеющий три или большее число лопастей, которые жестко прикреплены ко втулке, а втул-

ка соединена с валом винта посредством карданного (универсального) подвеса.

в) **Бесшарнирный несущий винт.** Лопасты прикреплены ко втулке без ГШ и ВШ, хотя ОШ часто имеется. Лопасть консольно заделана во втулку, так что движение лопасти осуществляется путем изгиба в комле. Такой винт называют также *жестким несущим винтом*. Однако действительно жесткие лопасти, гибкость которых столь мала, что деформация лопасти не заметна, используют только в винтах с большой нагрузкой на диск.

1.1.2. СХЕМА ВЕРТОЛЕТА

Расположение несущего винта (или винтов) на вертолете — это, по-видимому, его главная внешняя особенность и в то же время важный фактор, влияющий на его характеристики, главным образом устойчивость и управляемость. Обычно мощность от двигателя передают на несущий винт через вал, на котором создается крутящий момент. В установившемся полете результирующая сила и момент, действующие на вертолет, должны быть равны нулю. Таким образом, передаваемый на вертолет аэродинамический крутящий момент (реакция несущего винта на крутящий момент вала) должен быть как-то сбалансирован. Способ балансировки аэродинамического крутящего момента в основном и определяет схему вертолета. Как правило, вертолет строится либо по одновинтовой схеме (с одним несущим и одним рулевым винтами), либо по схеме с двумя несущими винтами противоположного вращения.

В *вертолете одновинтовой схемы* для балансировки аэродинамического момента (и осуществления путевого управления) используется вспомогательный винт малого диаметра. Этот винт размещен на хвостовой балке несколько позади края диска несущего винта. Плоскость диска рулевого винта обычно вертикальна, а его вал горизонтален и параллелен поперечной оси вертолета ¹⁾. Сила тяги рулевого винта, действующая на некотором плече относительно вала несущего винта, уравнивает аэродинамический момент последнего. В этой схеме несущий винт создает подъемную и пропульсивную силы, а также обеспечивает управление по крену, тангажу и высоте.

У двухвинтовых вертолетов несущие винты противоположного вращения имеют одинаковые размеры и нагрузки, так что аэродинамические моменты обоих винтов равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому моменты рыскания от несущих

¹⁾ Встречаются также вертолеты с повернутой осью рулевого винта, вследствие чего возникает составляющая силы тяги, направленная вверх (например, вертолет Sikorsky UH-60A). — *Прим. перев.*

винтов на вертолет не передаются. В этой схеме аэродинамические моменты несущих винтов балансируются автоматически и вспомогательный винт, поглощающий определенную мощность, не нужен. Однако вследствие интерференции несущих винтов теряется приблизительно такая же мощность. Чаще всего двухвинтовые вертолеты строятся по *продольной схеме* (один несущий винт расположен в передней, а другой — в задней части фюзеляжа, причем обычно диски несущих винтов значительно перекрываются, а задний несущий винт расположен выше переднего). Некоторое применение нашли также двухвинтовые вертолеты *поперечной схемы*.

1.1.3. РЕЖИМЫ РАБОТЫ ВЕРТОЛЕТА

Режим вертикального полета, когда горизонтальная составляющая скорости равна нулю, — это основной режим, отличающий вертолет от других летательных аппаратов. Режим полета, при котором равны нулю как горизонтальная, так и вертикальная составляющие скорости, т. е. движение относительно невозмущенного воздуха вообще отсутствует, называется *висением*. Подъемную силу и управление на режиме висения обеспечивают изменением углов установки лопастей, создавая на них требуемые аэродинамические силы. Вертикальный полет может представлять собой набор высоты или снижение; при этом диск винта горизонтален и, следовательно, сохраняется строго осевое протекание воздушного потока через диск. На практике вертолет должен быть способен и к горизонтальному полету. При полете вперед диск несущего винта остается почти горизонтальным, так что скорость набегающего потока складывается со скоростью вращения лопастей в плоскости диска. Подъемную силу и управление вертолетом по-прежнему обеспечивает несущий винт. Кроме того, посредством небольшого наклона вперед вектора силы тяги он создает необходимую для полета вперед пропульсивную силу.

Любой летательный аппарат пригоден для эксплуатации лишь при возможности его безопасной посадки с неработающими двигателями. Самолеты сохраняют способность к управляемому полету после отказа двигателей, планируя со снижением под небольшим углом. Винтокрылые аппараты также могут совершать управляемый полет после отказа двигателей. Вращение винта при неработающем двигателе называют *авторотацией*. На этом режиме вращающийся несущий винт обеспечивает необходимую подъемную силу и управление. Источником мощности, требуемой для вращения винта на режиме авторотации, служит относительный воздушный поток, возникающий при снижении вертолета. Пилотирование в рассматриваемом безмоторном полете состоит в таких действиях органами управления, которые

обеспечивают вращение винта при снижении и поддерживают устойчивый полет при минимальной скорости снижения. Вблизи земли производят «подрыв», т. е., используя запас кинетической энергии вращающегося несущего винта, сводят к нулю вертикальную и горизонтальную составляющие скорости непосредственно перед приземлением. Опыт показал, что при вертикальном снижении с неработающим двигателем несущий винт вертолета действует приблизительно так же, как парашют, диаметр которого равен диску винта. При полете вперед эту скорость снижения можно уменьшить приблизительно вдвое.

У винтокрылого аппарата, называемого *автожиром*, авторотация является нормальным режимом работы несущего винта. На вертолете мощность передается непосредственно несущему винту, который создает как подъемную, так и пропульсивную силы. На автожире же мощность (крутящий момент) на несущий винт не поступает. Мощность и пропульсивную силу, требуемые для горизонтального полета, обеспечивает пропеллер или другой движитель. Следовательно, автожир по принципу действия похож на самолет, так как несущий винт играет роль крыла, создавая только подъемную силу, но не пропульсивную. Иногда для создания управляющих сил и моментов на автожире, как и на самолете, используют фиксированные аэродинамические поверхности, но лучше, если управление обеспечивает несущий винт. Несущий винт действует в значительной степени как крыло и характеризуется весьма большой величиной отношения подъемной силы к сопротивлению. Правда, аэродинамические характеристики несущего винта не столь хороши, как у крыла, зато он способен обеспечить подъемную силу и управление при гораздо меньших скоростях. Следовательно, автожир может летать со значительно меньшими скоростями, чем самолет. Однако без передачи мощности на несущий винт автожир не способен к настоящему висению или вертикальному полету. Так как аэродинамические характеристики автожира ненамного лучше характеристик самолета с малой удельной нагрузкой крыла, использование несущего винта на летательном аппарате обычно оправдано только тогда, когда необходимы вертикальные взлет и посадка аппарата.

1.2. РАЗВИТИЕ ВЕРТОЛЕТА

При разработке винтокрылых аппаратов с самого начала возникли три главные проблемы. Первая проблема состояла в том, чтобы создать легкий и надежный двигатель. Поршневой двигатель внутреннего сгорания был первым двигателем, который удовлетворил этим требованиям; много позже был сделан значительный шаг вперед — на вертолете применили газотурбинный двигатель. Вторая проблема связана с необходимостью

разработки легкого и прочного несущего винта (втулки и лопасти), имеющего в то же время хорошие аэродинамические характеристики. Последняя проблема состояла в разработке способа управления вертолетом, включая балансировку аэродинамического момента несущего винта. Это по существу те же проблемы, что возникли в развитии самолетов и были в свое время решены братьями Райт. Вертолеты и самолеты по многим направлениям развивались параллельно. Более позднее появление вертолетов можно объяснить значительными энергозатратами на вертикальный полет, что требовало более высокого уровня техники для удовлетворительного решения соответствующих проблем.

1.2.1. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ВЕРТОЛЕТА

Историю развития вертолета обычно начинают с упоминания о китайской вертушке и о Леонардо да Винчи. Китайская летающая вертушка (около 400 лет до н. э.) — это палочка, к верхнему концу которой приделан пропеллер. Палочку раскручивали руками и отпускали. В трудах Леонардо да Винчи (конец XV в.) имеются чертежи машины, предназначенной для вертикального полета с помощью пропеллера типа гребного винта. В XVIII в. было построено несколько моделей летательного аппарата такого рода. М. В. Ломоносов (Россия, 1754 г.) представил Российской Академии наук модель винтокрылого летательного аппарата с приводом от пружины. Лонуа и Бьенвеню (Франция, 1784 г.) продемонстрировали Французской Академии наук модель также с приводом от пружины. Модель имела два несущих винта противоположного вращения с четырьмя лопастями каждый (лопасти были сделаны из перьев). Винты приводились во вращение дугообразной пружиной. Сэр Дж. Кэйли (Англия, 1790-е гг.) сделал чертежи вертолетов и сконструировал модели с приводом от упругих элементов. Однако все эти модели мало повлияли на развитие вертолета.

Во второй половине XIX в. вертолетом занималось много изобретателей. Был достигнут некоторый прогресс, но пригодного для эксплуатации аппарата не появилось. Главным препятствием было отсутствие дешевого, надежного и легкого двигателя. Известно несколько попыток использовать на вертолете паровой двигатель. У. Филлипс (Англия, 1842 г.) сконструировал модель массой 10 кг с паровым двигателем. Виконт Гюстав де Понтон д'Амекур (Франция, 1863 г.) построил маленькую модель, приводимую в движение паром, он же ввел в употребление слово «геликоптер». Альфонс Пено (Франция, 1870-е гг.) экспериментировал с моделями. Энрико Форланини (Италия, 1878 г.) построил летающую модель массой 3,5 кг с паровым двигателем. Эксперименты с моделями проводил и Томас Эди-

сон (США, 1880-е гг.). Он ясно понимал, что основная трудность заключается в отсутствии мощного, надежного и легкого двигателя. Эдисон пришел к выводу, что вертолет не сможет полететь до тех пор, пока не появятся двигатели с удельным весом менее 1—2 кг/л. с. Упомянутые выше модели были только моделями, но их конструкторы уже начали обращать внимание на проблему адекватного источника мощности, требуемой для полета. Паровая машина оказалась непригодной для летательного аппарата, особенно для вертолета, вследствие ее низкой удельной мощности.

В самом начале XX в. появились поршневые двигатели внутреннего сгорания, работающие на бензине. Это сделало возможным полет самолета, а через некоторое время — и вертолета. Ренар (Франция, 1904 г.) построил вертолет поперечной схемы с двумя двигателями, он же ввел в конструкцию несущего винта вертолета горизонтальный шарнир. «Жироплан» № 1 конструкторов Бреге и Рише (Франция, 1907 г.) имел четыре несущих винта с четырьмя бипланными лопастями каждый (диаметр винтов 8 м, полетная масса аппарата 580 кг, двигатель «Антуанетт» мощностью 45 л. с.). Этот аппарат совершил полет продолжительностью около 1 мин на привязи с пассажиром на высоте около 1 м. Поль Корню (Франция, 1907 г.) сконструировал машину, на которой он осуществил первый полет. Это был вертолет продольной схемы, каждый винт имел две обтянутые тканью лопасти (диаметр винта 6 м, полетная масса аппарата 260 кг, двигатель «Антуанетт» мощностью 24 л. с., винты приводились во вращение с помощью ременной передачи). Для управления использовались лопатки, размещенные в следе несущего винта, которые оказались малоэффективными. Вертолет достиг высоты приблизительно 0,3 м и продержался на ней около 20 с; полет выявил проблемы, связанные с недостатками конструкции и с неустойчивостью аппарата. Эмиль и Генри Берлинеры (США, 1909 г.) построили вертолет соосной схемы с двумя двигателями, который поднял пилота в беспривязном полете. И. Сикорский (Россия, 1910 г.) построил вертолет с двумя соосными трехлопастными винтами (диаметр винтов 5,8 м, двигатель «Анзани» мощностью 25 л. с.). Аппарат развивал подъемную силу в 180 кг, но этого не хватило для преодоления его собственного веса и веса пилота. Сикорский вернулся к конструированию вертолетов (с гораздо большим успехом) после постройки ряда самолетов в России и США. Б. Н. Юрьев (Россия, 1912 г.) построил машину с двухлопастным несущим винтом и небольшим рулевым винтом (диаметр несущего винта 8 м, полетная масса аппарата 200 кг, двигатель «Анзани» мощностью 25 л. с.). Этот вертолет не летал, но Юрьев упорно продолжал исследования. В дальнейшем он руководил разработкой вертолетов в Советском Союзе. Петроци и

фон Карман (Австрия, 1916 г.) построили наблюдательный вертолет, который в полете на привязи с полезной нагрузкой достиг высоты 50 м.

Усовершенствование двигателей во время и после первой мировой войны решило проблему адекватного источника мощности, по крайней мере в той степени, которая позволила приступить к экспериментальному поиску удовлетворительной системы управления вертолетом. Георг де Ботезат (США, 1922 г.) построил вертолет с четырьмя шестилопастными несущими винтами, которые были установлены на концах балок, образующих крест (полетная масса аппарата 1600 кг, двигатель мощностью 180 л. с. установлен в центре креста). Вертолет совершил много полетов с пассажирами на высоте до 4—6 м. Он был хорошо управляем, причем управление осуществлялось дифференциальным изменением общих шагов несущих винтов (общий шаг — средний угол установки лопастей, изменяемый для управления величиной силы тяги). Это был первый винтокрылый аппарат, заказанный армией США. Однако после затраты 200 тыс. долл. проект был в конце концов отклонен из-за чрезмерной сложности конструкции. Этьен д'Эмишан (Франция, 1924 г.) построил машину с четырьмя двухлопастными винтами (два винта диаметром 7,6 м и два диаметром 6,4 м) для создания подъемной силы, пятью горизонтальными пропеллерами для управления по высоте, двумя пропеллерами для создания пропульсивной силы и одним пропеллером впереди для путевого управления. Все эти винты приводились во вращение одним двигателем «Рон» мощностью 120 л. с. Аппарат установил первый рекорд дальности для вертолетов — 360 м. Маркиз Рауль Патерас Пескара (Испания, 1924 г.) сконструировал вертолет с двумя соосными несущими винтами, каждый из которых имел по четыре бипланые лопасти (двигатель мощностью 180 л. с.; построенный в 1920 г. аппарат имел аналогичную конструкцию, несущие винты диаметром 6,4 м и двигатель «Испано» мощностью 45 л. с., но развиваемая им подъемная сила оказалась недостаточной). Управление осуществлялось перекашиванием бипланых лопастей, вследствие чего изменялись их углы установки. Пескара впервые продемонстрировал эффективность управления несущими винтами посредством циклического шага (циклический шаг — синусоидальное с частотой вращения винта изменение углов установки лопастей, используемое для наклона диска несущего винта). Вертолет Пескары установил рекорд дальности (736 м), но проблемы устойчивости не удалось решить полностью. Эмиль и Генри Берлинеры (США, 1920—1925 гг.) построили вертолет, у которого два несущих винта были расположены на концах бипланного крыла, т. е. вертолет поперечной схемы. В качестве несущих винтов были использованы жесткие деревянные пропеллеры, а управление осуществлялось наклоном их осей. Льюис

Бреннен (Англия, 1920-е гг.) построил вертолет с несущим винтом, который проводился во вращение пропеллерами, установленными на лопастях, так что аэродинамический крутящий момент несущего винта был равен нулю. Однако машина оказалась слишком сложной. Циклический шаг осуществлялся искривлением лопастей посредством отклонения щитков. А. ван Баумхауэр (Голландия, 1924—1929 гг.) разработал вертолет одновинтовой схемы (двухлопастный несущий винт диаметром 15 м, полетная масса аппарата 1300 кг, ротативный двигатель мощностью 200 л. с.). Для привода рулевого винта использован отдельный двигатель (ротативный двигатель «Тулин» мощностью 80 л. с., установленный непосредственно на валу рулевого винта). Лопастя несущего винта могли совершать маховое движение, но были соединены тросами, так что получился винт типа качалки. Для управления был использован циклический шаг лопастей несущего винта, создаваемый с помощью автомата перекоса. Вертолет летал, но на высоте не более 1 м. Вследствие наличия отдельных двигателей для несущего и рулевого винтов возникли трудности с управлением по курсу, и после серьезной аварии проект был отклонен. Коррадио д'Асканио (Италия, 1930 г.) сконструировал вертолет соосной схемы (диаметр несущих винтов 13 м, двигатель мощностью 95 л. с.). У несущих винтов было по две лопасти, которые свободно поворачивались в горизонтальных и осевых шарнирах. Управление общим и циклическим шагами достигалось с помощью сервозакрылков на лопастях. В течение нескольких лет эта машина установила рекорды высоты (18 м), продолжительности полета (8 мин 45 с) и дальности (1078 м). Однако характеристики устойчивости и управляемости вертолета были на пределе. М. Бликкер (США, 1930 г.) построил вертолет с четырьмя крылообразными лопастями. Мощность от двигателя в фюзеляже передавалась пропеллерам, установленным на каждой из лопастей. Для управления использовались аэродинамические поверхности, установленные на лопастях и на хвосте аппарата. В ЦАГИ (СССР) под руководством Юрьева была разработана серия вертолетов одновинтовой схемы. Вертолет ЦАГИ I-ЭА (1931 г.) имел четырехлопастный несущий винт с управлением циклическим и общим шагами и два маленьких винта противоположного вращения для балансировки аэродинамического крутящего момента (диаметр несущего винта 11 м, полетная масса аппарата 1100 кг, двигатель мощностью 120 л. с.)¹⁾.

К этому времени вертолетостроение сильно продвинулось вперед, но характеристики устойчивости и управляемости, как и

¹⁾ В 1932 г. этот вертолет поднялся на высоту 605 м, намного превысив зарегистрированные рекорды Асканио (18 м, 1928 г.) и Бреге—Дорана (180 м, 1935 г.). — *Прим. перев.*

характеристики полета вперед и безмоторного полета (авторотации), были еще крайне низкими. В 20-х и 30-х годах основное внимание вертолетостроителей привлекали автожиры. Автожир стал первым практически используемым летательным аппаратом, в котором подъемную силу создает непосредственно воздушный винт. Значительный вклад в его разработку внес Хуан де ла Сиерва (Испания), который ввел в оборот и слово «автожир». В этом аппарате крыло заменено несущим винтом, который приводится во вращение набегающим потоком воздуха. По существу, в автожире использована схема самолета с пропеллером в качестве двигателя. В первоначальных конструкциях автожира для управления применяли даже обычные аэродинамические поверхности самолета (элероны, руль направления, руль высоты). Без подвода мощности к несущему винту автожир не способен висеть или лететь по вертикали, но он может лететь очень медленно, а в крейсерском полете его аэродинамические характеристики весьма близки к характеристикам самолета.

Х. де ла Сиерва сконструировал самолет, который в 1919 г. разбился вследствие срыва потока при полете у земли. Поэтому Сиерву заинтересовал летательный аппарат с малыми скоростями взлета и посадки, на котором не возникает срыв, если летчик чрезмерно уменьшит скорость. Эксперименты в аэродинамической трубе с моделями воздушных винтов показали, что у винта, который свободно вращается на валу, отклоненном назад, можно получить хорошую величину отношения подъемной силы к сопротивлению даже при малой скорости потока. Наилучшие результаты были получены при малых положительных значениях общего шага. В 1922 г. Сиерва построил автожир С-3 с пятилопастным жестким винтом, который имел «тенденцию заваливаться набок». Тем не менее модель с гибкими пальмовыми лопастями летала удовлетворительно. Сиерва установил, что удовлетворительный полет модели объясняется гибкостью ее лопастей. Это навело его на мысль применить на автожире шарнирный несущий винт. В результате Сиерва спроектировал машину с машущими лопастями. Благодаря наличию горизонтальных шарниров аппарату не передается кренящий момент, который возникает на несущем винте при полете вперед и обусловлен несимметричностью обтекания винта. Сиерва был первым, кто применил ГШ в пригодном для эксплуатации винтокрылом аппарате. В 1923 г. он построил автожир С-4, совершивший успешный полет. У аппарата был четырехлопастный несущий винт с ГШ (диаметр винта 9,8 м), двигатель «Рон» мощностью 110 л. с., фюзеляж от самолета AVRO 504K и элероны на вынесенных лонжеронах. Демонстрация в 1925 г. этого автожира в Королевском авиационном научно-исследовательском институте послужила стимулом для развития теории винтокрылых аппаратов в Англии Глауэртом и Локком. Автожир С-6 (1926 г.)

принято считать первым автожиром Сиерва, пригодным для эксплуатации.

В 1925 г. Сиерва основал в Англии фирму «Сиерва аутоджайро компани», которая стала базой строительства его автожиров. В последующее десятилетие было построено около 500 таких машин, причем многие из них по лицензиям Сиерва строили другие предприятия, в том числе фирмы Э. В. Роу, «Де Хэвилленд», «Уэйр», «Вестленд», «Парнелл», «Компер» в Англии; «Питкэрн», «Келлет», «Бал» в США; «Фокке-Вульф» в Германии; «Луар», «Оливье» во Франции; ЦАГИ в СССР. Авария, случившаяся в 1927 г., выявила, что в плоскости диска возникают большие нагрузки лопасти, вызванные маховым движением. После этого лопасти несущего винта были снабжены вертикальными шарнирами. Тем самым была в принципе завершена разработка шарнирного винта для автожира. В 1932 г. Сиерва отказался от управляющих поверхностей, которые не очень эффективны при малых скоростях полета, в пользу управления с помощью самого несущего винта. При этом продольное и поперечное управления осуществлялись путем наклона втулки винта. Р. Хафнер (Англия, 1935 г.) вместо управления наклоном втулки разработал для автожира управление циклическим шагом с помощью механизма «паук». Э. Б. Уилфорд (США, 1930-е гг.) сконструировал автожир с бесшарнирным несущим винтом, на котором также было применено управление циклическим шагом.

К 1935 г. автожиры достигли высокого развития как в Европе, так и в Америке, опередив вертолеты. Это объясняется тем, что, во-первых, автожир не предназначался для вертикальных полетов, а потому потребная мощность у него была меньше; во-вторых, свободно вращающийся несущий винт механически проще. Кроме того, при разработке автожиров многое заимствовалось у самолетов, например двигатели и движители, а поначалу даже и система управления. Однако, не обладая способностью совершать настоящий вертикальный полет, автожир уступал и в других отношениях самолету. Тем не менее развитие автожира, включая накопление экспериментальных данных и практического опыта, оказало некоторое влияние на развитие вертолета и методы его проектирования. В то же время постройка автожиров дала мощный толчок развитию теории винтокрылых аппаратов. Многие исследования автожира, проводившиеся в 20—30-х годах, заложили основу теории вертолета.

Между тем развитие вертолета продолжалось. Луи Бреге и Рене Доран (Франция, 1935 г.) построили вертолет соосной схемы с двухлопастными винтами (диаметр винтов 16,5 м, полетная масса аппарата 2000 кг, двигатель мощностью 450 л. с.). Винт имел ГШ и ВШ, управление по тангажу и крену осуществлялось с помощью циклического шага, а управление по курсу —

дифференциальным изменением крутящих моментов. Аппарат имел удовлетворительные характеристики управляемости и установил рекорды скорости (44,7 км/ч), высоты (158 м), продолжительности полета (1 ч 2 мин) и дальности полета по замкнутому маршруту (44 км). Г. Фокке (Германия, 1936 г.) построил двухвинтовой вертолет поперечной схемы (диаметр винтов 7 м, полетная масса аппарата 950 кг, двигатель «Брамо» мощностью 160 л. с.). Шарнирные несущие винты имели по три суживающиеся лопасти и были установлены на фермах. Путевое и продольное управления осуществлялись путем изменения циклического шага, а управление по крену — дифференциальным изменением общих шагов. Для устойчивости и балансировки полета вперед было использовано вертикальное и горизонтальное хвостовое оперение, а для повышения устойчивости валы несущих винтов были наклонены внутрь. Вертолет установил рекорды скорости (122,5 км/ч), высоты (2440 м) и продолжительности полета (1 ч 21 мин). Это была вполне доведенная машина — хорошо управляемая, надежная, с высокими летными качествами. А. Флеттнер (Германия, 1938—1940 гг.) разработал конструкцию «синхроптера», т. е. вертолета поперечной схемы с большим перекрытием винтов. Его вертолет FL-282 имел двухлопастные шарнирные винты диаметром 12 м с расстоянием между их втулками 0,6 м (полетная масса аппарата 1000 кг, двигатель «Сименс-Хальске» мощностью 140 л. с.). С. Паллин (Англия) также разрабатывал вертолеты поперечной схемы. На фирме «Г. и Дж. Уэйр, лимитед» он построил в 1938 г. вертолет W-5 (двухлопастные винты диаметром 4,6 м, полетная масса 380 кг, двигатель «Уэйр» мощностью 50 л. с.), а в 1939 г. — вертолет W-6 (трехлопастные винты диаметром 7,6 м, полетная масса 1070 кг, двигатель «Де Хэвилленд» мощностью 205 л. с.). И. П. Братухин (СССР, ЦАГИ, 1939—1940 гг.) сконструировал вертолет поперечной схемы «Омега 1» (трехлопастные винты диаметром 7 м, полетная масса 2300 кг, два двигателя мощностью по 350 л. с.). Во время второй мировой войны значительное внимание развитию винтокрылых аппаратов уделялось в Германии. Вертолет поперечной схемы Фокке—Ахгелиса Fa-223 (1941 г.) имел абсолютный потолок 5000 м, дальность полета 300 км, крейсерскую скорость с шестью пассажирами 120 км/ч и полезную нагрузку 900 кг (трехлопастные несущие винты диаметром 12 м, полетная масса 4300 кг, двигатель «Брамо» мощностью 1000 л. с.).

И. Сикорский (США, фирма «Сикорски эркрафт компани», 1939—1941 гг.) вернулся к разработке вертолетов в 1938 г. после того, как он значительное время занимался проектированием и постройкой самолетов в России и Соединенных Штатах. В 1941 г. Сикорский построил одновинтовой вертолет VS-300 (трехлопастный несущий винт диаметром 9 м, полетная масса 520 кг, двига-

тель «Франклин» мощностью 100 л. с.). Поперечное и продольное управления осуществлялись путем изменения циклического шага несущего винта, а управление по курсу — с помощью рулевого винта. Органы управления были близки к современному стандарту (ручка циклического шага, педали, рычаг общего шага с вращающейся рукояткой газа). Для выбора схемы вертолета с приемлемыми характеристиками управляемости потребовались значительные экспериментальные исследования. В первом варианте для управления и устойчивости использовались три вспомогательных воздушных винта (один вертикальный и два горизонтальных), установленные на хвостовой балке. Затем число вспомогательных винтов было сокращено до двух: установленных на хвостовой балке вертикального винта для управления по курсу и горизонтального винта для управления по тангажу. Наконец, был убран последний горизонтальный винт, а для продольного управления использован циклический шаг несущего винта. Вертолет одновинтовой схемы — восемнадцатый по счету вариант — стал наиболее распространенным типом вертолета. Сикорский также провел испытания двухлопастного несущего винта. Винт имел сопоставимые аэродинамические характеристики и был проще, чем трехлопастный, но от него пришлось отказаться из-за чрезмерно сильных вибраций. В 1942 г. был сконструирован вертолет R-4 (VS-316) — модификация VS-300 (трехлопастный несущий винт диаметром 11,6 м, полетная масса 1100 кг, двигатель «Уорнер» мощностью 185 л. с.). Этот вертолет был запущен в серийное производство, и в течение второй мировой войны было построено несколько сотен таких машин. R-4 принято считать первым практическим, по-настоящему работоспособным вертолетом, хотя первенство в этом отношении принадлежит, возможно, вертолету, который сконструировал Фокке в Германии во время второй мировой войны. Однако разработка этого вертолета была прекращена, что обусловлено временем и местом его создания. Успех И. Сикорского объясняется тем, что R-4 был конструктивно прост (по крайней мере в сравнении с другими вертолетами того времени) и хорошо управляем, что предопределило его серийное производство.

Разработка вертолета R-4 дала сильный толчок развитию вертолетостроения в США. В течение следующих нескольких лет было начато проектирование и производство многих других подобных аппаратов. После второй мировой войны вертолетостроение достигло значительного конструктивного и технического прогресса, причем производство стимулировало дальнейшее совершенствование вертолетов. Л. Белл (США, фирма «Белл хеликоптер компани», 1943 г.) построил вертолет одновинтовой схемы с двухлопастным несущим винтом типа качалки, снабженным гироскопически стабилизирующим стержнем, который был предложен Артуром Янгом (США) в 30-х годах. В 1946 г. вертолет

«Белл» 47 (несущий винт диаметром 10,7 м, полетная масса 950 кг, двигатель «Франклин» мощностью 178 л. с.) получил первый американский сертификат летной годности для вертолетов Ф. Пясецкий (США, фирма «Пясецки хеликоптер корпорейшн», 1945 г.) сконструировал вертолет продольной схемы PV-3 (трехлопастные несущие винты диаметром 12,5 м, полетная масса 3100 кг, двигатель «Пратт-Уитни» мощностью 600 л. с.). Фирма Пясецкого впоследствии превратилась в «Боинг вертол компани», а вертолеты продольной схемы остались основным типом выпускаемых ею машин. Луи Бреге (Франция, 1946 г.) построил вертолет соосной схемы G-II E (трехлопастные винты диаметром 8,5 м, полетная масса 1300 кг, двигатель «Поте» мощностью 240 л. с.). Несущие винты имели все три шарнира, причем ГШ и ВШ были снабжены демферами. Стэнли Хиллер (США, 1946—1948 гг.) экспериментировал с вертолетами нескольких типов и в конце концов остановился на вертолете одновинтовой схемы. Хиллер разработал систему управления несущим винтом с помощью гироскопически стабилизирующего стержня, снабженного аэродинамическими поверхностями, отклонением которых управляет пилот, изменяя тем самым ориентацию несущего винта. В 1947 г. был построен вертолет «Хиллер» 360 (двухлопастный винт диаметром 10,7 м, полетная масса 950 кг, двигатель «Франклин» мощностью 178 л. с.). Чарлз Каман (США, фирма «Каман эркрафт компани», 1946—1948 гг.) разработал метод управления углом установки лопастей с помощью сервозакрылков, состоящий в изменении не столько угла поворота корня лопасти вокруг оси ОШ, сколько ее крутки. Каман также сконструировал вертолет по схеме синхротера. М. Л. Миль (СССР) создал серию вертолетов одновинтовой схемы, в том числе в 1949 г. вертолет Ми-1 (трехлопастный винт диаметром 14 м, полетная масса 2250 кг, двигатель мощностью 570 л. с.). Н. И. Камов (СССР) работал над вертолетами соосной схемы. В 1952 г. был построен вертолет Ка-15 (трехлопастные несущие винты диаметром 10 м, полетная масса 1370 кг, двигатель мощностью 225 л. с.). А. С. Яковлев (СССР, 1952 г.) сконструировал вертолет продольной схемы Як-24. При разработке этого вертолета возник ряд проблем, связанных с его динамикой, но в 1955 г. он был запущен в серийное производство.

Важную роль в развитии вертолета сыграла замена поршневого двигателя газотурбинным. Такая замена позволила существенно улучшить летные характеристики вертолета, так как ГТД имеют меньший удельный вес. Фирма «Каман эркрафт компани» (США, 1951 г.) построила первый вертолет с ГТД: на вертолете К-225 был установлен турбовальный двигатель (ГТД «Боинг» с мощностью на валу 175 л. с.). В 1954 г. Каман построил также первый вертолет с двумя турбовальными двигателями. Это был синхротер НТК-1 с двумя двигателями «Боинг» (суммарная

мощность на валу 350 л. с.), которые заменили один поршневой двигатель мощностью 240 л. с., имевший тот же вес и занимавший то же место. С этого времени турбовальный ГТД становится обычной силовой установкой всех вертолетов, кроме самых легких.

Совершенствование идеи вертолета можно считать полностью завершенным к началу 50-х годов. Поэтому мы заканчиваем здесь свой исторический обзор. В последующие годы серийный выпуск некоторых вертолетов достиг рекордных цифр, было построено несколько очень тяжелых машин. Эксплуатация вертолетов расширилась настолько, что они стали важным элементом транспортной авиации. Таким образом, инженерная деятельность в области вертолетостроения заключается теперь не столько в поиске принципиально новых решений, сколько в совершенствовании разработанной конструкции и технологии.

1.2.2. ЛИТЕРАТУРА

История разработки вертолетов отражена в работах: [W. 18, N.5, N.6, B.11, M.150, O.5, K.45, W.102, B.136, K.66, F.38, S.105, S.106, S.107, G.66, H.2, M.8, S.194, S.195, F.39, I.14, A.38, L.40, G.7, F.56, L.7, K.21].

История развития теории и методов расчета вертолета освещается в работах [G. 89, V. 21, G. 129] и в использованных в них источниках.

1.3. ОБОЗНАЧЕНИЯ

В этом разделе описаны основные обозначения, которые будут использованы в книге. Цель этих описаний — дать свод обозначений и понятий теории вертолета, на которые можно будет ссылаться в последующих главах, а также познакомить читателя с основными элементами конструкции несущего винта и вертолета. Здесь будут рассмотрены только основные параметры и понятия. Определения других величин, которые потребуются в дальнейшем, будут даны в ходе изложения. Вводится также несколько безразмерных параметров, имеющих фундаментальное значение в теории вертолета. Алфавитный список обозначений приведен в начале книги.

1.3.1. ХАРАКТЕРНЫЕ РАЗМЕРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В теории, которая излагается в книге, фигурируют, как правило, безразмерные величины. Для несущего винта естественным масштабом длин является радиус R диска винта, а естественным масштабом времени — величина $1/\Omega$, где Ω — частота вращения винта (рад/с). В качестве характерной массы принята плотность ρ воздуха. Для упрощения типографского набора не-

делается различий в обозначениях размерных и соответствующих безразмерных величин. Для тех безразмерных параметров, масштабами которых служат не ρ , Ω , R , а другие величины, введены новые обозначения.

1.3.2. ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЛОПАСТИ

R — радиус несущего винта, длина лопасти, измеряемая от оси втулки;

Ω — частота вращения винта, угловая скорость винта, рад/с;

ρ — плотность воздуха;

ψ — азимут лопасти (рис. 1.5), равный по определению нулю на луче, направленном по скорости набегающего потока (ази-

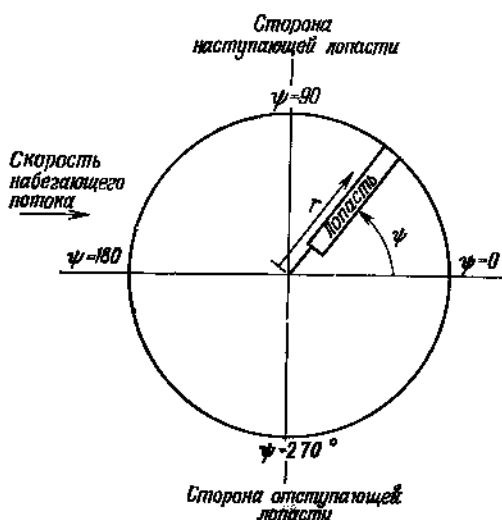


Рис. 1.5. Схема диска несущего винта, поясняющая определения ψ и r .

мут — это угол, отсчитываемый от указанного луча до продольной оси лопасти в направлении ее вращения; следовательно, при постоянной частоте вращения винта $\psi = \Omega t$;

r — радиус поперечного сечения лопасти (рис. 1.5), изменяющийся от оси вращения (где $r = 0$) до конца лопасти (где $r = R$ или, если радиус безразмерный, $r = 1$).

Обычно считают, что несущий винт вращается против часовой стрелки (если смотреть сверху). Тогда лопасть в правой половине диска опережает фюзеляж и называется опережающей (*наступающей*), а лопасть в левой половине диска — отстающей (*отступающей*). Переменные r и ψ будут обычно определять радиальное и азимутальное положения сечения лопасти, но их можно также использовать как полярные координаты в плоскости диска несущего винта.

e — длина хорды лопасти, которая для суживающейся лопасти зависит от r ;

N — число лопастей;

m — погонная масса лопасти, являющаяся функцией r ;

$I_{л} = \int_0^R mr^2 dr$ — момент инерции лопасти относительно оси

вращения.

Лопасть несущего винта обычно закручена вдоль размаха. В теории часто рассматривают случай линейной крутки, в котором конструктивный угол установки сечения относительно комлевого сечения изменяется по формуле $\Delta\theta = \theta_{кр}r$. Градиент $\theta_{кр}$ линейной крутки (равный разности углов установки на конце лопасти и у ее комля) для лопасти вертолета обычно отрицателен. Важное значение имеют следующие производные величины:

$A = \pi R^2$ — площадь диска несущего винта;

$\sigma = Nc/(\pi R)$ — коэффициент заполнения диска несущего винта;

$\gamma = \rho acR^2/I_{л}$ — массовая характеристика лопасти.

Коэффициент заполнения σ — это отношение площади лопастей в плане (которая для лопастей с постоянной длиной хорды равна NcR) к площади диска (πR^2). Массовая характеристика лопасти γ есть отношение действующей на лопасть аэродинамической силы к инерционной силе.

1.3.3. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЛОПАСТИ

a — градиент подъемной силы сечения лопасти по углу атаки при двумерном обтекании;

α — угол атаки сечения лопасти;

M — число Маха в сечении лопасти.

Индексы при буквах a или M , равные значениям r и ψ , указывают положение рассматриваемого сечения. Например, $a_{1,270}$ — угол атаки концевое сечения отступающей лопасти, а $M_{1,90}$ — число Маха в концевом сечении наступающей лопасти.

1.3.4. ПАРАМЕТРЫ ДВИЖЕНИЯ ЛОПАСТИ

Основные движения лопасти (кроме вращения ее вместе с винтом) — это, по существу, повороты лопасти как твердого тела относительно втулки, к которой она крепится в комле (рис. 1.6).

β — угол взмаха лопасти. Эта степень свободы соответствует отклонению лопасти от плоскости диска (либо благодаря имеющемуся ГШ, либо благодаря гибкому элементу в комле). Угол β по определению положителен при отклонении лопасти вверх (такое отклонение соответствует силе тяги лопасти);

ξ — угол качания лопасти. Эта степень свободы соответствует движению лопасти в плоскости диска. Угол ξ по определению положителен, когда направление качания противоположно направлению вращения винта (такое качание вызывает сила сопротивления лопасти);

θ — угол установки лопасти. Этот угол изменяется при повороте лопасти в ОШ, т. е. вокруг оси, параллельной лонжерону лопасти.

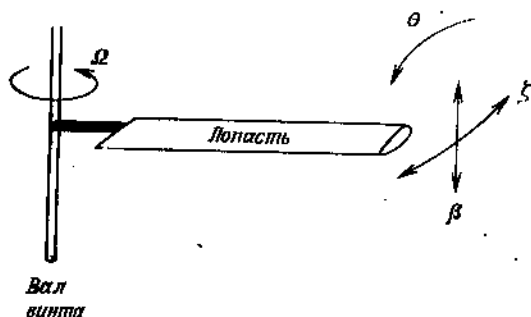


Рис. 1.6. Основные движения лопасти.

рону лопасти. Угол θ по определению положителен, когда носок лопасти поднят вверх.

Степени свободы β , ξ и θ можно также определить как повороты лопасти вокруг осей шарниров несущего винта следующим образом: β — угол поворота вокруг оси, лежащей в плоскости диска и перпендикулярной лонжерону лопасти; ξ — угол поворота вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска и параллельной валу несущего винта; θ — угол поворота вокруг оси, лежащей в плоскости диска и параллельной лонжерону лопасти. Описание более сложных движений лопасти, например движения, связанного с ее изгибом, будет дано по мере надобности в следующих главах.

На установившемся режиме работы несущего винта движение лопасти является периодическим по азимуту, и, следовательно, указанные углы можно представить рядами Фурье по ψ :

$$\beta = \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi + \beta_{2c} \cos 2\psi + \beta_{2s} \sin 2\psi + \dots$$

$$\xi = \xi_0 + \xi_{1c} \cos \psi + \xi_{1s} \sin \psi + \xi_{2c} \cos 2\psi + \xi_{2s} \sin 2\psi + \dots$$

$$\theta = \theta_0 + \theta_{1c} \cos \psi + \theta_{1s} \sin \psi + \theta_{2c} \cos 2\psi + \theta_{2s} \sin 2\psi + \dots$$

Нулевые и первые гармоники (коэффициенты Фурье с индексами 0, 1c и 1s) при расчете аэродинамических характеристик и характеристик управления несущего винта наиболее важны. Угол конусности винта равен β_0 , углы β_{1c} и β_{1s} равны углам наклона плоскости концов лопастей вперед и вбок соответственно. Угол θ_0 представляет собой общий шаг лопастей, а углы θ_{1c} и θ_{1s} определяют циклический шаг винта.

1.3.5. УГОЛ АТАКИ НЕСУЩЕГО ВИНТА И СКОРОСТЬ ОБТЕКАЮЩЕГО ЕГО ПОТОКА

α — угол атаки плоскости диска несущего винта, положителен при наклоне диска верхней стороной вперед (при таком наклоне сила тяги несущего винта имеет составляющую, обеспечивающую вертолету пропульсивную силу);

V — скорость несущего винта (или вертолета) относительно невозмущенного воздуха;

v — индуктивная скорость (нормальная к плоскости диска составляющая скорости, индуцируемой несущим винтом). Положительна, когда индуктивный поток направлен через диск

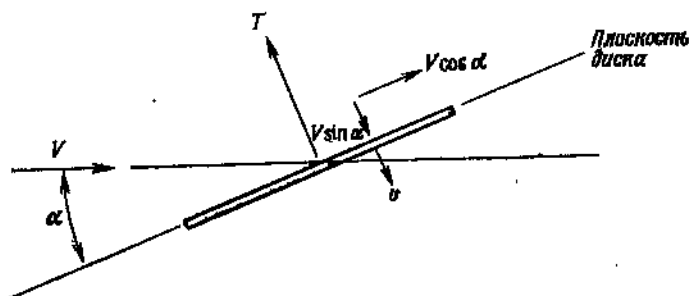


Рис. 1.7. Составляющие скорости и ориентация диска несущего винта.

вниз (такой поток соответствует положительной силе тяги винта).

Если результирующую скорость потока, обтекающего несущий винт, разложить на составляющие, одна из которых параллельна плоскости диска, другая перпендикулярна ей, и отнести эти составляющие к концевой скорости ΩR , то получим следующие безразмерные скорости (рис. 1.7):

$\mu = V \cos \alpha / (\Omega R)$ — характеристика режима работы винта;

$\lambda = (V \sin \alpha + v) / (QR)$ — коэффициент протекания (по определению положителен, когда поток направлен через диск вниз);

$\lambda_i = v / (\Omega R)$ — индуктивный коэффициент протекания. Характеристика режима работы винта μ представляет собой отношение проекции на плоскость диска скорости набегающего потока к концевой скорости. Коэффициент протекания λ представляет собой отношение суммарной скорости протекания к концевой скорости.

1.3.6. СИЛЫ И МОЩНОСТЬ НА НЕСУЩЕМ ВИНТЕ

T — сила тяги несущего винта, по определению нормальна к плоскости диска и направлена вверх;

H — продольная сила несущего винта, по определению лежит в плоскости диска и направлена назад, противоположно составляющей скорости вертолета в плоскости диска;

Y — поперечная сила несущего винта, по определению лежит в плоскости диска и направлена вправо, в сторону наступающей лопасти;

Q — аэродинамический крутящий момент на валу несущего винта, по определению положителен, когда для вращения винта необходим внешний крутящий момент (вертолетный режим);

P — мощность на валу несущего винта, положительна, когда мощность передается винту.

Если отнести эти величины к произведению плотности воздуха, площади диска несущего винта и квадрата концевой скорости, то получим коэффициенты:

$C_T = T/[\rho A (\Omega R)^2]$ — коэффициент силы тяги;

$C_H = H/[\rho A (\Omega R)^2]$ — коэффициент продольной силы;

$C_Y = Y/[\rho A (\Omega R)^2]$ — коэффициент поперечной силы;

$C_Q = Q/[\rho A (\Omega R)^2 R]$ — коэффициент крутящего момента;

$C_P = P/[\rho A (\Omega R)^3]$ — коэффициент мощности.

Заметим, что мощность на валу несущего винта и аэродинамический момент связаны соотношением $P = \Omega Q$. Отсюда следует равенство коэффициентов: $C_P = C_Q$. Отношение силы тяги к площади диска (T/A) называют *нагрузкой на диск*, а отношение мощности к силе тяги — *удельной мощностью по тяге*. Средней нагрузкой лопасти называют отношение силы тяги к суммарной площади лопастей, т. е. $T/(NA_L) = T/(\sigma A)$, или безразмерное отношение коэффициента силы тяги к коэффициенту заполнения (C_T/σ).

1.3.7. ПЛОСКОСТИ ДИСКА

Для различным образом определенных плоскостей диска (определения даны в гл. 5) введены следующие обозначения:

ПКЛ — плоскость концов лопастей,

ППУ — плоскость постоянных углов установки,

ПВ — плоскость вращения,

ПУ — плоскость управления.

1.3.8. ОБОЗНАЧЕНИЯ НАСА

Общепринятого стандарта обозначений в литературе по вертолетам не существует¹⁾. Поэтому в каждой работе принимаются и объясняются принятые определения, понятия и параметры. Однако имеется система обозначений, которая ис-

¹⁾ В СССР обозначения и термины для винтокрылых аппаратов определяют ГОСТ 21890-76, ГОСТ 21892-76, ГОСТ 22499-77 и др. — *Прим. перев.*

пользуется достаточно широко и на которую следует поэтому обратить внимание. Это система обозначений, введенная Национальным консультативным комитетом по авиации США (НАСА). Основные обозначения НАСА, которые отличаются от используемых в данной книге, приведены ниже:

b — число лопастей;

$x = r/R$ — безразмерный радиус сечения;

θ_1 — градиент линейной крутки (входит в выражение $\theta = \theta_0 + \theta_1 r$);

I_1 — момент инерции лопасти относительно оси ГШ;

$\lambda = (V \sin \alpha - v) / (\Omega R)$ — коэффициент протекания через винт, по определению положителен, когда поток протекает через диск вверх;

α — угол атаки диска винта, по определению положителен, когда верхняя сторона диска и вектор силы тяги наклонены назад.

Кроме того, предполагается, что λ и α связаны с плоскостью постоянных углов установки, если нет индексов или других указаний на использование иной плоскости отсчета.

Углы, определяющие движение лопасти, описываются рядами Фурье со следующими обозначениями коэффициентов гармоник:

$$\beta = a_0 - a_1 \cos \psi - b_1 \sin \psi - a_2 \cos 2\psi - b_2 \sin 2\psi - \dots$$

$$\theta = A_0 - A_1 \cos \psi - B_1 \sin \psi - A_2 \cos 2\psi - B_2 \sin 2\psi - \dots$$

$$\zeta = E_0 + E_1 \cos \psi + F_1 \sin \psi + E_2 \cos 2\psi + F_2 \sin 2\psi + \dots$$

Индекс s обозначает величины (например, A_{1s} и B_{1s}), связанные с осью вала или плоскостью вращения.

Различия в знаках по сравнению с обозначениями данной книги объясняются тем, что обозначения НАСА были предназначены для теории автожира и все параметры определены так, чтобы их значения на обычном режиме полета были положительными. Полная система обозначений НАСА, используемая в теории вертолета, изложена в работах Гессоу и Мейерса [G. 51, G. 66].

Вертикальный полет I

Висение — это режим полета, при котором вертикальная и горизонтальная составляющие скорости несущего винта относительно невозмущенного воздуха равны нулю. В общем случае вертикального полета набегающий поток направлен вдоль оси винта. Обтекание несущего винта в вертикальном полете предполагается осесимметричным, так что скорости и нагрузки лопастей не зависят от азимута. Осевая симметрия сильно упрощает исследование вопросов динамики и аэродинамики несущего винта вертолета, как это станет ясным позже при рассмотрении полета вперед. Теория винта в осевом потоке была в основном создана в XIX в. применительно к корабельным винтам. Позже ее применили к пропеллерам самолетов. Главная задача теории несущего винта на режиме висения состоит в определении сил, создаваемых лопастями, и требуемой для их вращения мощности, что обеспечивает основу для проектирования высокоэффективных несущих винтов.

§1. ИМПУЛЬСНАЯ ТЕОРИЯ

В импульсной теории для расчета аэродинамических характеристик несущего винта применяют основные гидродинамические законы сохранения (массы, количества движения и энергии) к системе винт — поток. Этим характерные скорости течения связываются с суммарными величинами силы тяги и мощности. Импульсная теория была разработана для корабельных винтов У. Дж. М. Рэнкином в 1865 г. и Р. Э. Фрудом в 1885 г., а в 1920 г. А. Ветц обобщил ее, учтя закручивание потока за винтом.

В импульсной теории сила тяги, создаваемая действием воздуха на лопасти, распределяется по диску несущего винта. Согласно третьему закону Ньютона, существует равная ей и противоположно направленная реакция винта на воздух. В результате скорость воздуха в следе винта возрастает в направлении, противоположном направлению силы тяги. Таким образом, воздух в следе обладает кинетической энергией, которую ему сообщает несущий винт. Для передачи этой энергии необходимы затраты мощности, называемые *индуктивной мощ-*

ностью несущего винта; она соответствует индуктивному сопротивлению крыла.

Закон сохранения количества движения определяет связь между силой тяги винта T/\dot{m} , отнесенной к массовому расходу, и индуктивной скоростью w в дальнем следе. Закон сохранения энергии связывает T/\dot{m} и w с индуктивной скоростью v на диске несущего винта. Наконец, закон сохранения массы позволяет выразить \dot{m} через v . Исключая w , получим главный результат импульсной теории — соотношение между индуктивной мощностью и силой тяги несущего винта. Импульсная теория не рассматривает детальную картину нагрузок винта или обтекающего его потока. Поэтому одной этой теории недостаточно для проектирования винта. Импульсная теория позволяет лишь оценить необходимые индуктивные затраты мощности и указывает идеальный предел улучшения аэродинамических характеристик несущего винта.

2.1.1. АКТИВНЫЙ ДИСК

В импульсной теории несущий винт представляется схемой активного диска, т. е. диском нулевой толщины, который способен поддерживать по обе стороны от себя разность давлений и таким образом сообщать ускорение проходящему через него воздуху. Нагрузка считается стационарной, но в общем случае она может изменяться по поверхности диска. В схеме активного диска можно учесть на винте постоянный крутящий момент, за счет которого проходящему через диск воздуху сообщается некоторый момент количества движения. Задача теории состоит в том, чтобы рассчитать обтекание активного диска и, в частности, при заданной силе тяги найти индуктивную скорость и потребную мощность. В импульсной теории эту задачу решают, используя основные гидродинамические законы сохранения; в вихревой теории скорость, индуцируемую вихревым следом, находят с помощью формулы Био — Савара; в потенциальной теории решают уравнения гидродинамики относительно потенциала скоростей или функции тока. Если схема течения одна и та же, то все три теории должны дать одинаковые результаты.

Активный диск — лишь приближенная схема реального несущего винта. Принятое в ней распределение нагрузок лопастей по диску эквивалентно рассмотрению винта с бесконечным числом лопастей. Поэтому картина обтекания активного диска в деталях сильно отличается от соответствующей картины для винта с конечным числом лопастей. Поле скоростей на самом деле нестационарно, а дискретной нагрузке соответствует дискретное распределение завихренности.

Таким образом, вследствие неоднородности потока и нестационарности индуктивных скоростей действительные индуктивные затраты будут больше тех, которые дает импульсная теория. Приближенность схемы активного диска жестко ограничивает применимость обобщенной импульсной или вихревой теории. Схему активного диска применяют главным образом для того, чтобы получить предварительную оценку индуцируемых следом скоростей и суммарных индуктивных затрат.

2.1.2. ИМПУЛЬСНАЯ ТЕОРИЯ ВИНТА НА РЕЖИМЕ ВИСЕНИЯ

Рассмотрим активный диск площади A , создающий силу тяги T (рис. 2.1). Предположим, что нагрузка равномерно распределена по диску. Пусть v — индуктивная скорость в плоскости диска, w — индуктивная скорость на бесконечном удалении

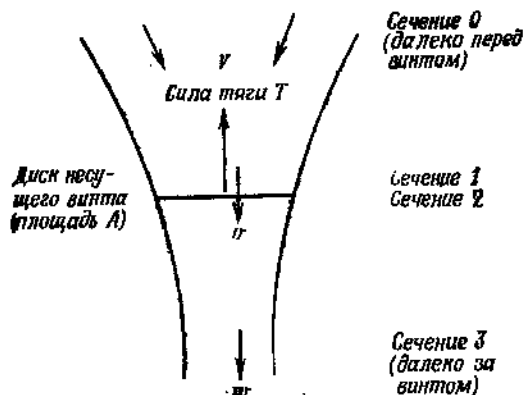


Рис. 2.1. Используемая в импульсной теории схема обтекания несущего винта на режиме висения.

вниз по потоку. Течение будем считать плавным, а скорости v и w — постоянными по поперечным сечениям следа. Энергией вращения, обусловленной крутящим моментом несущего винта, пренебрегаем. Воздух считаем идеальной и несжимаемой жидкостью. Массовый расход жидкости через диск равен $\dot{m} = \rho Av$, и по закону сохранения массы он постоянен по всему следу. По теореме импульсов сила, создаваемая несущим винтом, равна скорости изменения количества движения фиксированного объема жидкости и в установившемся течении вычисляется как разность между количеством движения жидкости, вытекающей в единицу времени через сечение 3 (рис. 2.1), и количеством движения жидкости, втекающей в единицу времени через сечение 0 (рис. 2.1). На висении далеко перед винтом жидкость находится в состоянии покоя, так что $T = \dot{m}w$. По закону сохранения энергии затрачиваемая несущим винтом мощность равна скорости изменения энергии жидкости и вычи-

слыется как разность между кинетической энергией жидкости, вытекающей в единицу времени через сечение 3, и кинетической энергией жидкости, вытекающей в единицу времени через сечение 0. Следовательно, $Tv = \dot{m}\omega^2/2$. Исключив T/\dot{m} из соотношений, выражающих законы сохранения импульсов и энергии, получим $\omega = 2v$, т. е. индуктивная скорость в дальнем следе вдвое больше скорости в плоскости диска винта. Заметим, что точно такое же соотношение справедливо для крыла с эллиптической нагрузкой. Поскольку массовый расход и плотность постоянны, площадь сечения дальнего следа (сечения 3) равна $A/2$.

Тот же результат можно получить и другим путем, используя уравнение Бернулли, являющееся интегральной формой уравнения энергии жидкости. Предположим, что давление в дальнем следе (в сечении 3) равно давлению p_0 в окружающей жидкости. Это эквивалентно сделанному выше предположению о том, что закручиванием следа можно пренебречь. Если применить уравнение Бернулли к сечениям 0 и 1 линии тока, то получим соотношение $p_0 = p_1 + \rho v^2/2$, а к сечениям 2 и 3 — соотношение $p_2 + \rho v^2/2 = p_0 + \rho\omega^2/2$. Из этих соотношений находим

$$T/A = p_2 - p_1 = (1/2)\rho\omega^2.$$

Отсюда с учетом равенства $\dot{m} = \rho Av$ получим

$$Tv = (1/2)\dot{m}\omega^2,$$

как и раньше. Заметим, что полное давление в дальнем следе равно $p_0 + \rho\omega^2/2 = p_0 + T/A$, т. е. приращение полного давления, создаваемое активным диском, равно нагрузке на диск T/A . Для несущих винтов вертолетов эта величина очень мала по сравнению с p_0 . Таким образом, избыток давления в следе винта мал, хотя скорости в следе могут быть весьма велики. Давление в потоке изменяется от p_0 до $p_1 = p_0 - \rho v^2/2 = p_0 - (T/A)/4$ непосредственно перед диском и от $p_2 = p_0 + (3/2)\rho v^2 = p_0 + (3/4)T/A$ непосредственно за диском до p_0 в дальнем следе. Таким образом, падение давления в потоке происходит всюду, кроме плоскости диска винта, где имеет место положительный перепад давления, который и ускоряет поток.

Из сказанного следует, что в импульсной теории сила тяги несущего винта и индуктивная скорость в плоскости диска связаны соотношением $T = \dot{m}v = 2\rho Av^2$. Отсюда индуктивная скорость на висении равна

$$v_s = \sqrt{T/(2\rho A)},$$

а индуктивные затраты мощности на висении составляют

$$P = T v = T \sqrt{T/(2\rho A)}.$$

Если в качестве характерной скорости взять концевую скорость ΩR , то эти формулы можно записать в виде соотношений между коэффициентами: $\lambda_v = \sqrt{C_T/2}$ и $C_P = C_T \lambda = C_T^{3/2}/\sqrt{2}$.

Для индуктивных затрат мощности на единицу силы тяги в случае висения импульсная теория дает

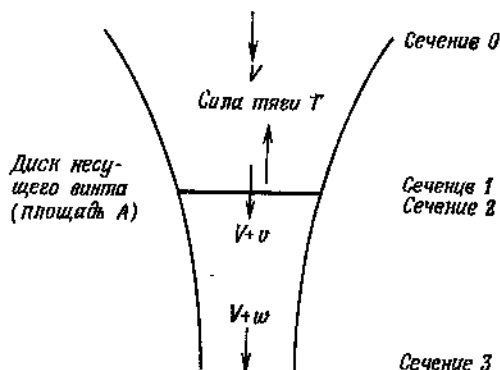
$$P/T = v = \sqrt{T/(2\rho A)}.$$

Этим соотношением определяются основные характеристики вертолета. Оно основано на фундаментальных законах гидродинамики и показывает, что для того, чтобы скорость протекания через диск была мала и, следовательно, были малы индуктивные затраты мощности, проходящий через диск воздух нужно ускорять малым перепадом давления. Для экономичного режима висения требуется малая величина отношения P/T (малый вес топлива и двигателя), а для этого должна быть мала нагрузка на диск T/A . Вертолеты имеют наименьшую нагрузку на диск (T/A от 100 до 500 Па), а потому и наилучшие характеристики висения среди всех аппаратов вертикального взлета и посадки. Заметим, что на самом деле индуктивную мощность определяет отношение $T/(\rho A)$, так как эффективная нагрузка на диск возрастает с высотой полета и температурой, т. е. с уменьшением плотности воздуха. Используя методы вариационного исчисления, можно доказать, что, как и для крыльев, равномерное распределение индуктивных скоростей по диску дает минимальную индуктивную мощность при заданной силе тяги. Задача состоит в том, чтобы минимизировать кинетическую энергию $KЭ \sim \int v^2 dA$ следа при заданной силе тяги или заданном количестве движения $\int v dA$ следа. Представим индуктивную скорость в виде суммы $v = \bar{v} + \delta v$ среднего значения \bar{v} и возмущения δv , для которого $\int \delta v dA = 0$. Тогда $\int v^2 dA = \bar{v}^2 A + \int (\delta v)^2 dA$, и кинетическая энергия достигает минимума, когда во всех точках диска $\delta v = 0$, т. е. при равномерном распределении скорости протекания. Суть в том, что при неравномерном распределении скоростей протекания дополнительные потери мощности в областях с большими местными нагрузками превышают выигрыш в мощности, получаемый в областях с малыми нагрузками.

2.1.3. ИМПУЛЬСНАЯ ТЕОРИЯ ВИНТА В ПОЛЕТЕ С НАБОРОМ ВЫСОТЫ

Рассмотрим теперь импульсную теорию несущего винта в вертикальном полете с набором высоты (рис. 2.2), когда скорость полета равна V . Основные предположения остаются теми же, что и принятые выше для режима висения, т. е. сохраняется схема активного диска, нагрузка считается равномерной,

Рис. 2.2. Используемая в импульсной теории схема обтекания несущего винта при вертикальном подъеме.



а течение в следе — плавным, распределение индуктивных скоростей принимается равномерным, скоростями закручивания в следе пренебрегается, а воздух считается идеальной жидкостью. Массовый расход воздуха теперь будет $\dot{m} = \rho A (V + v)$, а теоремы импульсов и энергии дают соответственно $T = \dot{m}(V + w) - \dot{m}V = \dot{m}w$ и $T(V + v) = (1/2)\dot{m}(V + w)^2 - (1/2)\dot{m}V^2 = (1/2)\dot{m}w(w + 2V)$. Заметим, что в уравнение импульсов не входит V . Исключая T/\dot{m} из этих соотношений, снова, как и в случае висения, получим $w = 2v$, т. е. индуктивная скорость в дальнем следе вдвое больше индуктивной скорости в плоскости диска. Полное давление в дальнем следе теперь определяется выражением $p_0 + (1/2)\rho(V + w)^2 = p_0 + (1/2)\rho V^2 + T/A$.

Для случая полета с набором высоты соотношение между силой тяги несущего винта и индуктивной скоростью принимает вид $T = \dot{m}w = 2\rho A(V + v)v$. Вводя параметр $v_s = \sqrt{T/(2\rho A)}$, получим уравнение $v(V + v) = v_s^2$, которое имеет решение

$$v = -\frac{V}{2} + \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 + v_s^2}.$$

Таким образом, при вертикальном подъеме индуктивная скорость v меньше, чем на висении. Затраты мощности на создание индуктивной скорости и на набор высоты описываются формулой

$$P = T(V + v) = T\left(\frac{V}{2} + \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 + v_s^2}\right).$$

Наконец, скорость в дальнем следе равна $V + w = V + 2v = \sqrt{V^2 + 4v_s^2}$. При очень больших скоростях подъема индуктивная скорость v приблизительно равна v_s^2/V , а мощность приближается к мощности TV , затрачиваемой на набор высоты. Однако при малых скоростях подъема (соотношение $V \ll v_s$ характерно для несущих винтов вертолетов) индуктивная мощность составляет $P \approx T(V/2 + v_s) = P_s + TV/2$. Потребляемая мощность увеличивается вместе с V , но приращение затрат мощности на набор высоты частично компенсируется уменьшением индуктивной мощности.

2.1.4. ЗАТРАТЫ МОЩНОСТИ НА РЕЖИМЕ ВИСЕНИЯ

Импульсная теория следующим образом определяет коэффициент индуктивной мощности для идеального несущего винта на висении: $C_{Pl} = C_T^{3/2}/\sqrt{2}$. У реального несущего винта имеются и другие затраты мощности, в частности профильные потери, которые обусловлены сопротивлением лопастей, вращающихся в вязкой жидкости. Имеются также дополнительные индуктивные потери, которые связаны с неоднородностью потока, протекающего через реальный, неоптимально спроектированный несущий винт. Закручивание потока в следе, вызываемое крутящим моментом, является еще одной причиной потерь мощности, хотя у вертолетов эти потери обычно малы. Наконец, несущему винту на висении присущи концевые потери, возникающие в результате дискретности и периодичности возмущений в следе, которые обусловлены тем, что число лопастей конечно. Затраты мощности, потребляемой несущим винтом на висении, приблизительно распределены следующим образом (в %):

Индуктивная мощность	60
Профильная мощность	30
Потери на неоднородность потока	5—7
Потери на закручивание следа	менее 1
Концевые потери	2—4

Несущий винт потребляет наибольшую часть мощности силовой установки вертолета, но существуют и другие затраты мощности. Двигатель и редуктор поглощают от 4 до 5% общей мощности силовой установки в случае газотурбинных двигателей и от 6 до 9% в случае поршневых. У газотурбинного двигателя потери в редукторе больше, так как больше его частота вращения и степень редукции должна быть выше, а у поршневого двигателя велики потери на охлаждение. Рулевой винт потребляет от 7 до 9% общей мощности силовой установки вертолета, и около 2% составляют дополнительные потери мощности вследствие интерференции (несущего винта с фюзеляжем

и рулевым винтом). На вертолете продольной схемы потери составляют те же 9—11% общей мощности, что обусловлено в первую очередь интерференцией несущих винтов, но также и дополнительными потерями в трансмиссии. При полете вперед затраты мощности на рулевой винт и интерференцию значительно меньше.

2.2. КОЭФФИЦИЕНТ СОВЕРШЕНСТВА

Коэффициент совершенства M , служащий мерилom аэродинамического совершенства несущего винта на режиме висения, определяют как отношение минимально возможной требуемой для висения мощности к мощности, действительно потребляемой на висении¹⁾. Таким образом, в коэффициенте совершенства M аэродинамические характеристики реального несущего винта сопоставлены с характеристиками идеального винта, расходующего на индукцию только ту мощность, затраты которой неизбежны, т. е.

$$M = \frac{P_{ид}}{P}$$

Импульсная теория дает для оптимальной индуктивной мощности выражение $P_{ид} = Tv = T \sqrt{T/(2\rho A)}$. Таким образом, коэффициент совершенства вычисляется по формуле

$$M = T \sqrt{T/(2\rho A)} / P = (C_T^{3/2} / \sqrt{2}) / C_P$$

Коэффициент совершенства $M = Tv/P$ аналогичен пропульсивному к. п. д. пропеллера $\eta = TV/P$ (отношение полезной мощности к затрачиваемой). Последний пригоден для пропульсивных устройств, но неприемлем для несущего винта на висении, когда полезной является мощность, затрачиваемая на создание силы тяги. Заметим, что определение к. п. д. винта можно обобщить, положив $\eta = T(V + v)/P$, и тогда он будет пригоден для всего диапазона режимов осевого обтекания винта.

Если потребляемую несущим винтом мощность представить как сумму индуктивной и профильной мощностей, то коэффициент совершенства можно записать в виде $M = (C_P)_{ид} / (C_{Pi} + C_{Po})$. Обычно профильная мощность (коэффициент C_{Po}) составляет по крайней мере 25% общих затрат мощности, а индуктивная мощность (коэффициент C_{Pi}) на 10—20% превышает ее значение для идеального винта. Таким образом, коэффициент совершенства можно считать мерой отношения профильной мощности к индуктивной. Сравнивая коэффициенты M для разных случаев, можно сделать ошибочные выводы, так как

¹⁾ В отечественной литературе этот коэффициент называют также относительным к. п. д. и обозначают η_0 . — *Прим. перев.*

величина M не связана непосредственно с общей мощностью, требуемой для висения. При увеличении нагрузки на диск T/A индуктивная мощность возрастает быстрее, чем профильная, и в результате коэффициент совершенства увеличивается. Однако это вряд ли свидетельствует о возрастании аэродинамического совершенства несущего винта, так как общая потребляемая мощность также увеличивается. Поэтому использование коэффициента совершенства для сравнения несущих винтов допустимо лишь при одинаковых нагрузках на диск. При этом условии коэффициент совершенства оказывается полезной мерой аэродинамического совершенства несущего винта. Особенно он полезен при сравнении винтов с различными профилями лопастей и при исследовании влияния, которое оказывают изменения других конструктивных характеристик, таких, как крутка лопастей или их форма в плане.

Для идеального винта $M = 1$; в случае реального винта величина M меньше вследствие профильных потерь и неоптимальной величины индуктивной мощности. Для конкретного винта коэффициент совершенства обычно представляют в виде функции отношения коэффициента силы тяги к коэффициенту заполнения (C_T/σ). Это отношение характеризует средний угол атаки лопасти. У современных хорошо спроектированных несущих винтов коэффициент совершенства достигает значений 0,75—0,80. Если максимальное значение M составляет 0,5, то винт спроектирован плохо. Коэффициент совершенства уменьшается при малых C_T/σ вследствие низких нагрузок на диск и при больших C_T/σ вследствие возникновения срыва (который увеличивает профильные потери). При расчетной нагрузке несущего винта типичны значения M в диапазоне 0,55—0,60. Для плотности воздуха, соответствующей уровню моря, из определения коэффициента совершенства получим $T/P = 1170M/\sqrt{T/A}$ (здесь нагрузка на мощность T/P выражена в Н/л. с.; а нагрузка на диск T/A — в Н/м², т. е. в Па). Таким образом, у вертолета с нагрузкой на диск от 250 до 500 Па нагрузка на мощность составляет от 30 до 40 Н/л. с.

2.3. ОБОБЩЕННАЯ ИМПУЛЬСНАЯ ТЕОРИЯ

Наиболее важные и полезные результаты импульсной теории дает самый простой ее вариант, изложенный в разд. 2.1. Дальнейшее обобщение теории представляется нецелесообразным из-за приближенности самой схемы активного диска. Однако обобщенная импульсная теория осевого обтекания винта позволяет все же получить некоторые полезные результаты. Эта теория весьма широко разрабатывалась в первые десятилетия XX в. применительно к пропеллерам, для которых схема активного диска оправдана большими осевыми скоростями обтека-

ния (см., например, [G. 89]). Здесь мы изложим более общую, чем в разд. 2.1.2 и 2.1.3, импульсную теорию винта на режимах висения и вертикального подъема, учитывающую профильную мощность в балансе энергии, а также влияние закручивания потока.

Гидродинамические законы сохранения массы, количества движения, момента количества движения и энергии в интегральной форме имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \int \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS &= 0, \\ \rho \int (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{n} dS + \int p \mathbf{n} dS &= \mathbf{F}_T, \\ \rho \int (\mathbf{r} \times \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS + \int p (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS &= \mathbf{M}_T, \\ \int (\rho + \rho q^2/2)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dS &= dE/dt, \end{aligned}$$

где dS — элемент площади поверхности, окружающей жидкий объем, в точке (\mathbf{r}) ; \mathbf{n} — орт внешней нормали к поверхности; \mathbf{q} — скорость жидкости; \mathbf{F}_T и \mathbf{M}_T — сила и момент, с которыми жидкость воздействует на находящиеся в ней тела (в данном случае на несущий винт); dE/dt — мощность, передаваемая потоку. Предполагается, что течение стационарно (в системе координат, движущейся вместе с винтом); воздух — несжимаемая жидкость; потери на поверхности тела, обусловленные вязкостью, отсутствуют. Заметим, что применение законов сохранения массы и энергии к трубке тока при условии, что энергия в жидкость не поступает, дает уравнение Бернулли: $\rho + (1/2)\rho q^2 = \text{const}$. Обобщенная импульсная теория, изложенная ниже, основана на применении указанных законов сохранения к несущему винту в осевом потоке.

Импульсная теория включает в себя также следующую задачу вариационного исчисления. Необходимо найти величину индуктивной скорости $v(r)$, при которой затраты мощности при заданной силе тяги минимальны. Рассмотрим выражения затрачиваемой мощности и силы тяги через интегралы $P = \int F(r, v) dA$ и $T = \int G(r, v) dA$, взятые по диску несущего винта, где $dA = 2\pi r dr$. Составим функционал $I = P - \lambda T$, где λ — множитель Лагранжа. Функция $v(r)$, минимизирующая P при постоянном T , находится из условия равенства нулю первой вариации функционала I , т. е. из условия

$$\delta I = \delta \int (F - \lambda G) dA = \int (dF/dv - \lambda dG/dv) \delta v dA = 0.$$

Таким образом, оптимальное распределение $v(r)$ получается как решение уравнения Эйлера $\partial/\partial v(F - \lambda G) = 0$. Если

подынтегральные выражения F и G не зависят от r , то уравнение Эйлера принимает вид $f(v) = \text{const}$ и имеет решение $v = \text{const}$.

2.3.1. НЕСУЩИЙ ВИНТ НА РЕЖИМЕ ВИСЕНИЯ ИЛИ ВЕРТИКАЛЬНОГО НАБОРА ВЫСОТЫ

Рассмотрим несущий винт, развивающий силу тяги T на режиме висения или подъема со скоростью V по вертикали (рис. 2.3). Представим винт активным диском, который поддерживает скачок давления, но сохраняет осевую скорость непрерывной. Будем считать поток плавным, а затратами энергии

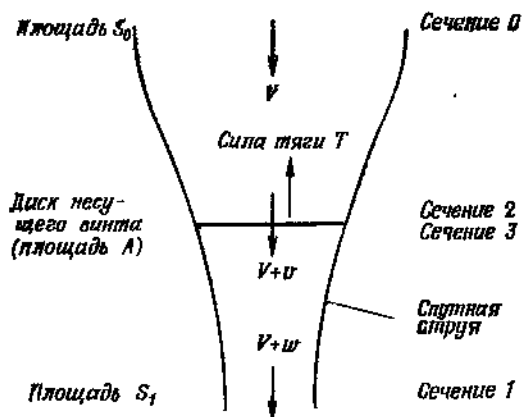


Рис. 2.3. Схема обтекания несущего винта на режимах висения или подъема по вертикали.

на закручивание следа пока пренебрежем. Рассмотрим контрольный объем, ограниченный поверхностью струн, проходящей через диск винта, и ее поперечными сечениями далеко впереди и далеко позади несущего винта. Площадь первого сечения обозначим через S_0 , площадь второго сечения — через S_1 . В сечении 0 давление равно p_0 , скорость равна V . Далеко за винтом, в сечении 1, давление снова будет p_0 , так как закручиванием следа мы пренебрегаем. Из условия сохранения энергии следует, что всюду вне следа в сечении 1 скорость равна V . Из условий сохранения массы и количества движения получаем

$$VS_0 = \int (V + v) dA = \int (V + w) dS_1,$$

$$T = \int \Delta p dA = \int \rho (V + w) w dS_1,$$

где Δp — разность давлений на сторонах диска. Разность давлений на срезах контрольного объема равна $p_0(S_0 - S_1)$; она уравновешивается давлением на поверхность спутной струи. В этом можно убедиться, применяя теорему импульсов к жид-

кости вне спутной струи. Закон сохранения энергии дает

$$P = \int \Delta p (V + v) dA = \int (1/2) \rho (V + w)^2 dS_1 - (1/2) \rho V^2 S_0,$$

или, с учетом сохранения массы,

$$P = \int \Delta p (V + v) dA = \int (1/2) \rho (V + w) (2Vw + w^2) dS_1.$$

Первое выражение представляет работу, которую совершает в единицу времени проходящий через диск воздух, а второе описывает приращение кинетической энергии потока. Заметим, что после вычитания TV из P получается равенство

$$\int \Delta p v dA = \int (1/2) \rho (V + w) w^2 dS_1, \text{ которое можно интерпретировать как } \int v dT = \int (1/2) w dT. \text{ Таким образом, силу тяги несущего винта и потребляемую им мощность можно выразить через индуктивную скорость } w(r) \text{ в дальнем следе, которая в общем случае может быть переменной по сечению следа. Рассмотрим теперь следующую задачу оптимизации: найти функцию } w(r), \text{ которая минимизирует мощность } P = \int (1/2) \rho (V + w) (2Vw + w^2) dS_1 \text{ при заданной величине тяги } T = \int \rho (V + w) w dS_1. \text{ Имеем вариационную задачу с дополнительным условием. Так как подинтегральные выражения в формулах для } P \text{ и } T \text{ не зависят от } r, \text{ решением уравнения Эйлера будет, как показано выше, просто } w = \text{const.}$$

Уравнение Бернулли, написанное для линий тока перед несущим винтом и за ним, дает

$$\begin{aligned} p_0 + \rho V^2/2 &= p_2 + \rho (V + v)^2/2, \\ p_2 + \Delta p + \rho (V + v)^2/2 &= p_0 + \rho (V + w)^2/2, \end{aligned}$$

откуда $\Delta p = (1/2) \rho (2Vw + w^2)$. Так как индуктивная скорость w распределена равномерно, скачок Δp давления также постоянен на диске винта. Однако из условия $p_2 + (1/2) \rho (V + v)^2 = \text{const}$ не следует, что давление и особенно индуктивная скорость на диске винта должны быть распределены равномерно. Таким образом, хотя сделанные в разд. 2.1 предположения о постоянстве Δp и w оправданы, импульсная теория не дает никаких указаний о распределении индуктивной скорости по диску винта. Этот результат аналогичен тому, который получают в плоскости Треффца при исследовании обтекания крыла. Такое исследование показывает, что индуктивное сопротивление минимально при равномерном скосе потока в дальнем следе и эллиптической нагрузке крыла, но ничего не говорит о распределении индуктивных скосов по крылу. Чтобы найти индуктивные скосы на крыле, что требуется для проектирования крыла с оптимальной нагрузкой, нужна теория несущей

линии или несущей поверхности. По теории несущей линии скос потока на крыле вдвое меньше, чем в дальнем следе, так что при проектировании крыла можно непосредственно использовать оптимальное решение. Аналогично при расчете несущего винта часто предполагают, что поток через диск равномерен и что $v = w/2$. Не будучи строго обоснованным, это предположение при осевом обтекании винта обычно соответствует по степени приближенности схеме активного диска.

При равномерных нагрузке Δp и индуктивной скорости w в дальнем следе соотношения, выражающие законы сохранения, принимают вид

$$(V + \bar{v})A = (V + w)S_1, \quad T = \Delta p A = \rho(V + w)wS_1, \\ P = (V + \bar{v})T = (V + w/2)T,$$

где $\bar{v} = \int v dA/A$ — средняя по диску винта индуктивная скорость. Из уравнения баланса энергии следует $\bar{v} = w/2$. Таким образом, хотя распределение v ничем не обусловлено, средняя индуктивная скорость \bar{v} имеет ту же величину, которая была получена раньше при условии постоянной скорости протекания через диск. Если исключить параметры S_1 и w дальнего следа, то для силы тяги и мощности получим выражения

$$T = 2\rho A(V + \bar{v})\bar{v}, \quad P = T(V + \bar{v}).$$

По форме они совпадают с выражениями, полученными в разд. 2.1.3, но здесь фигурирует средняя индуктивная скорость.

Интегральные соотношения, выражающие законы сохранения, обычно заменяют соответствующими дифференциальными:

$$(V + v) dA = (V + w) dS_1, \\ dT = \Delta p dA = \rho(V + w)w dS_1, \\ dP = \Delta p(V + v) dA = (1/2)\rho(V + w)(2Vw + w^2) dS_1.$$

Тогда из уравнения энергии следует $v = w/2$, а после исключения dS_1 и w получаем

$$dT = 2\rho dA(V + v)v, \\ dP = (V + v)dT.$$

Строгого доказательства этих дифференциальных формул импульсной теории нет. Они основаны на допущении, что элементы диска не взаимодействуют. Ключевое предположение состоит в том, что равенство $v = w/2$ справедливо для отдельных линий тока. Это равенство позволяет представить силу тяги и мощность как функции одного аргумента — индуктивной скорости v . Дифференциальные формулы импульсной теории полезны тем, что их можно применять к расчету винтов с неравномерными нагрузкой и скоростью протекания через диск.

2.3.2. ЗАКРУЧИВАНИЕ СЛЕДА

Рассмотрим теперь влияние скоростей закручивания следа, которое обусловлено крутящим моментом, создаваемым несущим винтом. У винта, приводимого во вращение через вал, мощность и крутящий момент связаны соотношением $P = \Omega Q$, где Ω — частота вращения винта. Таким образом, несущий винт должен передавать воздух в следе кинетическую энергию вращения, соответствующую крутящему моменту. Для несущих

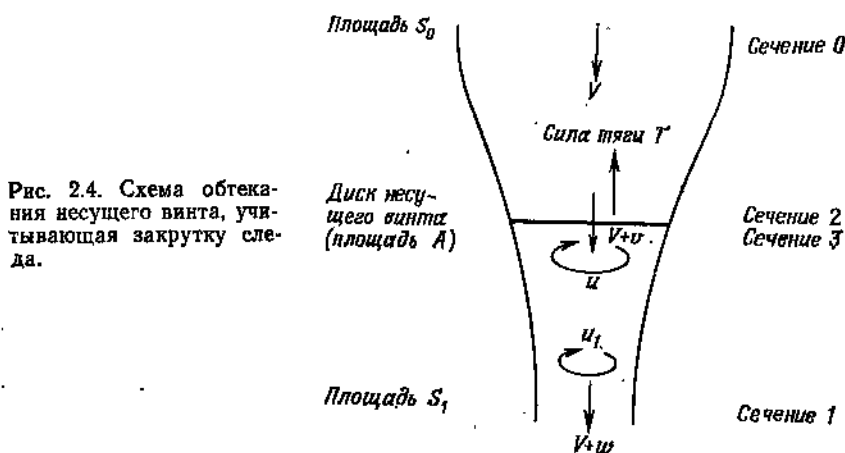


Рис. 2.4. Схема обтекания несущего винта, учитывающая закрутку следа.

винтов вертолетов энергия вращения воздуха мала в сравнении с энергией осевого потока, отбрасываемого винтом вниз. Поэтому мы удовольствуемся приближенным решением. На рис. 2.4 представлена рассматриваемая схема течения. Непосредственно под диском винта окружная скорость равна $u(r)$, а в дальнем следе она равна $u_1(r_1)$. Из условия сохранения момента количества движения воздуха вне спутной струи следует, что над диском окружных скоростей быть не может, т. е. поток остается незакрученным до тех пор, пока не пройдет через диск. Когда воздух в дальнем следе имеет окружные скорости, давление его уже не равно статическому давлению p_0 . Вместо этого имеем $dp_1/dr_1 = \rho u_1^2/r_1$, причем $p_1 = p_0$ на границе спутной струи (r_1 — радиальная координата в сечении 1). Градиент давления создает центробежные силы, которые удерживают вращающийся воздух внутри следа.

Условия сохранения массы, осевого количества движения, момента количества движения и энергии выражаются следую-

щими соотношениями:

$$\begin{aligned} VS_0 &= \int (V + v) dA = \int (V + w) dS_1, \\ T &= \int \Delta p dA = \int \rho (V + w) w dS_1 + \int (p_1 - p_0) dS_1, \\ Q &= \int \rho (V + v) u r dA = \int \rho (V + w) u_1 r_1 dS_1, \\ P &= \int \Delta p (V + v) dA + \int (1/2) \rho u^2 (V + v) dA = \\ &= \int (1/2) \rho (2Vw + w^2 + u_1^2) (V + w) dS_1 + \int (p_1 - p_0) (V + w) dS_1. \end{aligned}$$

Силу тяги, крутящий момент и мощность можно представить в виде функционалов от скоростей w и u_1 в дальнейшем следе с помощью соотношения

$$p_1 - p_0 = - \int_{r_1}^{R_1} (u_1^2 / r_1) dr_1.$$

В результате приходим к вариационной задаче: найти функции w и u_1 , минимизирующие P при заданных значениях T и $Q = P/\Omega$. Однако эта задача сложнее, чем задача об оценке затрат мощности, вызванных закручиванием следа. Чтобы сформулировать более простую задачу оптимизации, используем вытекающее из соотношения $P = \Omega Q$ выражение $P = \int \rho (V + v) u \Omega r dA$. Приравнявая два выражения мощности, имеем

$$\int \Delta p (V + v) dA = \int \rho (V + v) (\Omega r - u/2) u dA.$$

Это соотношение можно интерпретировать как равенство двух различных выражений работы, совершаемой в единицу времени, т. е. $\int (V + v) dT = \int [\Omega - u/(2r)] dQ$. На основе результатов разд. 2.3.1 получаем приближенное равенство $dT = \Delta p dA \approx \rho (V + v) 2v dA$. Тогда силу тяги можно представить формулой $T = \int 2\rho (V + v) v dA$, а соотношение $P = \Omega Q$ в дифференциальной форме принимает простой вид:

$$2(V + v)v = (\Omega r - u/2)u.$$

Итак, вариационная задача импульсной теории несущего винта с учетом закручивания следа формулируется таким образом: минимизировать мощность $P = \int \rho (V + v) u \Omega r dA$ при заданной величине силы тяги $T = \int 2\rho (V + v) v dA$ и условии $P = \Omega Q$, записанном в указанном выше виде. Для этой вари-

ционной задачи имеем уравнение Эйлера

$$\frac{(V+v)\Omega r}{\Omega r - u} + \frac{u\Omega r}{2V+4v} = \text{const},$$

которое вместе с уравнением $2(V+v)v = (\Omega r - u/2)u$ определяет осевую и окружную скорости на диске винта. Отыскивая приближенное решение, положим $V+v = (V+v_0)[1 - u/(2\Omega r)]$, где v_0 — константа. Это соотношение и уравнение $P = \Omega Q$ образуют систему, которую можно решить относительно u и v :

$$\frac{u}{\Omega r} = \frac{2(V+v_0)v_0}{(\Omega r)^2 + (V+v_0)^2}, \quad \frac{v}{v_0} = \frac{(\Omega r)^2}{(\Omega r)^2 + (V+v_0)^2}.$$

Оказывается, что такое решение приближенно удовлетворяет уравнению Эйлера, причем погрешность имеет порядок $v_0/\Omega r$ для вертолетных несущих винтов с малой скоростью протекания через диск. Подставляя выражения u и v , получим формулы силы тяги

$$T = 2\rho(V+v_0)v_0 \int \frac{(\Omega r)^2 [(\Omega r)^2 + (V+v_0)V]}{[(\Omega r)^2 + (V+v_0)^2]^2} dA \approx \\ \approx 2\rho A(V+v_0)v_0 \left[1 + \frac{(V+v_0)(V+2v_0)}{(\Omega R)^2} \ln \left(\frac{V+v_0}{\Omega R} \right)^2 + \frac{(V+v_0)v_0}{(\Omega R)^2} \right]$$

и мощности $P = T(V+v_0)$. Таким образом, индуктивная мощность определена как функция силы тяги винта, зависящая от параметра v_0 . Для режима висения, положив, как обычно, $v_n^2 = T/(2\rho A)$, можно найти константу v_0 :

$$v_0^2 = v_n^2 / \left(1 + C_T \ln \frac{C_T}{2} + \frac{C_T}{2} \right) \approx v_n^2 / \left(1 + C_T \ln \frac{C_T}{2} \right).$$

так что для индуктивной мощности получим формулу

$$P = T \sqrt{T/(2\rho A)} / \sqrt{1 + C_T \ln(C_T/2)}.$$

Вследствие закручивания следа индуктивная скорость и мощность возрастают на $\sim 2\%$, а общая мощность, потребляемая несущим винтом, — на 1% . Так как найденное решение не удовлетворяет точно уравнению Эйлера, оно в действительности не является оптимальным, но оно достаточно для оценки малых потерь, обусловленных закруткой следа.

Окружную скорость в плоскости диска на режиме висения можно вычислять по формуле $u = 2v_n^2 \Omega r / \{(\Omega r)^2 + v_n^2\}$ [при расчете скоростей допустимо использование приближенного равенства $v_0^2 \approx v_n^2 = T/(2\rho A)$]. Максимум $u = v_n$ распределения окружных скоростей находится очень близко к корню лопасти, в сечении $r = v_n/\Omega$. Во внешней части лопасти эти скорости становятся гораздо меньше. Вихревая теория несущего винта (разд. 2.7) показывает, что для равномерно нагруженного винта

завихренность в следе распределена по границе спутной струи и по ее оси, где расположен прямолинейный вихрь с циркуляцией $\gamma = 2\pi T / (\rho A \Omega)$. Это согласуется с тем, что в данном решении $u \approx 2v_n^2 / (\Omega r) = T / (\rho A \Omega r)$ при $r > 0,2$. Осевая индуктивная скорость в плоскости диска на висении, вычисляемая по формуле $v = v_n (\Omega r)^2 / [(\Omega r)^2 + v_n^2]$, значительно отличается от v_n только при $r < 0,2$. На рис. 2.5 приведены полученные по импульсной

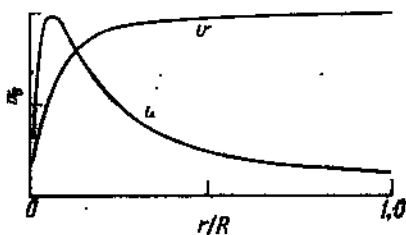


Рис. 2.5. Распределения по радиусу осевой (v) и окружной (u) индуктивных скоростей на режиме висения.

теории графики типичных распределений по радиусу осевой и окружной скоростей на режиме висения. Перепад давлений на диске

$$\Delta p = \frac{dT}{dA} = 2\rho v^2 = 2\rho v_n^2 \frac{(\Omega r)^4}{[(\Omega r)^2 + v_n^2]^2}$$

значительно отличается от равномерного только у корня лопасти. В общем везде,

2.3.3. ЗАКРУТКА СЛЕДА, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ПРОФИЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

В предыдущем разделе найдено распределение окружных скоростей, обусловленное индуктивной составляющей крутящего момента. Но на вращение несущего винта затрачивается также профильная мощность, которая необходима для преодоления сопротивления лопастей, вызванного вязкостью воздуха. Следовательно, крутящий момент должен иметь профильную составляющую, которая сообщает следу добавочную кинетическую энергию. Профильную мощность можно выразить через отношение коэффициента сопротивления к коэффициенту подъемной силы сечения c_d/c_l :

$$P_0 = \int \Omega r dD = \int \Omega r \frac{c_d}{c_l} dT = \int \Omega r \frac{c_d}{c_l} 2\rho (V + v) v dA.$$

Тогда соотношение $P = \Omega Q$ в дифференциальной форме принимает вид

$$2 \frac{c_d}{c_l} v \Omega r + 2(V + v)v = (\Omega r - u/2)u.$$

Рассматривая режим висения, снова положим $v = v_0 [1 - u/(2\Omega r)]$. Профильная составляющая крутящего момента не оказывает заметного влияния на осевую скорость v , и для окружной скорости u получаем формулу

$$u = v_0 \{ 2v_0 \Omega r / [(\Omega r)^2 + v_0^2] + 2c_d/c_l \}$$

Таким образом, профильная составляющая крутящего момента значительно увеличивает окружную скорость во внешней части лопасти, но влияние этой составляющей на осевую скорость v пренебрежимо мало на всем размахе лопасти.

2.4. ТЕОРИЯ ЭЛЕМЕНТА ЛОПАСТИ

В теории элемента лопасти вычисляют силы, которые действуют на лопасть при ее движении в воздухе, а по ним рассчитывают силы и аэродинамические характеристики всего несущего винта. Теория элемента лопасти — это, по существу, теория несущей линии, примененная к вращающемуся крылу. Предполагается, что каждое сечение лопасти работает как профиль в двумерном потоке, а влияние следа и остальной части винта полностью учтено в индуктивном угле атаки сечения. Следовательно, для решения задачи нужно рассчитать индуцируемые следом скорости на диске винта. Это можно сделать с помощью импульсной теории, вихревой теории или численными методами, учитывая неравномерность поля скоростей протекания. Теория несущей линии основана на предположении, что крыло имеет большое удлинение. Удлинение λ лопасти несущего винта связано с коэффициентом заполнения и числом лопастей соотношением $\lambda = R/c = (N/\pi)\sigma$. Для вертолетных несущих винтов с их малой нагрузкой на диск предположение о большом удлинении обычно справедливо. Однако даже при большом геометрическом удлинении могут существовать области, в которых велики градиенты нагрузки или индуктивной скорости, вследствие чего эффективное аэродинамическое удлинение может оказаться малым. Для несущего винта примерами таких областей с большими градиентами являются концевая часть лопасти и то место на ней, вблизи которого проходит вихрь, сбегаящий с предшествующей лопасти.

В аэродинамике вертолета теория элемента лопасти служит основой почти всех исследований, так как в ней учитываются распределения скоростей и нагрузок по размаху лопасти и, следовательно, эта теория связывает аэродинамические и другие характеристики винта с конструктивными параметрами сечений. Импульсная же теория (или любая другая теория, основанная на схеме активного диска) — это обобщенный анализ, который дает полезные результаты, но сам по себе не обеспечивает основы для проектирования несущего винта.

2.4.1. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТА ЛОПАСТИ

Развитие теории винтокрылых аппаратов на ранней стадии шло двумя отдельными путями, которые слились в 1920-х годах. (Термины «импульсная теория» и «теория элемента лопасти» имели тогда смысл, несколько отличный от современного, и в ранних работах означали отдельные и представлявшиеся независимыми методы исследования работы воздушного винта.) Ключевым фактором была идея индуктивного сопротивления, которую гидродинамики в первых десятилетиях XX в. еще разрабатывали и для крыльев, и для вращающихся лопастей. Прежде чем стал возможен достаточно точный расчет нагрузок несущего винта, необходимо было полностью выяснить смысл индуктивного сопротивления, т. е. сопротивления, неизбежного при создании подъемной силы крыла конечного размаха, и связать это сопротивление со скоростями, индуцируемыми на крыле следом.

Истоки теории элемента лопасти можно найти в работе Уильяма Фруда (1878 г.), но первое большое исследование в этом направлении выполнил С. К. Джевецкий в промежутке между 1892 и 1920 гг. Джевецкий полагал, что сечения лопасти работают независимо, но он не знал, как выбрать аэродинамические характеристики сечений. Поэтому он предложил находить характеристики сечений по результатам испытаний серий пропеллеров. Такой подход был типичен для первого этапа разработки и применения теории элемента лопасти. Исследователи принимали в расчет только скорости Ωr и V , обусловленные соответственно вращением лопасти и ее обтеканием вдоль оси вращения, а затем выясняли, каким образом использовать характеристики профилей. В импульсной теории скорость на диске винта равна $V + v$, т. е. вследствие наличия подъемной силы винта она больше скорости невозмущенного потока (точно так же окружная скорость на диске больше Ωr вследствие наличия крутящего момента). Однако Джевецкий полагал, что между осевой скоростью, рассматриваемой в импульсной теории, и скоростью, с которой поток действительно обтекает сечение лопасти, нет связи, поскольку первая — это средняя скорость, тогда как вторая — местная скорость. Как показано выше, строгая импульсная теория на самом деле не дает никаких сведений об индуктивных скоростях на диске винта (фактически импульсная теория имеет дело со скоростями в дальнем следе). Не сумев дать правильный теоретический анализ скоростей на диске винта, Джевецкий рассматривал только составляющие Ωr и V . Когда при таком подходе были использованы характеристики профилей в двумерном потоке, расчетные аэродинамические характеристики винтов значительно разошлись с экспериментальными. Расхождение было приписано выбору характеристик профиля. В то время было уже ясно, что

крайней мере для крыльев, что эффективные аэродинамические характеристики изменяются с удлинением. Поэтому Джебевский предложил в расчетах винта по теории элемента лопасти использовать характеристики крыла конечного размаха (с подходящим удлинением), а все прочие поправки определять по результатам испытаний серии пропеллеров. Такие расчеты качественно согласовались с экспериментом, но количественно расходились с ним.

С 1915 по 1919 г. было сделано несколько попыток использовать приращение осевой скорости, получаемое в импульсной теории, для расчета лопасти по элементам. Однако никто не довел этих попыток до использования характеристик профиля в двумерном потоке, так как все исследователи на той или иной стадии обращались к эксперименту, чтобы установить, как выбирать характеристики сечений. А. Бетц в 1915 г. положил осевую скорость равной $V + v$, как в импульсной теории, и заметил, что требуемое удлинение больше действительного удлинения лопасти. Однако, признавая, что требуемое удлинение стремится к бесконечности, он по-прежнему считал его точное значение зависящим от формы лопасти в плане. Г. де Ботезат в 1918 г. также использовал результат импульсной теории, положив осевую скорость равной $V + v$ (и взяв соответствующую величину окружной скорости на диске), но он принял подход Джебевского и провел испытания серии специальных пропеллеров с целью определения характеристик профилей. Э. Фейдж и Г. Коллинз в 1917 г. использовали в качестве осевой скорости некоторую часть скорости $V + v$, определяемую эмпирически. Характеристики профилей они приняли такими же, как у крыла с удлинением b , поэтому в величину индуктивной скорости нужно было вводить эмпирическую поправку на изменение удлинения. Таким образом, теория элемента лопасти оставалась полуэмпирической как в отношении изменения скорости вследствие интерференции, так и в отношении выбора характеристик профилей.

Правильный учет влияния следа за пропеллером на аэродинамические характеристики сечения лопасти стал возможным после того, как Прандтль создал свою теорию крыла. Эта теория дала ясное понимание роли скорости, индуцируемой следом на крыле. Прандтль, Ланчестер и другие исследователи развили идею о том, что подъемная сила крыла обусловлена присоединенной завихренностью, порождающей в следе свободную завихренность, которая индуцирует скорость на крыле. Разработанная для крыла теория несущей линии включает в себя расчет индуктивной скорости, учитывающий особенности вихревого следа. Поэтому ученые, исследовавшие работу несущего винта, также обратились к рассмотрению вихревого следа за винтом, чтобы найти скорости потока, обтекающего сечение

лопасти. Разработанную в результате теории называют *вихревой*¹⁾. Именно благодаря ей, а не импульсной теории индуктивная скорость была, наконец, правильно учтена в теории элемента лопасти.

В отличие от крыла, свободные вихри которого прямолинейны, след несущего винта или пропеллера образует спиралеобразные вихри. Сложная форма свободных вихрей делает математическую задачу о расчете индуктивных скоростей гораздо более трудной, чем для крыла. Поэтому в вихревой теории, как и в импульсной, часто используют схему активного диска, позволяющую получить аналитические решения.

Общая теория воздушного винта была разработана в начале 1920-х годов на базе вихревой теории и прандтлевской теории крыла. Путем введения в расчет индуктивных скоростей, определяемых вихревой теорией, были найдены аэродинамические параметры потока на диске несущего винта. В качестве характеристик профилей в таких расчетах использовались характеристики крыла бесконечного размаха. В более поздних работах было доказано, что при одинаковой схематизации несущего винта импульсная и вихревая теории действительно дают одинаковые результаты. Поэтому в теорию элемента лопасти теперь обычно вводят индуктивные скорости, получаемые по импульсной теории. Однако на ранней стадии разработки теории несущего винта вихревые концепции Прандтля произвели столь сильное впечатление, что вихревая теория полностью вытеснила импульсную. Последняя не смогла объяснить распределение индуктивных скоростей по диску несущего винта, которое требовалось для завершения разработки теории элемента лопасти. В результате вихревую теорию стали считать более надежной и логичной основой для исследования работы как крыльев, так и лопастей.

2.4.2. ТЕОРИЯ ЭЛЕМЕНТА ЛОПАСТИ ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОЛЕТА

Теория элемента лопасти основана на схеме несущей линии. Кроме того, чтобы найти аналитическое решение, мы будем считать нагрузку на диск малой и пренебрежем возможностью срыва и влиянием сжимаемости воздуха. На рис. 2.6 показаны сечение лопасти, скорости обтекающего его воздуха и действующие на него силы. Сечение установлено под углом θ , отсчитываемым от плоскости вращения до линии нулевой подъемной силы. Скорость воздуха, обтекающего сечение, разложим на составляющие u_T и u_R , соответственно параллельную и перпендикулярную плоскости диска. Тогда величина скорости и

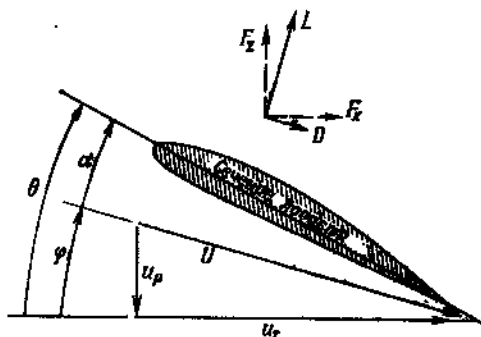
¹⁾ Вихревая теория винта была разработана Н. Е. Жуковским [151] в 1912—1918 гг. — *Прим. перев.*

угол притекания вычисляется по формулам

$$U = \sqrt{u_T^2 + u_p^2}, \quad \varphi = \text{arctg}(u_p/u_T).$$

Истинный угол атаки сечения α равен $\theta - \varphi$. Обтекание сечения воздухом порождает подъемную силу L и силу сопротивления D , первая из которых перпендикулярна, а вторая параллельна скорости. Нормальную к плоскости диска и параллельную ей составляющие суммарной аэродинамической

Рис. 2.6. Обтекание сечения лопасти.



силы обозначим соответственно F_z и F_x . Выразим подъемную силу и сопротивление через коэффициенты:

$$L = (1/2)\rho U^2 c c_l, \quad D = (1/2)\rho U^2 c c_d,$$

где ρ — плотность воздуха, c — длина хорды сечения. Коэффициенты c_l и c_d представляют собой сложные функции угла атаки, числа Маха и других параметров, но здесь мы выразим их в весьма простой форме. Составляющие суммарной аэродинамической силы связаны соотношениями

$$F_z = L \cos \varphi - D \sin \varphi, \quad F_x = L \sin \varphi + D \cos \varphi.$$

Наконец, сила тяги и аэродинамический момент элементов лопасти, а также затрачиваемая ими мощность равны соответственно

$$dT = N F_z dr, \quad dQ = N F_x r dr, \quad dP = \Omega dQ = N F_x \Omega r dr,$$

где N — число лопастей. Силу тяги, аэродинамический момент и мощность несущего винта в целом получают интегрированием этих выражений по размаху лопасти от корня до конца.

Если несущий винт работает на режиме висения или вертикального полета, то нормальная к диску скорость u_p складывается из скорости V набора высоты (на висении $V = 0$) и индуктивной скорости v , а параллельная диску скорость u_T обусловлена только вращением лопасти с угловой скоростью Ω ,

т. е. $u_p = V + v$ и $u_T = \Omega r$. Из предположения о малой нагрузке на диск несущего винта вертолета следует, что коэффициент протекания $\lambda = (V + v)/(\Omega R)$ мал (по импульсной теории типичное значение этого коэффициента на режиме висения составляет 0,05—0,07). Тогда отношение $u_p/u_T = (V + v)/(\Omega r) = \lambda R/r$ тоже мало везде, кроме корневой части лопасти, где мал скоростной напор и нагрузками всегда можно пренебречь. Таким образом, для несущих винтов вертолетов приемлемо предположение о малости углов φ , θ , α , т. е. условие φ , θ , $\alpha \ll 1$. Отсюда следует, что $\varphi \approx u_p/u_T$, $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$ и $U \approx u_T$. Другое предположение состояло в том, что эффектами срыва и сжимаемости можно пренебречь, так что коэффициент подъемной силы является линейной функцией угла атаки, т. е. $c_l = a\alpha$. Здесь a — градиент подъемной силы по углу атаки для профиля в двумерном потоке (с учетом реальных свойств воздуха обычно полагают $a = 5,7$). Тогда формулы сил, действующих в сечении лопасти, принимают вид

$$L \approx (1/2) \rho u_T^2 c_a (\theta - u_p/u_T), \quad D \approx (1/2) \rho u_T^2 c_d,$$

а также

$$dT \approx NLdr, \quad dQ \approx N(L\varphi + D)r dr.$$

Перейдем к безразмерным величинам, используя в качестве масштабов плотность воздуха ρ , частоту вращения Ω несущего винта и его радиус R . В результате получим следующие выражения для коэффициентов силы тяги и мощности произвольного сечения лопасти:

$$\begin{aligned} dC_T &= \frac{\sigma a}{2} (\theta u_T^2 - u_T u_p) dr = \frac{\sigma a}{2} (\theta r^2 - \lambda r) dr, \\ dC_P &= dC_Q = \left[\frac{\sigma a}{2} (\theta u_T u_p - u_p^2) + \frac{\sigma c_d}{2} u_T^2 \right] r dr = \\ &= \left[\frac{\sigma a}{2} (\theta r \lambda - \lambda^2) + \frac{\sigma c_d}{2} r^2 \right] r dr, \end{aligned}$$

где $\lambda = (V + v)/(\Omega R)$ — коэффициент протекания, а $\sigma = Nc/(\pi R)$ — коэффициент заполнения, который для лопастей с переменной хордой зависит от r . В общем случае эти выражения нужно численно проинтегрировать по размаху лопасти. При некоторых дополнительных предположениях (например, равномерная скорость протекания, постоянная хорда и постоянный коэффициент сопротивления) интегрирование можно выполнить аналитически.

2.4.2.1. Сила тяги несущего винта. Теория элемента лопасти дает следующее выражение для коэффициента силы тяги несущего винта:

$$C_T = \int_0^1 \frac{\sigma a}{2} (\theta r^2 - \lambda r) dr.$$

Для лопасти с постоянной хордой и линейной круткой $[\theta = \theta_0 + \theta_{кр}r = \theta_{0,75} + (r - 0,75)\theta_{кр}]$ при условии равномерной скорости протекания ($\lambda = \text{const}$) получим

$$C_T = \frac{\sigma a}{2} \left(\frac{\theta_{0,75}}{3} - \frac{\lambda}{2} \right).$$

где $\theta_{0,75}$ — угол установки сечения на радиусе $r = 0,75 R$.

Если скорость протекания распределена равномерно, хорда постоянна, а крутка определена формулой $\theta = \theta_k/r$, то коэффициент силы тяги равен

$$C_T = \frac{\sigma a}{4} (\theta_k - \lambda)$$

или, так как $\varphi = \lambda/r = \varphi_k/r$,

$$C_T = \frac{\sigma a}{4} (\theta_k - \varphi_k) = \frac{\sigma a}{4} a_k.$$

Здесь индекс «к» означает величину, заданную на конце лопасти. Такая крутка физически неосуществима в корневой части лопасти, но она интересна тем, что обеспечивает, как будет показано, равномерное распределение скоростей протекания, если лопасти имеют постоянную хорду. Эту крутку называют *идеальной*, так как по импульсной теории индуктивная мощность минимальна при равномерном распределении скоростей протекания.

2.4.2.2. Индуктивная скорость. Теория элемента лопасти выражает силу тяги несущего винта через угол установки и коэффициент протекания. Если же нужно представить C_T как функцию только θ , то необходимо найти выражение для индуктивной скорости. Импульсная теория дает следующую формулу для индуктивной скорости на режимах висения или подъема по вертикали:

$$\lambda = \frac{\lambda_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda_c}{2}\right)^2 + \frac{C_T}{2}},$$

где $\lambda_c = V/(\Omega R)$. На висении $\lambda = \sqrt{C_T/2}$, так что в случае лопасти с постоянной хордой и линейной круткой индуктивная скорость равна

$$\lambda = \sqrt{\frac{C_T}{2}} = \frac{\sigma a}{16} \left[\sqrt{1 + \frac{64}{3\sigma a} \theta_{0,75}} - 1 \right],$$

или

$$\theta_{0,75} = \frac{6C_T}{\sigma a} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{C_T}{2}}.$$

Первый член в выражении $\theta_{0,75}$ соответствует среднему углу атаки лопасти, а второй член представляет добавочный угол установки, необходимый для компенсации индуктивного скоса потока на угол φ . Из этих соотношений можно найти либо λ и

C_T при заданном угле общего шага $\theta_{0,75}$, либо λ и $\theta_{0,75}$ при заданной силе тяги.

Для лопасти с постоянной хордой и идеальной круткой импульсная теория дает следующее выражение индуктивной скорости:

$$\lambda = \frac{\sigma a}{16} \left[\sqrt{1 + \frac{32}{\sigma a} \theta_k} - 1 \right],$$

или

$$\theta_k = \frac{4C_T}{\sigma a} + \sqrt{\frac{C_T}{2}}.$$

2.4.2.3. Мощность или аэродинамический крутящий момент. Дифференциал коэффициента мощности можно представить в виде

$$dC_P = \left[\lambda \frac{\sigma a}{2} (\theta r^2 - \lambda r) + \frac{\sigma c_d}{2} r^3 \right] dr = \lambda dC_T + \frac{\sigma c_d}{2} r^3 dr.$$

Следовательно,

$$C_P = \int \lambda dC_T + \int_0^1 \frac{\sigma c_d}{2} r^3 dr.$$

Первый член $C_{P_i} = \int \lambda dC_T$ в этом выражении представляет индуктивную мощность [$dP_i = (V + v)dT$], порождаемую параллельной плоскости диска составляющей подъемной силы. Эта составляющая возникает вследствие индуктивного скоса потока. Второй член выражения C_P представляет профильную мощность, обусловленную действием сил вязкости на поверхности лопасти.

При равномерной скорости протекания индуктивную мощность описывает простая формула $C_{P_i} = \lambda C_T$, которая согласуется с соответствующей формулой импульсной теории. (Заметим, что в случае полета по вертикали λ включает в себя коэффициент $\lambda_c = V/(\Omega R)$ вертикальной скорости, а C_{P_i} учитывает и затраты мощности $P_c = VT$ на набор высоты.) Для режима висения по формуле $\lambda = \sqrt{C_T/2}$ получаем $C_{P_i} = C_T^{3/2}/\sqrt{2}$, т. е. соотношение для идеального винта. У реального несущего винта, имеющего конечное число лопастей с практическими круткой и формой в плане, индуктивная мощность больше той минимальной величины, которую дает импульсная теория. Подлинную величину индуктивной мощности можно рассчитать, используя при вычислении интеграла $\int \lambda dC_T$ действительное распределение индуктивной скорости. Последняя превышает идеальное значение и обычно распределена по диску весьма неравномерно. Другой способ расчета состоит в использовании выражения для индуктивной скорости, которое дает импульсная теория, но с эмпирическим коэффициентом, учитывающим дополнительные затраты

мощности реальным несущим винтом:

$$C_{P_i} = k \lambda_n C_T = k C_T^{3/2} \sqrt{2}.$$

Как правило, полагают $k = 1,15$ (см. разд. 3.1.3).

Для лопасти с постоянной хордой получим, считая, что $c_d = c_{d_0} = \text{const}$, следующую приближенную формулу коэффициента мощности:

$$C_{P_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8}.$$

Для точного расчета профильной мощности следует учесть зависимость коэффициента профильного сопротивления от угла атаки и числа Маха (что, вероятно, потребует численного интегрирования). Рассмотрим параболическую зависимость профильного сопротивления от угла атаки: $c_d = \delta_0 + \delta_1 \alpha + \delta_2 \alpha^2$. При надлежащем выборе констант δ_0 , δ_1 и δ_2 эта зависимость хорошо аппроксимирует изменение сопротивления с изменением подъемной силы на докритических углах атаки. (Этой формулой пользовался Бейли [В.4], и его численный пример $c_d = 0,0087 - 0,0216\alpha + 0,4\alpha^2$ часто фигурирует в расчетах вертолетов. Более подробно об этом сказано в разд. 7.8.) При указанной зависимости формула коэффициента профильной мощности принимает вид

$$C_{P_0} = \int_0^1 \frac{\sigma}{2} \left[\delta_0 + \delta_1 \left(\theta - \frac{\lambda}{r} \right) + \delta_2 \left(\theta - \frac{\lambda}{r} \right)^2 \right] r^2 dr.$$

Если хорда лопасти постоянна, крутка идеальная, а скорости протекания распределены равномерно, то интегрирование выполняется аналитически и дает

$$\begin{aligned} C_{P_0} &= \frac{\sigma \delta_0}{8} + \frac{\sigma \delta_1}{6} (\theta_k - \lambda) + \frac{\sigma \delta_2}{4} (\theta_k - \lambda)^2 = \\ &= \frac{\sigma \delta_0}{8} + \frac{2 \delta_1}{3 \alpha} C_T + \frac{4 \delta_2}{\sigma \alpha^2} C_T^2, \end{aligned}$$

так как $\theta_k - \lambda = 4C_T/(\sigma \alpha)$. Для лопасти с постоянной хордой и линейной круткой при равномерном протекании аналогичным образом найдем

$$\begin{aligned} C_{P_0} &= \frac{\sigma \delta_0}{8} + \frac{\sigma \delta_1}{8} \left(\theta_{0,75} + \frac{\theta_{кр}}{20} - \frac{4}{3} \lambda \right) + \\ &+ \frac{\sigma \delta_2}{8} \left(\theta_{0,75}^2 + \frac{1}{10} \theta_{0,75} \theta_{кр} + \frac{7}{240} \theta_{кр}^2 + 2\lambda^2 - \frac{8}{3} \theta_{0,75} \lambda \right). \end{aligned}$$

Простейшая формула для коэффициента суммарной мощности, затрачиваемой реальным несущим винтом на режиме висения, имеет вид

$$C_P = \frac{k}{\sqrt{2}} C_T^{3/2} + \frac{\sigma c_{d_0}}{8}.$$

Эта формула описывает основные закономерности изменения аэродинамических характеристик винта на висении и имеет приемлемую точность, если при расчете индуктивной мощности взять подходящую величину коэффициента k , а при расчете профильной мощности — подходящую величину среднего коэффициента сопротивления c_{d_0} . График зависимости коэффициента мощности от коэффициента силы тяги (или зависимости C_P/σ от C_T/σ) называют *полярой несущего винта*. Поляра идеального винта (профильная мощность равна нулю, индуктивная мощность минимальна, и, следовательно, коэффициент совершенства M равен 1) задается уравнением $C_P = C_T^{3/2}/\sqrt{2}$. Реальная поляра расположена выше идеальной из-за наличия профильных потерь и поднимается с увеличением C_T быстрее вследствие того, что индуктивные затраты больше. Примеры поляр несущего винта на висении приведены в разд. 2.6.9. Указанной выше формуле коэффициента мощности соответствует следующее выражение коэффициента совершенства:

$$M = \frac{(C_P)_{ид}}{C_{P_i} + C_{P_0}} = \frac{C_T^{3/2}}{kC_T^{3/2} + (\sqrt{2}/8)\sigma c_{d_0}}$$

Даже это простое выражение позволяет сделать некоторые выводы о компоновке лопасти. Напомним, что сравнение несущих винтов по их коэффициентам совершенства следует проводить при одинаковой нагрузке на диск. Тогда при заданной величине C_T для достижения больших значений M требуется малая величина σc_{d_0} . Однако если коэффициент заполнения винта слишком мал, то для создания необходимой силы тяги потребуются большие углы атаки, при которых профильное сопротивление велико. Таким образом, коэффициент заполнения (хорда лопасти) несущего винта должен быть настолько мал, насколько это совместимо с достаточным запасом по срыву. Распределение нагрузки лопасти (т. е. кривая лопасти и ее форма в плане) влияет и на индуктивную, и на профильную мощность, но для исследования этого влияния нужен более обстоятельный расчет.

2.5. ЭЛЕМЕНТНО-ИМПУЛЬСНАЯ ТЕОРИЯ

В предыдущем разделе для расчета аэродинамических характеристик была использована величина индуктивной скорости, определяемая импульсной теорией, т. е. величина скорости, равномерно распределенной по диску несущего винта. Неравномерное распределение скоростей протекания можно найти, рассматривая выражения импульсной теории для режимов висения и вертикального полета в дифференциальной форме. Такое рассмотрение называют *элементно-импульсной теорией*. В теории

элемента лопасти было получено следующее выражение силы тяги (для N -лопастного винта), которую создает кольцевой элемент диска радиуса r и ширины dr :

$$dC_T = \frac{\sigma a}{2} (\theta - \lambda/r) r^2 dr.$$

В разд. 2.3.1 на основе импульсной теории найдено дифференциальное выражение для силы тяги $dT = 2\rho(V + v)vdA$, или

$$dC_T = 4\lambda\lambda_i r dr,$$

где $\lambda_i = v/(\Omega R)$ — индуктивный коэффициент протекания, $\lambda_c = V/(\Omega R)$ — коэффициент скорости и $\lambda = \lambda_i + \lambda_c$. Использование выражений импульсной теории в дифференциальной форме означает, по существу, что индуктивная скорость на радиусе r предполагается обусловленной только силой тяги dT на этом радиусе. Приравнявая выражения dC_T , которые дают импульсная теория и теория элемента лопасти, получим уравнение

$$\lambda^2 + \left(\frac{\sigma a}{8} - \lambda_c\right)\lambda - \frac{\sigma a}{8}\theta r = 0.$$

Решением этого уравнения будет

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\sigma a}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right)^2 + \frac{\sigma a}{8}\theta r} - \left(\frac{\sigma a}{16} - \frac{\lambda_c}{2}\right).$$

На висении ($\lambda_c = 0$) индуктивная скорость равна

$$\lambda = \frac{\sigma a}{16} \left(\sqrt{1 + \frac{32}{\sigma a}\theta r} - 1 \right).$$

Это и есть искомая формула, описывающая неравномерное распределение скоростей протекания (ср. с формулой для равномерного распределения, выведенной в разд. 2.4.2.2). Если заданы угол установки лопасти, ее крутка и распределение хорд, то можно рассчитать скорость протекания как функцию r , а затем найти силу тяги и мощность несущего винта. Хотя рассчитанные таким образом аэродинамические характеристики винта лучше согласуются с экспериментальными данными, чем полученные в предположении о равномерности скоростей протекания, элементно-импульсная теория все же дает лишь приближенные результаты. Для дальнейшего уточнения расчета скоростей протекания нужно детально рассмотреть структуру вихревого следа за несущим винтом.

Из приведенных выше формул видно, что для лопастей с постоянной хордой равномерное распределение скоростей протекания получается при $\theta r = \text{const}$, т. е. при идеальной крутке $\theta = \theta_k/r$. Вследствие равномерности скоростей протекания несущий винт с идеальной круткой лопастей имеет также равномерно распределенную нагрузку и минимально возможную индуктивную мощность.

2.6. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ВИСЕНИИ

В теории элемента лопасти получены следующие общие формулы для расчета коэффициентов силы тяги и мощности несущего винта на висении:

$$C_T = \int_0^1 \frac{\sigma}{2} r^2 c_i dr, \quad C_P = \int \lambda dC_T + \int_0^1 \frac{\sigma}{2} r^3 c_d dr,$$

где коэффициенты подъемной силы и сопротивления сечения являются функциями угла атаки $\alpha = \theta - \lambda/r$ и числа Маха $M = M_\infty r$. В общем случае длина хорды и угол установки зависят от радиуса r . Наиболее часто встречаются лопасти с постоянной хордой и линейной круткой, когда $\sigma = \text{const}$, $\theta = \theta_0 + \theta_{кр} r$. Если действительные характеристики профилей неизвестны, то можно использовать простые формулы $c_i = a\alpha$ и $c_d = \text{const}$. По элементно-импульсной теории распределение скоростей протекания будет следующим:

$$\lambda = \frac{\sigma a}{18} \left[\sqrt{1 + \frac{32}{\sigma a} \theta r} - 1 \right].$$

Можно также считать распределение скоростей протекания равномерным, введя эмпирический коэффициент, т. е. положив $\lambda = k \sqrt{C_T/2}$. В общем случае нужно численно проинтегрировать нагрузки лопасти от ее корня к концу. При численном интегрировании нетрудно принять в расчет срыв и сжимаемость воздуха, используя соответствующие характеристики профилей. Погрешности в аэродинамических характеристиках несущего винта, рассчитанных по указанным формулам, возникают главным образом из-за того, что не учтена трехмерность обтекания конца лопасти, а индуктивная скорость определена по элементно-импульсной теории.

Для последующих ссылок отметим, что используемые в элементно-импульсной теории коэффициенты силы тяги и индуктивной мощности можно представить через индуктивную скорость в виде $dC_T = 4\lambda^2 r dr$ и $dC_P = 4\lambda^3 r dr$.

2.6.1. КОНЦЕВЫЕ ПОТЕРИ

Применение теории несущей линии не вполне оправдано вблизи концов крыла. Если в концевом сечении лопасти хорда конечна, то теория элемента лопасти дает ненулевую подъемную силу при любой форме законцовки. Однако в действительности нагрузка лопасти на конце уменьшается до нуля, причем спад происходит довольно быстро (рис. 2.7). Это обусловлено трехмерностью обтекания концевой части лопасти. Так как скорост-

ной напор пропорционален r^2 , нагрузка лопасти резко возрастает вблизи ее конца и спад нагрузки будет даже сильнее, чем у крыла. Потери подъемной силы в концевой части — важный фактор, который следует учитывать в расчетах аэродинамических характеристик несущего винта. Если этими потерями пренебречь, то сила тяги винта при заданной величине мощности или общего шага будет значительно завышена.

Точное исследование нагрузок концевой части лопасти возможно лишь в рамках теории несущей поверхности, поэтому здесь мы рассмотрим приближенный способ учета концевых потерь, основанный на рассмотрении вихревого следа. В схеме активного диска вполне приемлема ненулевая нагрузка на всем диске, включая его край (см. разд. 2.7). Поэтому концевые потери можно считать следствием того, что число

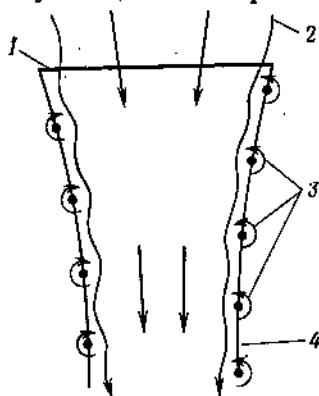


Рис. 2.8. Влияние дискретных вихрей следа на поток через диск. 1 — диск несущего винта; 2 — границная линия тока реального следа; 3 — дискретные концевые вихри; 4 — условная граница следа.

Метод приближенного расчета концевых потерь основан на предположении, что сечения лопасти на радиусах $r > BR$ вызывают профильное сопротивление, но не создают подъемной силы. Параметр B называется коэффициентом концевых потерь. Существует несколько способов расчета значения B . Прандтль

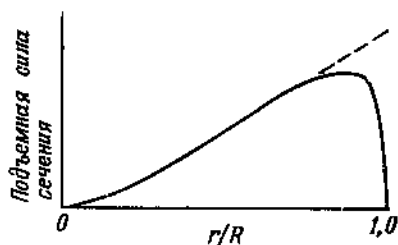


Рис. 2.7. График распределения нагрузки по лопасти, иллюстрирующий потери подъемной силы в концевой части.

— — — теория элемента лопасти; — — — действительная нагрузка.

лопастей конечно. Распределение нагрузки по отдельным лопастям, а не по диску вводит в расчет пространственные эффекты. На рис. 2.8 показана схема влияния дискретных вихрей следа на течение воздуха. Когда число лопастей конечно, ограниченная дискретными вихрями спутная струя сжимается сильнее, чем условная граница следа в теории активного диска. В связи с этим концевые потери можно связать с меньшей эффективной площадью сечения следа или соответственно большей эффективной нагрузкой на диск, которая вызывает повышенные затраты мощности на индукцию.

получил выражение для B , исходя из двумерной схемы вихревого следа за несущим винтом. Для винта с малыми скоростями протекания это выражение имеет вид $B = 1 - \sqrt{2C_T}/N$, где N — число лопастей. (Концевые потери зависят от расстояния между вихревыми пеленами, которое пропорционально λ/N . Это будет показано ниже, в разд. 2.7.3.2.) Зиссинг [S. 120] предложил использовать формулу Прандтля для несущих винтов, для которых она дает типичные значения B от 0,96 до 0,98. Уитли [W.51] предложил формулу $B = 1 - c(1)/2R$, где $c(1)$ — концевая хорда, т. е. он принял, что концевая часть лопасти, ширина которой равна половине длины концевой хорды, не создает подъемной силы. Сходную формулу предложил и Зиссинг [S. 119]: $B = 1 - 2c(0,7)/3R$. Часто коэффициент концевых потерь просто полагают равным 0,97, получая, как правило, хорошее согласие с экспериментальными данными.

Если при расчете силы тяги несущего винта учитывать концевые потери, то по теории элемента лопасти получим

$$C_T = \int_0^B \frac{\sigma}{2} r^2 c_i dr = \int_0^B \frac{\sigma a}{2} (\theta r^2 - \lambda r) dr.$$

При постоянной хорде лопастей с линейной круткой и равномерном распределении скорости протекания отсюда находим

$$C_T = \frac{\sigma a}{2} \left(\theta_0 \frac{B^3}{3} + \theta_{кр} \frac{B^4}{4} - \lambda \frac{B^2}{2} \right),$$

а для лопастей с идеальной круткой имеем

$$C_T = \frac{\sigma a}{4} B^2 (\theta_k - \lambda).$$

Концевые потери уменьшают силу тяги несущего винта при заданной величине общего шага на 6—9%. Концевые потери влияют и на потребляемую мощность, так как при этом увеличивается индуктивная скорость. Эффективная площадь диска несущего винта сокращается в отношении $B^2:1$, а индуктивная скорость, которая пропорциональна корню квадратному из нагрузки на диск, возрастает в отношении $1:B$ по сравнению с результатом импульсной теории. Следовательно, коэффициент индуктивной мощности равен

$$C_{P_i} = \frac{\lambda_B}{B} C_T = \frac{1}{B} C_T^{3/2} / \sqrt{2}.$$

Отсюда видно, что вследствие концевых потерь индуктивная мощность возрастает приблизительно на 3% ($k = 1/B \approx 1,03$). Другие факторы, особенно неравномерность скорости протекания, также увеличивают индуктивную скорость.

Существуют и более точные методы расчета аэродинамических характеристик несущего винта с учетом концевых потерь. К ним относятся лопастная вихревая теория (разд. 2.7.3) и теория вращающейся несущей поверхности. Однако эти методы очень сложны и в некоторых случаях не дают существенно более точных результатов, чем простые формулы. Коэффициент концевых потерь дает, конечно, грубую оценку, но благодаря своей простоте и приемлемой погрешности она нашла широкое применение.

2.6.2. ИНДУКТИВНАЯ МОЩНОСТЬ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ НЕРАВНОМЕРНОСТЬЮ СКОРОСТИ ПРОТЕКАНИЯ И КОНЦЕВЫМИ ПОТЕРЯМИ

В разд. 2.4.2.3 было получено выражение для коэффициента индуктивной мощности на режиме висения в виде $C_{P_i} = kC_T^{3/2}/\sqrt{2}$ где k — эмпирический коэффициент, учитывающий дополнительные затраты мощности на реальном винте. Затраты мощности, обусловленные неравномерностью скорости протекания и концевыми потерями, можно оценить по формулам импульсной теории:

$$C_{P_i} = \int_0^B 4\lambda^3 r dr, \quad C_T = \int_0^B 4\lambda^2 r dr.$$

При равномерной скорости протекания эти формулы дают $C_{P_i} = 2\lambda^3 B^2$ и $C_T = 2\lambda^2 B^2$ или $C_{P_i} = B^{-1}C_T^{3/2}/\sqrt{2}$. Следовательно, если учитывать только концевые потери, то $k = B^{-1} \approx 1,03$, как было получено в предыдущем разделе.

Рассматривая линейное распределение скорости протекания $\lambda = \lambda_{\kappa} r$, получим $C_{P_i} = (4/5)B^5\lambda_{\kappa}^3$ и $C_T = B^4\lambda_{\kappa}^2$, или $C_{P_i} = (4/5)B^{-1}C_T^{3/2}$. Следовательно, $k = 4\sqrt{2}/5B = 1,13/B \approx 1,17$. Другие простые распределения скорости протекания дают сходные результаты. Таким образом, следует ожидать, что на режиме висения индуктивная мощность увеличивается на 8—12% вследствие неравномерности скорости протекания и на 2—4% вследствие концевых потерь. Именно такая величина k получена при обработке экспериментальных аэродинамических характеристик несущего винта (см. разд. 3.1.3).

2.6.3. НЕОПЕРЕННАЯ ЧАСТЬ ЛОПАСТИ

Аэродинамические характеристики несущего винта ухудшаются также из-за того, что часть лопасти не оперена. Несущая часть лопасти («перо») начинается на радиусе $r = r_0$, причем типичные значения r_0 составляют от 10 до 30% радиуса винта. Ту часть лопасти, для которой $r < r_0$, называют *неоперенной*

частью. Ее принимают в расчет вместе с рукавом втулки, ГШ и ВШ, корпусом ОШ и конлем лопасти. Так как с аэродинамической точки зрения неоперенная часть представляет собой область, для которой велик коэффициент сопротивления и мала сила тяги, в теории элемента лопасти при расчете силы тяги интегрирование следует вести от $r = r_0$ до $r = B$, т. е. $C_T = \int_{r_0}^B dC_T$.

Однако в неоперенной части величины скоростного напора малы, так что поправка в силе тяги оказывается незначительной.

На режиме висения наличие неоперенной части уменьшает эффективную площадь диска несущего винта и, следовательно, увеличивает индуктивную скорость и нагрузку на диск. Если учитывать и неоперенную часть, и концевые потери, то поправочный коэффициент в формуле индуктивной мощности можно выразить через эффективную площадь диска:

$$k = \sqrt{\frac{A}{A_{\text{эфф}}}} = (B^2 - r_0^2)^{-1/2}.$$

При обычных величинах r_0 влияние неоперенной части на индуктивную мощность мало по сравнению с влиянием концевых потерь.

2.6.4. СРЕДНИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ ЛОПАСТИ

Важной аэродинамической характеристикой режима работы несущего винта является средний коэффициент подъемной силы лопасти \bar{c}_l . Он определяется из условия, что несущий винт имеет коэффициент силы тяги $C_T = \int (1/2) \sigma r^2 c_l dr$, когда все сечения лопастей работают при $c_l = \bar{c}_l$. Отсюда

$$C_T = \int_0^l (1/2) \sigma r^2 \bar{c}_l dr = (1/2) \bar{c}_l \int_0^l \sigma r^2 dr = \frac{1}{6} \sigma \bar{c}_l,$$

так что $\bar{c}_l = 6C_T/\sigma$. Таким образом, отношение коэффициента силы тяги к коэффициенту заполнения C_T/σ является мерой коэффициента подъемной силы лопасти. Соответственно отношение $6C_T/(\sigma a)$ можно интерпретировать как средний угол атаки лопастей. Заметим, что

$$\frac{C_T}{\sigma} = \frac{T/[\rho A_{\text{винт}} (\Omega R)^2]}{A_d/A_{\text{винт}}} = T/[\rho A_d (\Omega R)^2]$$

есть безразмерная нагрузка на лопасть, тогда как C_T — безразмерная нагрузка на диск. Параметр C_T/σ играет важную роль в аэродинамике несущего винта, так как от него зависят многие характеристики винта и вертолета в целом. Коэффициент совер-

шенства, если использовать простые выражения для мощностей из разд. 2.4.2.3, можно записать в виде

$$M = \frac{\lambda_b C_T}{k \lambda_b C_T + \sigma c_{dd} \delta} = \frac{1}{k + (3/4) [(c_{dd} \bar{v}_i) / \lambda_b]}.$$

Отсюда следует, что для получения высокого коэффициента совершенства требуется большая величина отношения подъемной силы сечения к его сопротивлению.

2.6.5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ЗАПОЛНЕНИЯ

В выражениях для аэродинамических характеристик несущего винта на режиме висения удобно объединить хорду лопасти и число лопастей в один параметр — местный коэффициент заполнения $\sigma = Nc / (\pi R)$. Если хорда не постоянна, то σ изменяется по размаху лопасти. Тогда для всего винта коэффициент заполнения определяется выражением

$$\sigma = \frac{A_{л}}{A_{\text{винт}}} = \int_0^1 \sigma dr.$$

Когда хорда постоянна, местный коэффициент заполнения и коэффициент заполнения винта совпадают. При сравнении аэродинамических характеристик двух несущих винтов с лопастями различной формы в плане желательно использовать эквивалентный коэффициент заполнения, который учитывает основное влияние изменения хорды.

Несущие винты с трапециевидными лопастями принято сравнивать с работающим при том коэффициенте силы тяги винтом, который имеет прямоугольные лопасти и эквивалентный коэффициент заполнения $\sigma_{\text{экв}}$. Последний определяют условием $C_T = \int (1/2) \sigma r^2 c_l dr = (1/2) \sigma_{\text{экв}} \int r^2 c_l dr$ или (предполагая постоянство коэффициента подъемной силы) условием

$$\sigma_{\text{экв}} = 3 \int_0^1 \sigma r^2 dr.$$

Если несущие винты сравниваются при одинаковой мощности или аэродинамическом моменте, то эквивалентный коэффициент заполнения определяют аналогичным условием:

$$\sigma_{\text{экв}} = 4 \int_0^1 \sigma r^3 dr.$$

Для трапецевидных лопастей ($\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 r$) эквивалентный коэффициент заполнения равен

$$\sigma_{\text{эка}} = \begin{cases} \sigma(0,75) & \text{— эквивалентность по силе тяги,} \\ \sigma(0,80) & \text{— эквивалентность по мощности.} \end{cases}$$

Эквивалентный по силе тяги (с весовой функцией r^2) коэффициент заполнения обычно используют для сравнения требуемых мощностей винтов при заданной силе тяги.

2.6.6. ИДЕАЛЬНЫЙ НЕСУЩИЙ ВИНТ

Рассмотрим несущий винт, имеющий лопасти с постоянной хордой и идеальной круткой $\theta = \theta_k/r$. В разд. 2.5 было показано, что такая крутка обеспечивает равномерное распределение скорости протекания по диску винта и, следовательно, соответствует минимальной индуктивной мощности. При идеальной крутке распределение нагрузки лопасти по размаху будет линейным:

$$dC_T = \frac{\sigma a}{2} a r^2 dr = \frac{\sigma a}{2} (\theta_k - \lambda) r dr.$$

Соответствующие распределения циркуляции присоединенного вихря и нагрузки на диск описываются выражениями

$$\frac{N}{\pi} \Gamma = \frac{1}{r} \frac{dC_T}{dr} = \frac{\sigma a}{2} (\theta_k - \lambda),$$

$$\frac{dT}{dA} = \frac{\pi dC_T}{2\pi r dr} = \frac{\sigma a}{4} (\theta_k - \lambda).$$

Таким образом, идеальная крутка создает постоянную циркуляцию присоединенного вихря и равномерную нагрузку на диск — именно ту нагрузку, которая по импульсной теории нужна для равномерного распределения индуктивной скорости.

По формулам разд. 2.4.2 получаются следующие выражения для аэродинамических характеристик идеального несущего винта (постоянная хорда, идеальная крутка, равномерная скорость протекания):

$$C_T = \frac{\sigma a B^2}{4} (\theta_k - \lambda) = \frac{\sigma a B^2}{4} \alpha_k,$$

$$C_P = \lambda C_T + \frac{\sigma}{8} \left(\delta_0 + \frac{4}{3} \delta_1 \alpha_k + 2\delta_2 \alpha_k + 2\delta_3 \alpha_k^2 \right).$$

В соответствии с импульсной теорией на висении индуктивная скорость определяется выражением $\lambda = \sqrt{C_T/(2B^2)}$, а угол установки θ_k равен $\alpha_k + \lambda$. Местный угол атаки и коэффициент подъемной силы сечения равны соответственно

$$\alpha = \frac{\alpha_k}{r} = \frac{4C_T}{\sigma a B^2} \frac{1}{r}, \quad c_l = a\alpha = \frac{4C_T}{\sigma B^2} \frac{1}{r}.$$

На самом деле коэффициент подъемной силы сечения в корневой части лопасти ограничен возникновением срыва. Кроме того, корневой части на практике нельзя придать идеальную крутку. Однако в любом случае внутренние сечения лопасти не оказывают значительного влияния на аэродинамические характеристики несущего винта. Практическое затруднение состоит в том, что для каждого режима работы винта требуется своя крутка: из формулы $\alpha = (\theta_k - \lambda) / r$ следует равенство

$$\theta_k = \alpha_k + \lambda = \frac{4C_T}{\sigma a B^2} + \frac{1}{B} \sqrt{\frac{C_T}{2}}$$

(см. разд. 2.4.2.1). Идеальный несущий винт нельзя реализовать в практической конструкции, но его рассмотрение полезно тем, что показывает, какую крутку нужно придать лопастям для получения наилучших аэродинамических характеристик винта на режиме висения.

2.6.7. ОПТИМАЛЬНЫЙ НЕСУЩИЙ ВИНТ ДЛЯ ВИСЕНИЯ

Геометрические характеристики идеального несущего винта выбираются так, чтобы индуктивная мощность была минимальной. Однако углы атаки сечений этого винта определяются соотношением $\alpha = \alpha_k / r$, так что только одно сечение работает при оптимальной величине отношения подъемной силы к сопротивлению. В результате профильная мощность идеального несущего винта не будет минимальной. Рассмотрим теперь несущий винт, оптимизированный и по индуктивной, и по профильной мощностям. Для минимума индуктивной мощности скорость протекания должна быть распределена равномерно. Профильная же мощность будет минимальна при условии, что каждое сечение лопасти работает под оптимальным углом атаки $\alpha_{\text{опт}}$, при котором достигается оптимальная величина отношения c_l / c_d . Эти два критерия определяют крутку и сужение лопастей оптимального несущего винта, имеющего наилучшие аэродинамические характеристики на режиме висения.

По элементарно-импульсной теории

$$dC_T = \frac{\sigma a}{2} \alpha_{\text{опт}}^2 r^2 dr = 4\lambda^2 r dr,$$

или

$$\lambda^3 = \frac{\sigma a}{8} r \alpha_{\text{опт}}.$$

Предполагая, что все сечения имеют одну и ту же величину $\alpha_{\text{опт}}$, получим условие равномерности скорости протекания в виде $\sigma r = \text{const}$. Следовательно, лопасти должны иметь сужение, определяемое формулой $\sigma = \sigma_k / r$ ($c = c_k / r$). Тогда требуемая

крутка лопастей задается выражением

$$\theta = \alpha_{\text{опт}} + \lambda/r = \alpha_{\text{опт}} + \sqrt{\frac{\sigma_{\text{к}} a \alpha_{\text{опт}}}{8}} \frac{1}{r}.$$

Коэффициент силы тяги винта равен

$$C_T = \int_0^B (1/2) \sigma r^2 a \alpha_{\text{опт}} dr = \frac{\sigma_{\text{к}} a B^2}{4} \alpha_{\text{опт}},$$

а коэффициент профильной мощности

$$C_{P_0} = \int_0^1 (1/2) \sigma r^3 c_{d_0} dr = \frac{\sigma_{\text{к}} c_{d_0}}{2} \int_0^1 r^2 dr = \frac{\sigma_{\text{к}} c_{d_0}}{6}.$$

так как у оптимального несущего винта коэффициент сопротивления постоянен по размаху лопасти. Следовательно, коэффициент полной мощности определяется формулой

$$C_P = \frac{C_T^{3/2}}{B\sqrt{2}} + \frac{\sigma_{\text{к}} c_{d_0}}{6}.$$

Таким образом, сужение и крутка оптимального несущего винта при заданном профиле лопастей (который определяет $\alpha_{\text{опт}}$) будут:

$$\sigma = \frac{4C_T}{B^2 a \alpha_{\text{опт}}} \frac{1}{r}, \quad \theta = \alpha_{\text{опт}} + \sqrt{C_T/(2B^2)} \frac{1}{r}.$$

Как и у идеального несущего винта, геометрические характеристики оптимального винта зависят от режима работы. Кроме того, распределение хорд и крутка имеют особенности вблизи корня лопасти. Однако рассмотрение оптимального несущего винта полезно тем, что обнаруживает предельное улучшение аэродинамических характеристик, которое может быть достигнуто выбором крутки и сужения, и показывает конструктору направления совершенствования реального несущего винта. Общий вывод состоит в том, что в направлении от корня лопасти к ее концу угол установки должен убывать (т. е. требуется отрицательная закрутка), а лопасть — суживаться. Правда, выигрыш в аэродинамических характеристиках, достигаемый в результате сужения лопасти, часто не оправдывает дополнительных расходов на изготовление таких лопастей. Раньше обычно конструировали лопасти с линейной круткой и постоянной хордой и лишь изредка — трапециевидные. При современных материалах и технологии производства делают лопасти с нелинейной круткой и переменной хордой. Анализ оптимального винта показывает, что конструкция реального несущего винта обязательно будет результатом компромисса,

так как постоянное распределение хорд и крутка не могут быть оптимальными на всех режимах полета.

Эквивалентный по силе тяги коэффициент заполнения оптимального несущего винта равен $\sigma_{\text{эвк}} = 3 \int \sigma r^2 dr = (3/2) \sigma_{\text{к}}$, так что коэффициент профильной мощности выражается формулой $C_{P_0} = \sigma_{\text{эвк}} c_{d_0} / 9$. Сравнивая эту величину с коэффициентом профильной мощности $C_{P_0} = \sigma c_{d_0} / 8$ винта с прямоугольными лопастями, видим, что у оптимального винта профильная мощность по крайней мере на 11% меньше. (В действительности различие будет даже сильнее, так как у винта с лопастями постоянной хорды средней коэффициент сопротивления больше.) При этом формула для коэффициента совершенства принимает вид

$$M = \frac{C_T^{3/2}}{C_T^{3/2}/B + (\sqrt{2}/9) \sigma_{\text{эвк}} c_{d_0}} = \frac{1}{1/B + 2c_{d_0}/(3\lambda_{\text{в}} c_i)}$$

2.6.8. ВЛИЯНИЕ КРУТКИ И СУЖЕНИЯ

При заданных силе тяги, радиусе и концевой скорости несущего винта индуктивная и профильная мощности могут быть минимизированы соответствующим выбором крутки и сужения. На внешней части лопасти, где нагрузки самые большие, оптимальные распределения длин хорд и углов установки можно хорошо аппроксимировать линейными функциями. В самом деле, с лопастями, линейно закрученными на углы от -8 до 12° , получается почти весь тот выигрыш (по сравнению с незакрученными лопастями), который дают лопасти с идеальной круткой. Лопасты с линейной круткой просты в производстве, так что значительное улучшение аэродинамических характеристик достигается за счет лишь небольшого увеличения стоимости производства. Сужение также улучшает аэродинамические характеристики, но вследствие высокой стоимости производства оправдывается только для очень больших несущих винтов. В приведенной ниже таблице, составленной по данным Гессоу

Крутка. °	Сужение	Уменьшение мощности при $C_T/\sigma = 0,07$, %
0	1	—
-8	1	2,5
-12	1	4,0
0	3	2,0
-8	3	5,5
-12	3	5,5
Идеальная	1	5,5

[G.50], указано процентное уменьшение потребной мощности при различных комбинациях крутки и сужения по сравнению с мощностью при незакрученных лопастях с постоянной хордой. Более полные сведения о влиянии крутки и сужения можно найти в работах [G.50] и [G.66].

Установлено, что закрутка лопастей на отрицательные углы улучшает аэродинамические характеристики несущего винта при полете вперед, так как разгрузка концевых частей лопастей затягивает срыв на отступающей лопасти и проявление эффектов сжимаемости на наступающей лопасти. Однако крутка усиливает вибрации при полете вперед и оказывает некоторое влияние на характеристики авторотации. Таким образом, выбор крутки и сужения лопастей — сложная задача, для решения которой необходимо рассматривать все режимы полета вертолета.

2.6.9. ПРИМЕРЫ ПОЛЯР

В предыдущих разделах получено несколько выражений для аэродинамических характеристик на режиме висения как в случае реального, так и идеального несущих винтов. Здесь мы приведем численные примеры и сопоставим расчетные аэродинамические характеристики в различных случаях. Будут рассмотрены три вида несущих винтов с предельными характеристиками: 1) винт, у которого коэффициент совершенства равен единице, т. е. профильная мощность равна нулю, а индуктивная мощность минимальна, так что $C_P = C_T^{3/2} / \sqrt{2}$; 2) оптимальный винт, у которого крутка лопастей обеспечивает равномерную скорость протекания, а их сужение — постоянство углов атаки сечений, вследствие чего минимальны и профильная, и индуктивная мощности; 3) идеальный винт, лопасти которого имеют постоянную хорду и крутку, обеспечивающую равномерную скорость протекания и минимум индуктивной мощности. При расчете аэродинамических характеристик реального несущего винта используется формула, называемая далее «простой»:

$$C_P = kC_T^{3/2} / \sqrt{2} + \sigma c_{d_0} / 8.$$

Это, по существу, эмпирическая зависимость, так как для надежной оценки характеристик нужно выбрать подходящие значения c_{d_0} и k . Дан пример использования теории элемента лопасти для расчета несущего винта, имеющего лопасти с постоянной хордой и линейной круткой при постоянной индуктивной скорости. Наконец, элементарно-импульсная теория применена к расчету такого же винта, но при неравномерном распределении индуктивной скорости.

Поляры несущего винта, т. е. графики зависимости C_p/σ от C_T/σ , построены для винта с коэффициентом заполнения

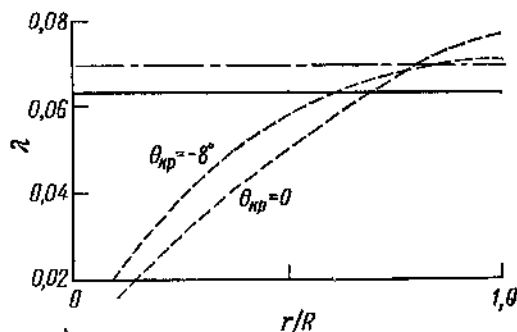


Рис. 2.9. Расчетное распределение скорости протекания через винт на режиме висения при $C_T/\sigma = 0,08$.

--- эмпирическая формула ($k=1,1$); — идеальная величина; - - - элементарно-импульсная теория.

$\sigma = 0,1$, градиентом крутки $\theta_{кр} = -8^\circ$, градиентом подъемной силы сечения по углу атаки $\alpha = 5,7$ и коэффициентом конечных потерь $B = 0,97$. В простой формуле было положено $k = 1,1$ и $c_a = 0,01$, а в теории элемента лопасти $c_a = 0,0087 - 0,0216\alpha + 0,4\alpha^2$. На рис. 2.9 показаны распределения индуктивной скорости по размаху лопасти, полученные различными методами при $C_T/\sigma = 0,08$. Для оптимального и идеально несущих винтов принята идеальная величина $\lambda_{в} = \sqrt{C_T/2}$. В расчете аэродинамических характеристик по простой формуле и по теории элемента лопасти предполагалось, что индуктивная скорость определяется эмпирической формулой $\lambda = k\lambda_{в}$. Неравномерное распределение скорости протекания было получено по элементарно-импульсной теории.

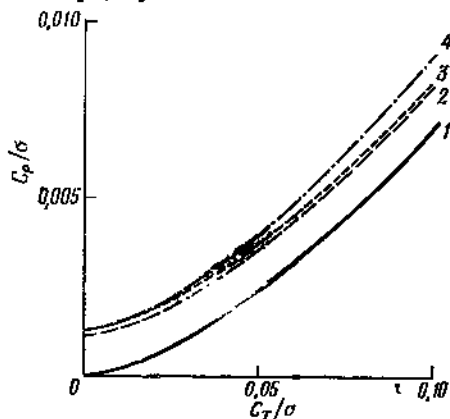


Рис. 2.10. Сравнение расчетных аэродинамических характеристик несущих винтов на режиме висения.

1—винт с $M=1$; 2—оптимальный винт; 3—идеальный винт; 4—реальный винт (простая формула, $k=1,1$).

На рис. 2.10 сопоставлены результаты расчетов аэродинамических характеристик трех идеализированных винтов и реального

винта. Поляра последнего построена по простой формуле при $k = 1,1$. Винт с $M = 1$ имеет минимальную индуктивную мощность, у оптимального винта к ней добавляется минимальная

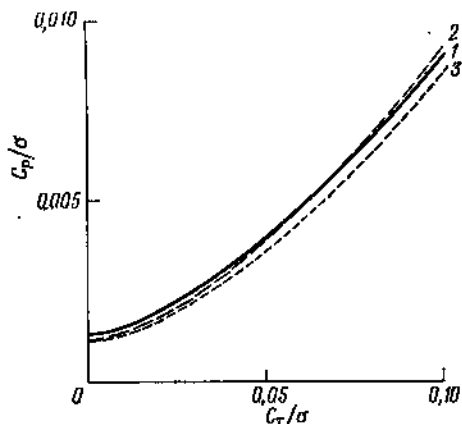


Рис. 2.11. Сравнение расчетных аэродинамических характеристик несущего винта на режиме висения.

1 — простая формула; 2 — теория элемента лопасти (равномерная скорость протекания); 3 — элементарно-импульсная теория (неравномерная скорость протекания).

ная мощность. Расхождение результатов расчета по теории элемента лопасти и по элементарно-импульсной теории объясняется тем, что в последней принято неравномерное распределение индуктивных скоростей. Дополнительные данные по сравнению расчетных аэродинамических характеристик несущих винтов на режиме висения можно найти в работе [G.50].

2.6.10. НАГРУЗКА НА ДИСК, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО РАЗМАХУ ЛОПАСТИ И ЦИРКУЛЯЦИЯ

Для анализа работы несущего винта на основе схемы активного диска нужно знать, особенно при использовании вихревой теории (разд. 2.7), соотношение между нагрузкой на диск, распределением нагрузки по размаху лопасти и циркуляцией присоединенных вихрей. Нагрузка dL/dr сечения и циркуляция Γ связаны соотношением $dL/dr = \rho \Omega r \Gamma$. Поэтому $dT/dA = NdL/2\pi r dr = \rho \Omega N \Gamma / 2\pi$. Отсюда следует, что равномерной нагрузке на диск соответствуют треугольное распределение нагрузки по размаху лопасти и постоянная циркуляция. Переходя к безразмерным величинам, для равномерной нагрузки на диск получим $\Gamma / (\Omega R^2) = (2\pi/N) C_T = 2(c/R) C_T / \sigma$.

ная профильная мощность. У идеального несущего винта профильная мощность слегка увеличивается вследствие постоянства хорды. Наконец, у реального винта затраты мощности дополнительно возрастают за счет увеличения в k раз индуктивной мощности. На рис. 2.11 приведены аэродинамические характеристики, рассчитанные по простой формуле, по теории элемента лопасти и по элементарно-импульсной теории. Расхождение результатов расчета по простой формуле и по теории элемента лопасти обусловлено тем, что по-разному

2.7. ВИХРЕВАЯ ТЕОРИЯ

Присоединенным вихрям, циркуляции которых определяют подъемную силу крыла конечного размаха, соответствуют свободные вихри, сходящие с крыла и образующие его след. Нагрузка лопасти наиболее сильно изменяется в ее концевой части. Поэтому завихренность в следе несущего винта концентрируется в спиралеобразные концевые вихри, расположенные под винтом. В отличие от крыла лопасть проходит очень близко от собственного следа и от следов предшествующих лопастей. Близость следа оказывает значительное влияние на распределения индуктивных скоростей и нагрузки лопасти. Вихревая теория представляет собой исследование работы несущего винта, в котором на основе законов гидродинамики, определяющих движение и воздействие завихренности (формула Био—Савара, теоремы Кельвина и Гельмгольца), рассчитывается индуцируемое следом винта поле скоростей и, в частности, распределение индуктивных скоростей по диску винта. В простейшем варианте вихревой теории использована схема активного диска. Это означает, что не учитывается дискретность самого винта и его следа, связанная с конечным числом лопастей, а завихренность непрерывно распределяется по пространству, занятому следом. При этих условиях задача может быть решена аналитически, по крайней мере для вертикального полета¹⁾. Если рассматривать ту же схему течения, что и в импульсной теории, то вихревая теория должна, конечно, дать такие же результаты. Однако вихревая теория лучше, чем импульсная, пригодна для обобщений схемы течения (например, учета неравномерности нагрузки на диск), так как она связана с рассмотрением местных, а не обобщенных характеристик.

Если в вихревой теории принять дискретную схему следа, то последний будет состоять из вихревых линий и вихревых поверхностей (пелен), которые тянутся за каждой лопастью. Вследствие весьма сложной формы этих линий и пелен интегрирование, необходимое для расчета индуктивной скорости, приходится выполнять численно. В результате задача оказалась столь сложной с вычислительной точки зрения, что практически разрешимой она стала только после того, как в распоряжении инженеров-вертолетчиков появились быстродействующие электронные цифровые вычислительные машины. При нынешнем распространении ЭВМ для представления несущего винта и его следа почти всегда используют дискретную систему вихрей, если хотят получить подробную информацию о поле скоростей и о нагрузках лопастей. Говоря о вихревой

¹⁾ В рамках дисковой теории задача решена аналитически и для полета вперед (см. монографию [В.31]). — *Прим. перев*

теории, теперь обычно имеют в виду классические работы, основанные на схеме активного диска. Численное определение индуктивной скорости с использованием схемы вихревого следа рассмотрено в гл. 13 в разделе, посвященном неравномерным распределениям скоростей протекания.

Основы вихревой теории заложил Н. Е. Жуковский в 1912—1929 гг. Он исследовал скорости, которые индуцирует система спиральных свободных вихрей, образующих след пропеллера, но для математического упрощения задачи использовал схему винта с бесконечным числом лопастей, т. е. схему активного диска. С помощью этой вихревой теории были воспроизведены результаты импульсной теории. В 1918 г. Жуковский предложил использовать в качестве характеристик профиля характеристики профиля в плоской решетке, а индуктивную скорость находить по вихревой теории. Тем самым, по существу, были установлены основы современной теории элемента лопасти, так как для вертолетных несущих винтов эффект решетки пренебрежимо мал.

В 1919 г. А. Бетц подробно исследовал систему вихрей, образующих след пропеллера, и на базе вихревой теории определил минимум потребной мощности и наиболее выгодное распределение нагрузок винта. Л. Прандтль в приложении к статье Бетца указал способ введения приближенной поправки, которая в рамках дисковой теории учитывает концевой эффект — влияние числа лопастей на распределение нагрузок винта. Около 1920 г. Р. Вуд и Г. Глауэрт, а также Э. Пистолези выполнили работы, ставшие дальнейшим развитием вихревой теории. В 1929 г. С. Голдстейн более строго рассмотрел вихревой след пропеллера с конечным числом лопастей.

Скорость $u(x)$, индуцируемую вихревой нитью с циркуляцией k , вычисляют по формуле Био — Савара

$$u(x) = -\frac{k}{4\pi} \int \frac{(x-y) \times dl(y)}{|x-y|^3},$$

где интеграл берется по всей длине нити, а вектор dl направлен по касательной к вихревой нити в точке y . Эту формулу можно также записать в виде $u(x) = -\frac{k}{4\pi} \nabla \Sigma$, где Σ — телесный угол, под которым поверхность, ограниченная вихревой нитью, видна из точки x . В случае прямолинейной вихревой нити индуктивная скорость направлена по касательной к окружности с центром на вихре, которая проходит через точку x и лежит в нормальной к вихрю плоскости. Величина скорости $|u|$ равна $k/(2\pi h)$, где h — расстояние от точки x до вихря. В реальной жидкости бесконечная скорость на вихре не возникает: вследствие вязкости вихревая нить превращается в вихревую трубку с малой, но конечной площадью попе-

речного сечения. Эту трубку называют *ядром вихря*. По теореме Стокса, поток вихря через поверхность S равен циркуляции скорости по кривой, ограничивающей поверхность. Теорема Кельвина устанавливает, что в идеальной несжимаемой жидкости постоянной плотности циркуляция $\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$ по всякой движущейся вместе с жидкостью замкнутой кривой остается постоянной. Затем следуют теоремы Гельмгольца: течение, которое первоначально было безвихревым, останется таким и впредь; вихревая трубка (в частности, вихревая нить) переносится жидкостью, сохраняя циркуляцию; вихревые линии должны быть либо замкнуты, либо заканчиваться на поверхностях, ограничивающих жидкость. На основе этих теорем в вихревой теории рассчитывают обтекание несущего винта вертолета.

2.7.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕСУЩЕГО ВИНТА И ЕГО СЛЕДА СИСТЕМОЙ ВИХРЕЙ

Подъемная сила L сечения крыла связана с циркуляцией Γ вокруг сечения соотношением $L = \rho U \Gamma$, где U — скорость невозмущенного потока, ρ — плотность воздуха. Поэтому лопасть несущего винта можно схематизировать присоединенными вихрями, циркуляции которых заданы распределением элементарных подъемных сил винта. Так как вихревые нити не могут заканчиваться в жидкости, эти присоединенные вихри должны продолжаться в виде свободных вихрей, которые сходят в след несущего винта с концов и задних кромок лопастей.

При постоянной вдоль лопасти циркуляции (соответствующей равномерной нагрузке) свободные вихри сходят в след только с корня и конца лопасти. Концевой свободный вихрь скручивается в спираль, так как скорость его элементов складывается из скорости вращения лопасти и осевой скорости потока через диск винта (рис. 2.12). На висении осевая скорость целиком обусловлена индукцией следа. Сбегающие с каждой лопасти концевые вихри образуют систему входящих одна в другую спиралей. Можно считать, что корневые вихри пренебрежимо малы и располагаются вдоль оси винта (если пренебречь наличием неоперенной части). При положительной силе тяги несущего винта направления вращения в вихрях таковы, что корневой вихрь и осевые составляющие концевых спиральных вихрей индуцируют закрутку следа в направлении вращения винта, а трансверсальные составляющие концевых вихрей (вихревые кольца) индуцируют внутри следа осевую скорость, противоположную по направлению силе тяги. Таким образом, система вихрей следа вызывает скорости, которые определяются, как показано выше, условиями сохранения осевого количества движения и момента количества движения.

В более общем случае, когда циркуляция присоединенных вихрей лопасти изменяется вдоль размаха, свободные вихри должны сходиться со всей задней кромки. Тогда след состоит из геликоидальных вихревых пелен, сошедших с каждой лопасти. У реального несущего винта вихревые пелены своими

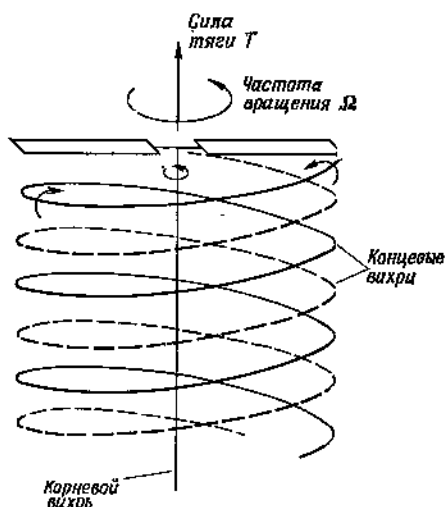


Рис. 2.12. Вихревой след несущего винта в вертикальном полете.

краями быстро сворачиваются в концевые вихревые жгуты, которые могут быть аппроксимированы вихревыми нитями. Кроме того, вследствие самоиндукции следа форма пелен значительно отличается от номинальной геликоидальной. В классической вихревой теории сворачивание вихревых пелен обычно не рассматривается. Такой подход был оправдан для пропеллеров, так как обтекающий их с большой скоростью поток быстро уносит след, но для вертолетных несущих винтов с малой скоростью протекания предпочтительна более близкая к действительности схема следа.

При полете вперед нагрузки сечений лопасти изменяются не только по радиусу, но и по азимуту, так что кроме осевых и трансверсальных свободных вихрей, в след будут сходиться и радиальные (поперечные) вихри. Радиальные вихри могут существовать в следе и при вертикальном полете, если движение лопасти нестационарно.

2.7.2. ДИСКОВАЯ ВИХРЕВАЯ ТЕОРИЯ

Рассмотрим вихревую теорию несущего винта на режиме висения, представив винт активным диском, т. е. винтом с бесконечным числом лопастей. В такой схеме присоединенные вихри лопастей «размазываются» в вихревой слой на диске несущего винта. Следовательно, вихри следа уже не сосредоточиваются в геликоидальных пеленах или концевых спиралях, а распределяются по пространству, занятому следом. Такая схематизация сильно облегчает расчет скорости, индуцируемой следом. Мы уже рассматривали эту схему течения при изложении импульсной теории несущего винта. Поэтому новых результатов мы здесь не получим. Однако вихревая теория

лучше объясняет эти результаты и тем создает прочный фундамент для более сложного анализа.

Рассмотрим сначала равномерно нагруженный активный диск, для которого $dT/dA = \text{const}$. Лопастей в этом случае имеют треугольную нагрузку и постоянную циркуляцию присоединенных вихрей:

$$\Gamma = \frac{1}{\rho \Omega r} \frac{dT}{dr} = \frac{2\pi}{\rho \Omega} \frac{dT}{dA} = \frac{2\pi}{\rho \Omega} \frac{T}{A}$$

(здесь Γ — циркуляция присоединенных вихрей всех лопастей). Таким образом, след состоит из вихревой пелены на границе спутной струи и прямолинейной вихревой нити на оси винта, соответствующей корневому вихрю (рис. 2.13). Так как корневой вихрь представляет собой сумму всех присоединенных вихрей, его циркуляция равна Γ . Диск несущего винта в этом случае становится слоем радиальных вихрей, который получается «размазыванием» присоединенных вихрей винта, так что погонная завихренность радиальных вихрей равна $\gamma_n = \Gamma/(2\pi r) = T/(\rho A \Omega r)$. При постоянной циркуляции присоединенных вихрей след состоит только из концевых и корневых вихрей, причем в предельном случае бесконечного числа лопастей заходящие одна за другую концевые спирали образуют вихревую пелену на границе следа, имеющую осевую и трансверсальную составляющие. Погонная циркуляция осевой составляющей пелены из концевых вихрей равна $\gamma = \Gamma/(2\pi R_1)$, где R_1 — радиус следа. Вихревые линии образуют (в соответствии с теоремой Гельмгольца) непрерывные кривые, каждая из которых состоит из корневого вихря, радиального присоединенного вихря на диске и осевой составляющей пелены из концевых вихрей. Вследствие спиральной формы концевых вихрей трансверсальная составляющая завихренности сохраняется в следе и в предельном случае бесконечного числа лопастей. Можно считать, что эта завихренность состоит из вихревых колец. Погонная циркуляция γ вихревых колец равна Γ/h , где h — расстояние, на которое след перемещается за время одного оборота винта. Связывая h с осевой скоростью на границе следа, получим $h = 2\pi v/\Omega$, так что $\gamma = T/(\rho A v)$.

Распределенные в следе вихревые кольца индуцируют осевую скорость внутри спутной струи. Осевая скорость на диске

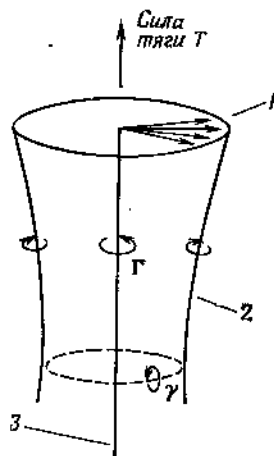


Рис. 2.13. К дисковой вихревой теории.

1 — присоединенные вихри, распределенные по диску винта; 2 — вихревая пелена на границе спутной струи; 3 — корневая вихревая нить.

несущего винта и в дальнем следе обусловлена только завихренностью в следе; присоединенные вихри в создании этой скорости не участвуют. Если пренебречь поджатием и закруткой следа, то можно считать, что индуктивная скорость на диске вызывается полубесконечным вихревым цилиндром, а индуктивная скорость в дальнем следе — бесконечным цилиндром. Следовательно, индуктивная скорость на диске вдвое меньше скорости в дальнем следе, т. е. $v = \omega/2$. Так как далеко перед винтом течение безвихревое, оно должно остаться безвихревым для всех частиц, которые не прошли через диск. Поэтому циркуляция скорости по любому контуру, целиком лежащему вне следа, должна быть равна нулю, а вращение жидкости может существовать только внутри следа. Значит, непосредственно перед несущим винтом вращения нет, тогда как сразу за винтом его крутящий момент вызывает вращение жидкости с окружной скоростью u . Корневой вихрь индуцирует окружную скорость $u_1 = \Gamma/(4\pi r)$ как над диском винта, так и под ним, завихренность же на границе спутной струи не вызывает вращения жидкости внутри следа (по теореме Стокса). Присоединенная завихренность индуцирует окружную скорость u_n непосредственно под диском и $-u_n$ непосредственно над ним. Тогда, по условию отсутствия вращения вне следа, $u_n = u_1$, так что полная скорость u закручивания следа непосредственно под диском равна $2u_1$. Действительно, так как скачок скорости при переходе через вихревой слой на диске винта равен погонной циркуляции слоя, мы опять-таки получим $2u_n = \gamma_n = \Gamma/(2\pi r)$. Заметим, что скорость набегающего на сечение лопасти потока, которая обусловлена собственным вращением лопасти и индуктивной закруткой следа, будет тогда равна $\Omega r - u/2$. Этим объясняется появление множителя $(\Omega r - u/2)$ в выражении для аэродинамического момента, полученном в разд. 2.3.2.

С целью дальнейшего исследования осевой индуктивной скорости рассмотрим выражение

$$u(x) = - \frac{k}{4\pi} \nabla \Sigma,$$

где u — скорость, индуцируемая вихревой нитью с циркуляцией k в точке x , а Σ — телесный угол, под которым из точки x видна поверхность, стягиваемая вихревой нитью (см. также работу [К. 50]). Осевая скорость в следе несущего винта индуцирована полубесконечным вихревым цилиндром, состоящим из элементарных вихревых колец с циркуляциями $k = \gamma dz_1$. Поэтому осевая составляющая индуктивной скорости выражается интегралом

$$v(x) = - \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{4\pi} \frac{\partial \Sigma}{\partial z} dz_1,$$

где Σ — телесный угол, под которым кольцо с координатой z_1 видно в точке с координатой z (диск несущего винта имеет координату $z = 0$). Если скорость поджатия следа мала, то при перемещении наблюдателя изменение Σ будет в первую очередь обусловлено изменением расстояния $z - z_1$ и лишь во вторую очередь — изменением диаметра кольца. В этом случае движения наблюдателя и кольца эквивалентны, так что $\partial\Sigma/\partial z = -\partial\Sigma/\partial z_1$, откуда

$$v = - \int_{z=0}^{z=\infty} \frac{\gamma}{4\pi} d\Sigma.$$

Если, кроме того, пренебречь всякими изменениями в длинах промежутков между спиралями, то циркуляция вихревых колец оказывается постоянной. Тогда индуктивная скорость равна

$$v = \frac{\gamma}{4\pi} \Delta\Sigma,$$

где $\Delta\Sigma$ — телесный угол, под которым вся поверхность следа видна из точки, где вычисляют скорость v . Мы используем эту формулу для расчета индуктивной скорости в нескольких точках течения. Для любой точки на диске $\Delta\Sigma = 2\pi$, так что $v = \gamma/2$. Вспоминая, что циркуляция вихревого кольца γ равна $T/(\rho A v)$, вновь получаем формулу индуктивной скорости на диске несущего винта:

$$v = \sqrt{T/(2\rho A)}.$$

Кроме того, тем самым мы доказали, что в случае равномерно нагруженного винта индуктивная скорость постоянна на диске. Для точек, которые лежат вне диска в его плоскости, $\Delta\Sigma = 0$ и $v = 0$, т. е. осевая индуктивная скорость существует только на диске. Для бесконечно удаленных точек внутри следа $\Delta\Sigma = 4\pi$ и $w = \gamma$, т. е. осевая скорость равномерна в дальнем следе и $w = 2v$, как в импульсной теории. Наконец, для точки оси следа, лежащей на расстоянии z от диска, индуктивная скорость равна

$$v = \frac{\gamma}{4\pi} [4\pi - \Sigma_0],$$

где через

$$\Sigma_0 = 2\pi \left[1 - \frac{z/R}{\sqrt{1 + (z/R)^2}} \right]$$

обозначен телесный угол, под которым виден диск несущего винта. Таким образом, на оси следа индуктивная скорость определяется выражением

$$v = v(0) \left[1 + \frac{z/R}{\sqrt{1 + (z/R)^2}} \right].$$

Отсюда можно получить соответствующие предельные значения для точек, расположенных далеко впереди ($z = -\infty$) и далеко позади ($z = \infty$) несущего винта.

Рассмотрим теперь активный диск с неравномерной нагрузкой. Если циркуляция присоединенных вихрей меняется вдоль лопасти, то свободные вихри распределены по всему объему цилиндра, представляющего след, а не сконцентрированы на его границе. След можно рассматривать как совокупность вложенных одна в другую вихревых оболочек и корневого вихря, необходимого для того, чтобы вихревые линии не заканчивались в жидкости. Каждая вихревая оболочка состоит из цилиндрической пелены радиуса r и «донышка», образуемого слоем присоединенной завихренности на диске радиуса r . Поэтому присоединенная завихренность на радиусе r складывается из «донышек» всех оболочек, радиусы которых больше r , и из изменения присоединенной завихренности на окружности радиуса r вследствие схода с этой окружности свободных вихрей. Из сказанного в предыдущем разделе следует, что индуктивную скорость $v(r)$ создают лишь те оболочки, радиусы которых больше r , так как только для этих оболочек точка, где вычисляют скорость, расположена внутри диска. Поэтому осевая индуктивная скорость равна

$$v = \int_r^R (1/2) \gamma dr,$$

где γ — интенсивность свободной завихренности, связанная с изменением циркуляции Γ присоединенных вихрей соотношением

$$\gamma = - \frac{d\Gamma}{dr} \frac{\Omega}{2\pi(V+v)}.$$

Следовательно,

$$v = - \int_r^R \frac{\Omega}{4\pi(V+v)} \frac{d\Gamma}{dr} dr = \frac{\Omega}{4\pi(V+v)} \Gamma + \int_r^R \frac{\Omega}{4\pi} \Gamma \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{V+v} \right) dr.$$

Переходя к распределению нагрузки $dT/dA = \rho\Omega\Gamma/(2\pi)$, это уравнение вихревой теории относительно индуктивной скорости можно записать в виде

$$2\rho(V+v)v = \frac{dT}{dA} + (V+v) \int_r^R \frac{dT}{dA} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{V+v} \right) dr.$$

Сравним его с дифференциальным уравнением $dT = 2\rho(V+v)v dA$ импульсной теории, которое было получено (без доказательства) применением законов сохранения к кольцевому элементу диска, расположенному на радиусе r . Видно, что формула индуктивной скорости, найденная применением теоремы

импульсов к такому элементу (как в элементарно-импульсной теории), не точна. Однако ее погрешность оказывается приемлемой, если распределение скорости протекания близко к равномерному. Написанное уравнение свидетельствует и о том, что соотношение $\omega = 2v$ между индуктивными скоростями на диске и в дальнем следе, полученное в импульсной теории, тоже не является точным. Предположения, которые необходимо сделать в вихревой теории для воспроизведения результатов импульсной теории, дают лучшее представление о приближенных допущениях последней.

2.7.3. ЛОПАСТНАЯ ВИХРЕВАЯ ТЕОРИЯ

Дисковая вихревая теория несущего винта в вертикальном полете элементарно проста, особенно в случае равномерной нагрузки. Лопастная вихревая теория рассматривает винт с конечным числом лопастей и схематизирует след вихревыми нитями и пеленами, которые расположены на геликоидах, отходящих от каждой лопасти. Задача о расчете индуктивной скорости в этом случае математически гораздо сложнее, чем в случае завихренности, распределенной по следу, но для осевого течения еще можно получить некоторые аналитические соотношения. Лопастная вихревая теория аналогична анализу работы крыла, выполняемому в плоскости Треффца. В таком анализе рассматривается дальний след, где влияние крыла на течение пренебрежимо слабо. Решение задачи о распределении завихренности в следе определяет также нагрузку крыла. Путем решения более простой задачи в дальнем следе (где параметры не зависят от осевой координаты) можно получить точное распределение нагрузки крыла с учетом влияния его концов. Практическая пригодность решения зависит от принятой схемы следа. В классических работах использованы далекие от реальности схемы вихревой пелены, не сворачивающейся в концевые вихревые жгуты и не возмущенной вследствие самоиндукции. Анализ дальнего следа при исследовании обтекания несущего винта не позволяет сделать какие-либо выводы о том, как должна быть скомпонована лопасть для получения желаемой нагрузки. Для этого нужно знать индуктивную скорость на диске винта.

Классическую лопастную вихревую теорию применяют к вертолетным несущим винтам главным образом в расчетах нагрузок в концевой части лопасти. Решения Прандтля и Голдстейна получены для пропеллеров, у которых скорость протекания велика, и потому основаны на схемах следа, которые не вполне приемлемы для несущих винтов с присущей им малой скоростью протекания. Решающим моментом в этих исследованиях является выбор структуры следа, которая полностью определяет

поле скоростей. Точнее говоря, в них предполагается, что вихревые пелены в следе движутся как твердые поверхности. Тогда граничное условие непротекания через пелены определяет поле скоростей, по которому можно найти завихренность в следе, а значит, и нагрузку лопасти. Прандтль рассмотрел простую двумерную схему следа несущего винта, а Голдстейн—геликоидальные вихревые пелены, что сильно упростило анализ, но оба они пренебрегли взаимодействием лопастей со следом, которое имеет важное значение для несущих винтов с их малыми скоростями протекания.

2.7.3.1. Структура следа оптимального винта. Рассмотрим схему следа, пригодную для оптимального несущего винта (мы будем следовать рассуждениям Бетца, изложенным Глауэртом [G.89]). В случае слабо нагруженного винта поджатием следа вблизи диска можно пренебречь. Тогда угол наклона геликоидальной пелены определяется выражением

$$\varphi = \operatorname{arctg} [(V + v)/(\Omega r - v/2)],$$

где v — осевая, а u — окружная скорости, индуцируемые следом на диске (здесь φ — угол между поверхностью следа лопасти и горизонтальной плоскостью). Импульсная теория (разд. 2.3.2) дает оптимальное решение в виде $V + v = (V + v_0) [1 - u/(2\Omega r)]$. Поэтому

$$\varphi = \operatorname{arctg} [(V + v_0)/(\Omega r)].$$

Таким образом, след лопасти оптимального несущего винта представляет собой геликоидальную пелену с постоянным углом наклона, не возмущенную индуктивными скоростями u и v . При такой (винтообразной) форме пелены любой поперечный свободный вихрь, который сходит с задней кромки лопасти и становится элементом следа, все время будет оставаться на той же радиальной горизонтальной прямой. Эта структура следа соответствует несущему винту с минимальной индуктивной мощностью при заданной силе тяги.

Рассмотрим несущий винт, след которого состоит из геликоидальных вихревых пелен, движущихся как твердые поверхности. Винт имеет скорость V , направленную вверх, след — скорость v_0 , направленную вниз, угол наклона геликоида φ равен $\operatorname{arctg} [(V + v_0)/(\Omega r)]$. Движение следа со скоростью v_0 обобщается жидкости, прилегающей к поверхности геликоидов. Поскольку жидкость не протекает через пелену, проекция скорости жидкости на нормаль к геликоиду должна быть равна такой же проекции скорости пелены, т. е. $v_0 \cos \varphi$. При конечном числе лопастей эта нормальная скорость убывает между пеленами, так что должна существовать радиальная скорость, которая вызывает уменьшение подъемной силы концевой части лопасти. При бесконечном увеличении числа лопастей вих-

ревые пелены тесно сближаются, и в результате вся жидкость вращается вместе с лопастями. В этом случае потери подъемной силы вследствие обтекания кромок вихревых пелен отсутствуют. Так как нормальная к пелене скорость равна $v_0 \cos \varphi$, индуктивные осевая и окружная скорости определяются выражениями

$$v = (v_0 \cos \varphi) \cos \varphi = v_0 \frac{(\Omega r)^2}{(\Omega r)^2 + (V + v_0)^2},$$

$$\frac{1}{2} u = (v_0 \cos \varphi) \sin \varphi = v_0 \frac{(V + v_0) \Omega r}{(\Omega r)^2 + (V + v_0)^2}.$$

Эти формулы согласуются с полученными в импульсной теории (разд. 2.3.2).

Согласие указанных формул оправдывает использование схемы твердого следа в классической вихревой теории. Поскольку индуктивные затраты мощности реального несущего винта немного отличаются от аналогичных затрат у оптимального винта, эту простую схему можно использовать и при расчетах винта с неоптимальной нагрузкой. Итак, след несущего винта или пропеллера с минимальной индуктивной мощностью состоит из спиральных пелен свободной завихренности, движущихся в осевом направлении как твердые поверхности, т. е. с постоянной скоростью без деформации. Скорость перемещения следа определяется нагрузкой на диск винта, а наклон геликоидальных пелен — осевой и окружной скоростями лопастей.

2.7.3.2. Решение Прандтля задачи о концевых нагрузках. Индуктивную скорость и нагрузку несущего винта можно определить, рассматривая след далеко вниз по потоку от диска винта, причем результат зависит от выбранной схемы следа. Распределение завихренности по следу предполагает распределение нагрузки по диску винта, т. е. использование схемы активного диска. Однако в действительности винт состоит из дискретных несущих поверхностей. Простейшая схема следа винта с конечным числом лопастей — это геликоидальные вихревые пелены, сходящие с каждой лопасти. Основной эффект наличия конечного числа лопастей заключается в уменьшении нагрузки концевой части лопасти. С точки зрения структуры следа этот эффект объясняется перетеканием жидкости с верхних сторон вихревых пелен на нижние вокруг их кромок и уменьшением вследствие такого перетекания общего количества движения, направленного вниз. Голдстейн нашел точное решение задачи о концевых нагрузках для следа, состоящего из геликоидальных вихревых пелен (разд. 2.7.3.3). Прандтль [G.89] получил приближенное решение в виде поправки на концевые потери для винта с конечным числом лопастей, используя двумерную схему вихревых пелен в дальнем следе.

Заменим систему геликоидальных вихревых пелен рядом полубесконечных параллельных вихревых слоев (рис. 2.14), т. е. заменим осесимметричный след двумерным. Обтекание такого следа можно найти методами теории функций комплексного переменного. Так как использование схемы плоского следа эквивалентно рассмотрению течения только вблизи кромок геликоидальных пелен, при малых скоростях протекания (малых расстояниях между пеленами) получаемое решение должно быть близко к точному. Выберем систему координат, которая вместе со следом движется вниз со скоростью v_0 . В такой системе вихревые слои неподвижны, а скорость невозмущенного

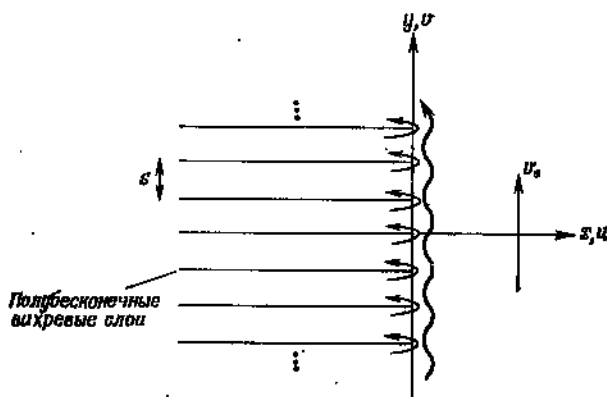


Рис. 2.14. Двумерная схема вихревого следа винта.

потока равна v_0 и направлена вверх. Проекции скорости воздуха обозначим через u , v и перейдем к безразмерным величинам (масштабами служат ρ , Ω , R). В случае слабо нагруженного винта расстояние между вихревыми слоями определяется формулой

$$s = \frac{2\pi}{N} \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \approx \frac{2\pi\lambda}{N},$$

где λ — коэффициент протекания и N — число лопастей.

Комплексный потенциал течения, удовлетворяющего условию непротекания через вихревые слои и условию $v \rightarrow v_0$, $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, будет следующим:

$$w = -v_0 \frac{s}{\pi} \arccos [\exp(\pi z/s)],$$

где $z = x + iy$. Тогда скорость найдем по формуле

$$u - iv = \frac{dw}{dz} = v_0 \frac{e^{\pi z/s}}{\sqrt{1 - e^{2\pi z/s}}}.$$

Например, при $y = 0$ (на одном из слоев)

$$u - iv = v_0 \frac{e^{\pi x/s}}{\sqrt{1 - e^{2\pi x/s}}}$$

В неподвижной системе координат слои движутся вниз со скоростью v_0 , а воздух на большом расстоянии от следа находится в состоянии покоя. Однако, обтекая кромки слоев, воздух перемещается вверх, вследствие чего направленная вниз средняя скорость движения воздуха между слоями уменьшается. Тогда по теореме импульсов подъемная сила вблизи концов лопастей должна уменьшаться. В неподвижной системе координат средняя вертикальная скорость воздуха между слоями равна

$$\bar{v} = \frac{1}{s} \int_0^s (v_0 - v) dy = v_0 \frac{2}{\pi} \arccos [\exp(\pi x/s)]$$

или $\bar{v}(x) = v_0 F$, причем для несущего винта $\pi x/s = (r - 1)N/(2\lambda)$, так что

$$F = \frac{2}{\pi} \arccos [\exp((r - 1)N/(2\lambda))].$$

Функция $F(r)$ — главный результат изложенной теории. Погонная циркуляция вихревого слоя в следе (которая связана с распределением циркуляции присоединенных вихрей несущего винта) определяется как

$$\gamma = v|_{y=0} - v|_{y=s} = 2v_0 \frac{e^{\pi x/s}}{\sqrt{1 - e^{2\pi x/s}}}$$

Тогда циркуляция присоединенного вихря лопасти равна

$$\Gamma(x) = \int_x^0 \gamma dx = v_0 s \frac{2}{\pi} \arccos [\exp(\pi x/s)] = v_0 s F.$$

Подставляя сюда выражение $s = 2\pi\lambda/N = 2\pi(\lambda_c + \lambda_i)/N$ и полагая $v_0 = 2\lambda_i$, получим $\Gamma = (4\pi/N)(\lambda_c + \lambda_i)\lambda_i F$, или

$$\frac{dC_T}{dr} = 4(\lambda_c + \lambda_i)\lambda_i r F,$$

т. е. просто формулу импульсной теории, но с фактором F , учитывающим влияние концов лопастей. Функция $F(r)$ значительно меньше единицы только в концевой части лопасти, при $0,9 < r < 1$. Чтобы принять в расчет влияние корня лопасти, в F нужно ввести еще множитель $r^2/(r^2 + \lambda^2)$, который получен по импульсной теории, учитывающей закрутку следа.

В элементарно-импульсной теории формула индуктивной скорости на режиме висения теперь принимает вид

$$\lambda = \frac{\sigma a}{16F} \left(\sqrt{1 + F \frac{32}{\sigma a} \theta r} - 1 \right).$$

Влияние конца лопасти, выражаемое фактором F , проявляется в увеличении индуктивной скорости и вследствие этого в снижении нагрузки концевой части и повышении индуктивной мощности. Фактор F сказывается также в распределении хорд, которое требуется для того, чтобы винт был оптимальным: законцовка лопасти должна быть скругленной.

Эту же схему следа можно использовать для того, чтобы вместо фактора F , корректирующего распределение нагрузки концевой части лопасти, получить эквивалентный коэффициент концевых потерь B , позволяющий рассчитывать нагрузки винта и его аэродинамические характеристики. Нужно найти эквивалентный винт с бесконечным числом лопастей (и с меньшей эффективной площадью диска), который при заданной мощности развивает ту же силу тяги, что и винт с конечным числом лопастей. Если бы вихревые слои были бесконечно близкими, то воздух между ними полностью переносился бы вниз со скоростью v_0 , а воздух вне следа оставался бы в состоянии покоя. Когда расстояние между слоями конечно, часть воздуха перемещается вверх, обтекая кромки слоев, и тем самым уменьшает направленное вниз количество движения. Приравнявая уменьшение $(1 - B)v_0$ количества движения для активного диска с меньшей площадью уменьшению количества движения, обусловленному конечным числом лопастей, можно найти коэффициент концевых потерь B :

$$\begin{aligned} 1 - B &= \frac{1}{v_0} \int_0^{\infty} (v - v_0) dx = \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{\pi x/s}}{\sqrt{e^{2\pi x/s} - 1}} - 1 \right] dx = \\ &= \frac{s}{\pi} \ln 2 = \frac{\lambda}{N} 2 \ln 2 \approx 1,39 \frac{\lambda}{N}. \end{aligned}$$

Здесь λ — коэффициент протекания, величина которого определяет расстояние между вихревыми пеленами. Для режима висения при линейном распределении индуктивных скоростей $\lambda = \lambda_{xT} = r \sqrt{C_T}$ (разд. 2.6.2) получаем

$$B = 1 - 1,39 \frac{\sqrt{C_T}}{N} \approx 1 - \frac{\sqrt{2C_T}}{N}.$$

Эту формулу обычно используют в расчетах (см. [S.120, G.66]). Коэффициент B позволяет получить результаты, которые очень хорошо согласуются с определяемыми экспериментально характеристиками несущего винта.

2.7.3.3. Теория Голдстейна. Голдстейн [G. 93] разработал вихревую теорию пропеллера с конечным числом лопастей в осевом потоке. След был схематизирован геликоидальными пеленами свободных вихрей, движущихся в осевом направлении с постоянной скоростью как твердые поверхности. Граничное условие непротекания через пелены полностью определяет распределение завихренности в следе, которое можно связать с распределением циркуляции присоединенного вихря лопасти. Голдстейн решил задачу о потенциальном обтекании системы N заходящих одна в другую геликоидальных поверхностей, имеющих, при конечном радиусе, бесконечную протяженность в осевом направлении (т. е. был рассмотрен дальний след) и движущихся с осевой скоростью v_0 . Решение было получено в виде фактора концевых нагрузок F , зависящего от коэффициента протекания, числа лопастей и радиуса сечения. Голдстейн привел таблицы и графики F в зависимости от r для пропеллеров с двумя и четырьмя лопастями (в работе [G.93] фактор концевых нагрузок обозначен через K , а не через F). Этот фактор используется таким же образом, как и фактор Прандтля, описанный в предыдущем разделе. Установлено, что функция Прандтля, как правило, является хорошей аппроксимацией более сложной функции Голдстейна при малых скоростях протекания, особенно при $\lambda/N < 0,1$. Таким образом, решение Прандтля пригодно для несущих винтов вертолетов, а для пропеллеров необходимо использовать решение Голдстейна.

Локк [L. 105] кратко изложил вихревую теорию Голдстейна и ее применение к расчету пропеллеров. Он сравнил результаты этой теории с результатами дисковой вихревой теории и нашел предел функции Голдстейна, показав, что $F \rightarrow r^2/(\lambda^2 + r^2)$ при $N \rightarrow \infty$. Локк установил, что голдстейнова схема следа действительно приводит к оптимальному решению. Таким образом, использование этой теории основано на допущении, что схема жесткого следа приемлема и при практических нагрузках винта. В работе [L. 109] даны таблицы фактора Голдстейна, обсуждены теория и ее применение (включая аппроксимацию Прандтля). Каман [K.1] также проанализировал теорию Голдстейна, обратив особое внимание на ее приложение к несущему винту вертолета на режимах висения или вертикального подъема.

2.7.3.4. Применение классических лопастных теорий к винтам с малой скоростью протекания. Схема следа в виде недеформируемых вихревых пелен приемлема для пропеллеров, у которых скорости протекания велики, так что поток быстро уносит след от диска винта. Для вертолетных винтов с их малой скоростью протекания важное значение имеют взаимодействия между лопастями и завихренностью в следе, а также

деформация следа вследствие самоиндукции. Поэтому простую схему следа, использованную в теории Голдстейна, для несущих винтов нельзя считать вполне удовлетворительной. Свободные вихри быстро сворачиваются в концевые вихревые жгуты, которые вследствие малой скорости протекания остаются вблизи винта и оказывают сильное влияние на нагрузку концевых частей лопасти, с которой сходит жгут, и идущих за ней лопастей. Это влияние должно быть учтено, если требуется надежно рассчитать нагрузки лопасти.

Таким образом, классические лопастные вихревые теории дают наиболее надежные результаты для сильно нагруженных пропеллеров, для которых они и были первоначально разработаны. Для вертолетных же несущих винтов с малыми скоростями протекания такой упрощенный анализ недостаточен. Вследствие сложности структуры вихревого следа и форм реального винта этот анализ должен быть численным. Что касается приближенных формул Прандтля, то их простота оправдывает использование фактора концевых нагрузок $F(r)$ или коэффициента концевых потерь B в тех случаях, когда более детальный расчет невозможен или не требуется.

2.7.4. НЕРАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ПРОТЕКАНИЯ (ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ)

В современных вихревых теориях задачу определения индуктивных скоростей, нагрузок и аэродинамических характеристик несущего винта решают численно, используя сложные схемы следа. К таким схемам относятся представление следа дискретными концевыми вихрями и зачастую даже схемы, учитывающие деформацию свободных вихрей. Поэтому современные теории имеют практическое значение только при использовании быстродействующих цифровых ЭВМ. Хотя численные решения в принципе ближе к действительности, чем классические, попытки усовершенствовать на их основе расчет аэродинамических характеристик несущего винта на режиме висения оказались нелегкими. Часто усовершенствование заключается лишь в небольшом, но важном уточнении, но чтобы его найти, нужно использовать более подробную схему течения, которая требует тщательного исследования. Однако многие сложные явления, связанные с аэродинамикой несущего винта, еще недостаточно выяснены, а другие явления трудно исследовать. Кроме того, усовершенствование расчетной схемы должно быть совместным, т. е. должно затрагивать одновременно аэродинамическую, динамическую и конструктивную схемы несущего винта. В методах расчета аэродинамических характеристик винта на висении был достигнут определенный прогресс, но и теперь эти методы имеют ряд недостатков. Подробное

описание расчета винта с неравномерным распределением скоростей протекания дано в гл. 13.

Дженни, Олсон и Лендгриб [J.10] сравнили несколько методов расчета аэродинамических характеристик на режиме висения: а) простые формулы с равномерной скоростью протекания и постоянным коэффициентом сопротивления, б) элементарно-импульсную теорию, в) вихревую теорию Голдстейна — Локка, г) численное решение с неравномерной скоростью протекания без учета и с учетом поджатия следа (в последнем случае структура следа была заранее задана по экспериментальным данным). Обнаружилось, что классические методы и численное решение без учета поджатия следа завышают величину потребной мощности на висении, причем ошибка возрастает с увеличением нагрузки лопасти C_T/σ (а также с увеличением конечного числа Маха и коэффициента заполнения и уменьшением крутки). Ошибки были объяснены тем, что не учтено поджатие спутной струи или, другими словами, не принята во внимание действительная форма концевых вихрей. На нагрузку лопасти сильное влияние оказывает концевой вихрь, сходящийся с предыдущей лопастью, т. е. нагрузка в значительной степени зависит от положения этого вихря по радиусу и вертикали относительно лопасти. Влияние вихря заключается в увеличении углов атаки внешних (для вихря) сечений лопасти и уменьшении углов атаки внутренних сечений. При умеренных ($0,06 \leq C_T/\sigma \leq 0,08$) и больших нагрузках лопасти вихрь может вызвать срыв в концевой части, а значит, ограничить достижимую нагрузку концевой части и увеличить ее сопротивление, снизив тем самым эффективность несущего винта. Так как в концевой части лопасти нагрузка максимальна, аэродинамические характеристики винта в сильной степени зависят от характера обтекания концевых частей, а следовательно, от небольших изменений положения вихря (а также изменений профиля и формы лопасти в плане). Эффекты сжимаемости тоже играют важную роль, так как число Маха на конце лопасти максимально. Если бы сжимаемость воздуха и срыв не сказывались, влияние концевых вихрей на распределение нагрузки было бы еще сильнее, но эти факторы действуют взаимно исключаящим образом. Если поджатием следа пренебречь, то все сечения лопасти становятся внутренними для вихря и он нигде не увеличивает углов атаки. При использовании схемы распределенной по следу завихренности или даже более простых схем влияние концевых вихрей вообще нельзя оценить. Таким образом, уточнение формы следа является решающим моментом в усовершенствовании методов расчета аэродинамических характеристик винта на режиме висения. Положение концевой вихря по радиусу и вертикали относительно следующей лопасти, к которой он подходит очень близко, имеет

наиболее важное значение. Ряд исследователей, и среди них Кларк и Лайпер [С.70], провели расчет деформации концевой вихря при анализе аэродинамических характеристик винта на висении.

Кларк [С.66] сравнил нагрузку лопасти на висении, рассчитанную по вихревой теории при неравномерном распределении скоростей протекания и использовании схемы свободно

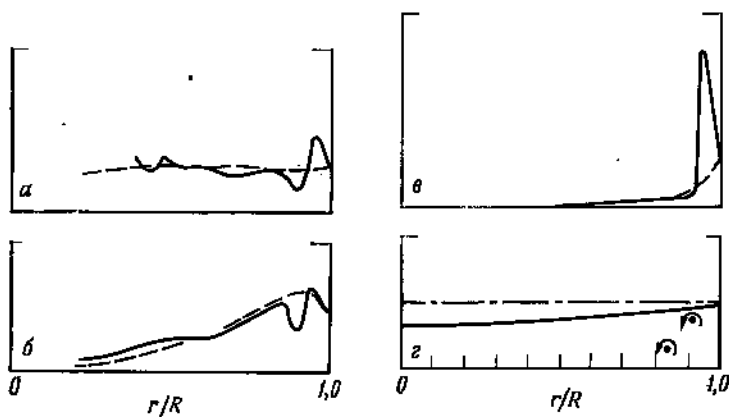


Рис. 2.15. Распределения угла атаки (а), нагрузки (б), мощности (в) и положения вихря (г) по сечениям лопасти несущего винта на режиме висения [С.66].

Сравнение численного решения при неравномерной скорости протекания и свободно деформирующегося следа с решением по элементарно-импульсной теории. — численное решение; --- элементарно-импульсная теория. Рисунок воспроизведен с разрешения Д. Кларка и Американского вертолетного общества.

деформирующегося следа, с нагрузкой, вычисленной по элементарно-импульсной теории (рис. 2.15). Концевой вихрь, который сближается с позади идущей лопастью на радиусе $r = 0,92R$, индуцирует увеличение угла атаки внешних (относительно него) сечений лопасти и уменьшение углов атаки внутренних сечений. Элементарно-импульсная теория не учитывает эти изменения. Вследствие больших величин угла атаки и числа Маха в концевой части лопасти вихрь вызывает срыв за скачком и рост сопротивления во внешних сечениях. Во внутренних сечениях подъемная сила благодаря вихрю уменьшается, но она будет приблизительно такой, какую предсказывает элементарно-импульсная теория, поскольку срыв ограничивает подъемную силу внешних сечений. Сопротивление внешних сечений значительно возрастает вследствие возникновения скачка. В конечном счете концевые вихри уменьшают подъемную силу и увеличивают требуемую мощность несущего винта. Из этих соображений следует, что выгодно увеличивать закрутку

лопасти на отрицательные углы в концевой части. Этот вывод подтверждают расчеты, эксперименты в аэродинамической трубе и летные испытания. Изменения профиля сечений и формы в плане концевой части лопасти также сильно влияют на описанное явление.

2.7.5. ЛИТЕРАТУРА ПО ВИХРЕВОЙ ТЕОРИИ

Кроме упомянутых в тексте имеются следующие работы по вихревой теории несущего винта на режиме висения: [Н.63, К.50, R.42, R.43, М.19, Н.164, Т.42, Е.14, G.73, В.31]. См. также литературу по вихревой теории в гл. 4.

2.8. ЛИТЕРАТУРА

К наиболее содержательным работам по теории пропеллера относятся: [D.28, В.64, В.65, В.66, В.67, G.83, G.89, М.84, М.159, М.160, М.161, L.107, W.30, R.42, R.43, К.57, L.122, Т.41, Т.42, R.49, R.50, М.19, Н.164, Е.14, В. 111]. Несущий винт вертолета на режимах висения или вертикального полета исследуется в работах: [К.45, М.162, G.87, W.57, К.50, P.85, S.119, S.120, В.53, D.50, G.124, G.132, G.133, G.135, М.114, L.94, F.5, С.16, С.18, С.36, S.170, С.20, Н.43, С.17, L.4, D.48, D.49, P.80, P.81, P.82, P.83, R.1, S.92, S.93, J.14, J.12, S.88, S.89, S.90, S.215, S.94, R.74, Y.4, Y.5, С.30, J.17, J.19, J.20, В.46, F.47, С.79, G.95, L.18, W.125, Z.5, D.47, R.59, Y.13, W.124, В.131, L.23, М.137, R.18].

Вертикальный полет II

К режимам вертикального полета вертолета со скоростью V относятся: висение ($V = 0$), набор высоты ($V > 0$), снижение ($V < 0$) и его особый случай — авторотация (безмоторное снижение). Когда скорость снижения возрастает от нуля на режиме висения до скорости авторотации, требуемая для вращения винта мощность уменьшается, а при дальнейшем увеличении скорости снижения несущий винт сам становится источником мощности. Эта глава посвящена в основном определению индуктивной мощности, которая является основной частью мощности, затрачиваемой несущим винтом на режимах вертикального полета, включая снижение. Чтобы понять происхождение индуктивных затрат мощности, нужно рассмотреть режимы обтекания винта в вертикальном полете.

3.1. ИНДУКТИВНАЯ МОЩНОСТЬ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ПОЛЕТЕ

В гл. 2 описан метод расчета индуктивной мощности P_i на режимах висения и вертикального набора высоты по импульсной теории. Он позволяет достаточно надежно рассчитать мощность, если ввести эмпирические коэффициенты, учитывающие дополнительные индуктивные затраты, особенно концевые потери и потери на неравномерность потока. В этой главе полученные результаты распространены и на вертикальное снижение. Показано, что импульсная теория неприменима в определенном диапазоне скоростей снижения, так как принятая в ней схема следа становится некорректной. Дело в том, что след несущего винта в этом диапазоне скоростей приобретает столь сложную структуру, что адекватной простой схемы для него нет. На авторотации (режиме безмоторного снижения) несущий винт создает подъемную силу, не поглощая мощности. Энергия, расходуемая в единицу времени на отбрасывание воздуха для создания подъемной силы (индуктивная мощность P_i) и на вращение винта (профильная мощность P_0), поступает в результате уменьшения потенциальной энергии вертолета при его снижении. Диапазон скоростей снижения, при которых импульсная теория неприменима, охватывает и авторотацию.

По импульсной теории необходимая мощность P несущего винта, без учета профильной мощности, равна $T(V + v)$. Здесь TV — мощность, расходуемая (сообщаемая воздушному потоку) на вертикальный набор высоты со скоростью V . При вертикальном снижении со скоростью $|V|$ несущий винт поглощает мощность $T|V|$ из воздушного потока. Индуктивная мощность P_i равна Tv , где v — индуктивная скорость в плоскости диска. Индуктивная мощность всегда положительна ($v > 0$). Так как индуктивная скорость редко бывает распределена равномерно, особенно при вертикальном снижении, удобнее рассматривать v как эквивалентную по индуктивной мощности скорость, определяемую формулой $v = P_i/T$. Такой подход согласуется со способом определения v по экспериментальным аэродинамическим характеристикам несущего винта. Индуктивная скорость (и индуктивная мощность) зависит от скорости полета, силы тяги, площади диска винта и плотности воздуха, т. е.

$$v = f(V, T, A, \rho).$$

При полете вперед индуктивная скорость зависит также от угла атаки α несущего винта (гл. 4) и других параметров (например, распределения нагрузки по диску), которые здесь не рассматриваются. По теории размерностей получаем, что эта функциональная зависимость имеет вид

$$v/v_a = f(V/v_a, \alpha),$$

где v_a — индуктивная скорость на режиме висения, определяемая импульсной теорией, $v_a^2 = T/(2\rho A)$. Учитывая, что $P_i = Tv$ и, что по импульсной теории индуктивная мощность на висении P_v равна Tv_a , найдем $v/v_a = P_i/P_v$. Функцию $f(V/v_a, \alpha)$ можно определить либо теоретически (например, по той же импульсной теории), либо экспериментально. Расчетные или экспериментальные значения P_i и T при заданной величине V используются для построения графика v/v_a как функции V/v_a . Отклонения экспериментальных точек от графика этой функции обусловлены влиянием на индуктивную скорость в плане и профили сечений, а также концевое число Маха. Функция $v/v_a = f(V/v_a)$ отражает в общих чертах зависимости индуктивной мощности от скорости вертикального полета и может быть использована для предварительной оценки мощности.

3.1.1. ИМПУЛЬСНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОЛЕТА

Как и в разд. 2.1, рассмотрим импульсную теорию несущего винта, представленного схемой равномерно нагруженного активного диска. Вертолет набирает высоту со скоростью V , так

что скорость протекания потока через диск направлена вниз (рис. 3.1). Предполагается, что индуктивные скорости v и w на диске винта и в дальнем следе распределены равномерно. Используем следующее правило выбора знаков (имеющее важное значение при рассмотрении режимов снижения): сила тяги направлена вверх, а скорости направлены вниз. Массовый расход воздуха \dot{m} через винт равен $\rho A(V+v)$. По теореме импульсов $T = \dot{m}(V+w) - \dot{m}V = \dot{m}w$, а по закону сохранения

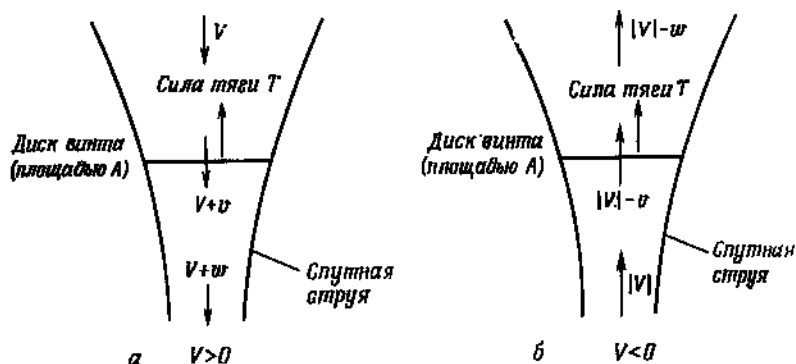


Рис. 3.1. Используемая в импульсной теории схема обтекания несущего винта при наборе высоты (а) или снижении (б).

энергии $P = T(V+v) = (1/2)\dot{m}(V+w)^2 - (1/2)\dot{m}V^2 = (1/2)\dot{m}(2Vw + w^2)$. Исключая из этих соотношений T/\dot{m} , получим $w = 2v$. Следовательно, $T = 2\rho A(V+v)v$. Это уравнение можно записать, введя параметр $v_n^2 = T/(2\rho A)$, в виде

$$v(V+v) = v_n^2.$$

Его решением будет

$$v = -\frac{V}{2} + \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 + v_n^2},$$

поскольку скорость v должна быть положительной. Суммарные скорости на диске и в дальнем следе равны соответственно

$$V+v = \frac{V}{2} + \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 + v_n^2}$$

и

$$V+w = V+2v = \sqrt{V^2 + 4v_n^2}.$$

Успех исследования на базе импульсной теории определяет правильный выбор схемы течения. В частности, схему обтекания винта при наборе высоты уже нельзя использовать при снижении, так как (относительная) скорость невозмущенного потока направлена вверх ($V < 0$) и, таким образом, дальний след находится над диском винта. Схема течения при сниже-

нии также показана на рис. 3.1. Массовый расход \dot{m} по-прежнему равен $\rho A(V + v)$. Но для этого случая по законам сохранения импульса и энергии получаем $T = \dot{m}V - \dot{m}(V + w) = -\dot{m}w$ и $P = T(V + v) = (1/2)\dot{m}V^2 - (1/2)\dot{m}(V + w)^2 = -(1/2)\dot{m}(2V + w)w$. Теперь V отрицательна, а T , v и w по-прежнему положительны. Так как сумма $V + v$ отрицательна (поток через диск направлен вверх), то $P = T(V + v) < 0$, т. е. несущий винт поглощает из воздушного потока энергию, превосходящую индуктивные затраты. Этот режим обтекания называют *режимом ветряка*. Исключение T/\dot{m} в этом случае снова дает $w = 2v$. Уравнение импульсной теории для индуктивной скорости на режиме снижения имеет вид $T = -2\rho A(V + v)v$, или

$$v = (V + v) = -v_a^2.$$

Его решением является

$$v = -\frac{V}{2} - \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - v_a^2}.$$

Суммарные скорости на диске и в дальнем следе, следовательно, равны

$$V + v = \frac{V}{2} - \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 - v_a^2}$$

и

$$V + w = V + 2v = -\sqrt{V^2 - 4v_a^2}.$$

(Второе решение квадратного уравнения дает $v > 0$ и $V + v < 0$, как и требуется, но при этом $V + w > 0$, т. е. течение в дальнем следе должно быть направлено вниз, что противоречит принятой схеме течения.)

На рис. 3.2 представлены графики решений уравнения импульсной теории для режимов вертикального полета. Штриховыми линиями изображены те ветви решений, которые не согласуются с принятой схемой течения. Прямая $V + v = 0$ соответствует режиму обтекания винта, на котором поток через диск меняет направление, а полная мощность $P = T(V + v)$ — знак. На прямой $V + 2v = 0$ изменяет знак скорость в дальнем следе. Прямые $V = 0$, $V + v = 0$ и $V + 2v = 0$ разделяют область существования решения на четыре области. Участки кривой, находящиеся в этих областях, соответствуют: 1) нормальному рабочему режиму (набор высоты и висение), 2) режиму вихревого кольца, 3) режиму турбулентного следа и 4) режиму ветряка (рис. 3.2). Предполагается, что при наборе высоты поток воздуха всюду направлен вниз (все три величины V , $V + v$ и $V + 2v$ положительны). Но имеется ветвь решения, для которой скорость V отрицательна, а $V + v$ и $V + 2v$ положительны, т. е. течение в следе направлено вниз, а вне спутной струи — вверх. Такое течение физически невозможно.

Можно ожидать, однако, что решение, соответствующее набору высоты, окажется применимым и при малых скоростях снижения, при которых течение, по крайней мере вблизи винта, всюду направлено вниз. Следовательно, область применимости импульсной теории должна охватывать режим висения. Предполагается, что при снижении поток воздуха всюду направлен вверх (все три величины V , $V + v$ и $V + 2v$ отрицательны). Но решение, получаемое для снижения, имеет и верхнюю ветвь, которой соответствует $V + 2v > 0$, т. е. в дальнем следе течение направлено вниз, а вблизи винта и вне спутной струи — вверх. Такое течение опять-таки физически невозможно. Таким

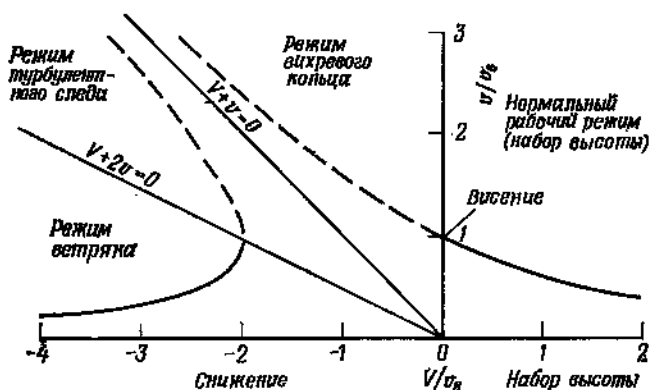


Рис. 3.2. Индуктивная скорость в вертикальном полете, определяемая по импульсной теории.

образом, по импульсной теории на режимах вихревого кольца и турбулентного следа течение вне спутной струи направлено вверх, а в дальнем следе — вниз. Поскольку такие режимы обтекания физически невозможны, в рамках импульсной теории не существует приемлемого решения для умеренных ($-2v_0 < V < 0$) скоростей снижения. Прямая $V + v = 0$ соответствует идеальной авторотации ($P = 0$) и находится посреди диапазона, в котором импульсная теория неприемлема. Индуктивная скорость, определяемая импульсной теорией, при $V + v = 0$ становится бесконечной, поскольку в этом случае, согласно теории, подъемная сила создается без массового расхода воздуха через диск ($\dot{m} = 0$).

Итак, импульсная теория основана на схеме следа с четко выраженными спутной струей и дальним следом, причем всюду внутри струи и вне ее воздух движется в одном и том же направлении. Эта схема хорошо отражает обтекание несущего винта при наборе высоты или при снижении с большой скоростью. Поэтому на нормальных рабочих режимах и на режимах вет-

ряка импульсная теория позволяет надежно оценить индуктивные затраты мощности. Решение, полученное для полета с набором высоты, фактически приемлемо и при малых скоростях снижения, т. е. в диапазоне, охватывающем висение. В принципе схема обтекания неадекватна реальному течению, но характеристики потока вблизи винта, по-видимому, не претерпевают резких изменений до $V = -v_a/2$. Для умеренных скоростей снижения ($-2v_a < V < 0$) в импульсной теории нет подходящей схемы обтекания винта. Согласно схеме, течение направлено вверх всюду, кроме дальнего следа, где оно направлено вниз. В действительности же возникает неустойчивое турбулентное течение без четко выраженной спутной струи. Поэтому характер изменения индуктивной скорости на режимах вихревого кольца и турбулентного следа должен быть определен эмпирически, путем обработки результатов измерения аэродинамических характеристик винта.

3.1.2. РЕЖИМЫ ОБТЕКАНИЯ НЕСУЩЕГО ВИНТА В ВЕРТИКАЛЬНОМ ПОЛЕТЕ

3.1.2.1. Нормальный рабочий режим. Рассмотрим теперь более подробно режимы обтекания несущего винта в вертикальном полете. Нормальный рабочий режим включает набор высоты и висение (рис. 3.3). При наборе высоты скорость потока

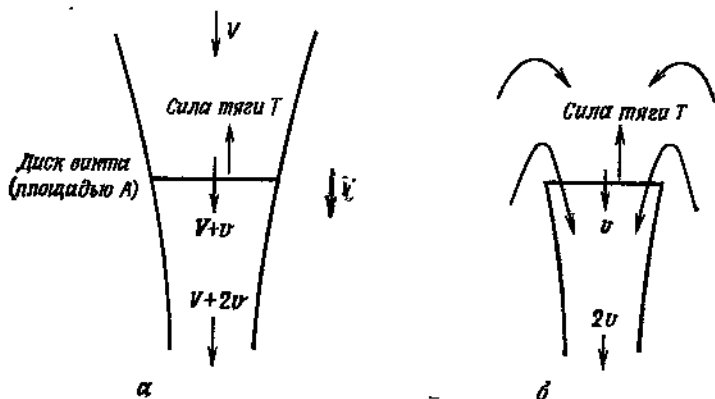


Рис. 3.3. Обтекание несущего винта на нормальном рабочем режиме. а — набор высоты; б — висение ($V=0$).

всюду направлена вниз, причем V и v положительны. Из закона сохранения массы следует, что площадь поперечного сечения следа должна уменьшаться. Для этого режима приемлема схема следа с четко выраженной струей (хотя на самом деле след состоит из дискретных вихрей), и импульсная теория

позволяет надежно оценить аэродинамические характеристики. Под несущим винтом воздух также поступает в струю, а вблизи диска существует возвратное течение, особенно на висении. Принятая в импульсной теории схема обтекания винта не учитывает эти явления, но их влияние на индуктивную мощность имеет второстепенное значение.

Висение ($V = 0$) является предельным случаем нормального рабочего режима. По закону сохранения массы площадь струи далеко перед винтом бесконечна. Однако вблизи винта схема обтекания, предполагаемая в импульсной теории, остается

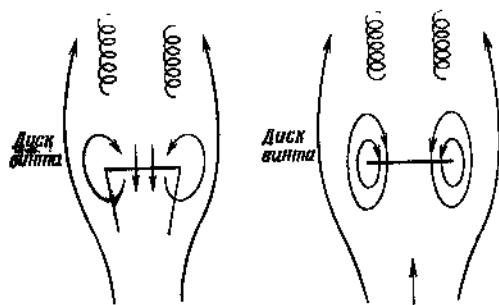


Рис. 3.4. Обтекание несущего винта на режиме вихревого кольца.

а — малые скорости снижения;
б — большие скорости снижения

вполне приемлемой и, следовательно, позволяет надежно оценить аэродинамические характеристики, хотя висение является предельным случаем применимости теории.

3.1.2.2. Режим вихревого кольца. Когда вертолет начинает снижаться, четко определенная спутная струя за винтом перестает существовать, так как иначе в дальнем следе течение в струе было бы направлено в одну сторону, а вне струи — в противоположную. Таким образом, между режимами висения и ветряка существуют промежуточные режимы обтекания, характеризующиеся значительным обратным течением и сильным возмущением следа. Иногда всю эту область режимов называют *режимом вихревого кольца*. Однако в данной книге режим вихревого кольца мы определяем условием о том, что мощность, извлекаемая из воздушного потока, меньше индуктивной мощности, т. е. $P = T(V + v) > 0$. Область режимов обтекания, на которых $P = T(V + v) < 0$, названа *режимом турбулентного следа*. Таким образом, на режиме вихревого кольца требуемая мощность уменьшается, оставаясь положительной. Установившаяся авторотация обычно соответствует режиму турбулентного следа.

На рис. 3.4 схематически показаны картины обтекания винта на режиме вихревого кольца. При малых скоростях снижения начинают развиваться обратное течение вблизи диска и нестационарное возмущенное течение над винтом. Тем не ме-

нее вблизи диска схема импульсной теории еще достаточно хорошо описывает течение. Так как изменение картины обтекания при малых скоростях набора высоты или снижения происходит постепенно, решение, которое дает импульсная теория, остается до некоторой степени приемлемым и на режиме вихревого кольца. При увеличении скорости снижения, когда $V < -v_s/2$, течение даже вблизи диска несущего винта становится сильно нестационарным и возмущенным. На этом режиме высок уровень вибраций и несущий винт становится неуправляемым.

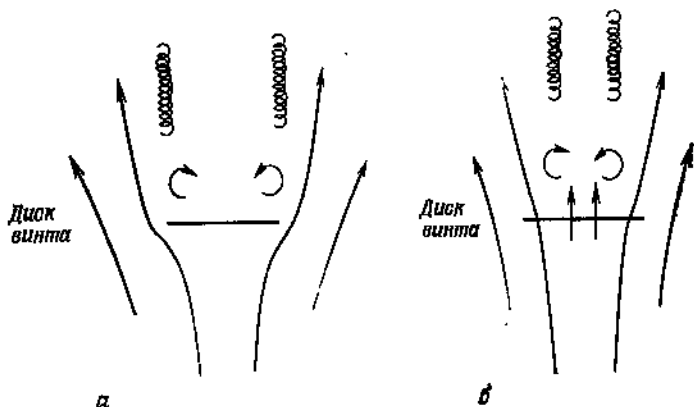


Рис. 3.5. Обтекание несущего винта на режиме турбулентного следа.
а — идеальная авторотация ($V + v = 0$); б — режим турбулентного следа.

Как будет показано ниже, на режиме вихревого кольца потребляемая мощность слабо зависит от величины вертикальной скорости, вследствие чего на этом режиме трудно управлять скоростью снижения.

Картина обтекания винта на режиме вихревого кольца похожа на картину течения, вызванного изолированным вихревым кольцом, которое расположено в плоскости диска несущего винта или несколько ниже ее (отсюда и название режима), притом поток вокруг винта сильно возмущен. Невозмущенное течение, которое при снижении направлено вверх, удерживает концевые спиральные вихри под диском, формируя из них кольцо. С каждым оборотом несущего винта напряженность вихревого кольца возрастает; наконец, вся картина обтекания внезапно нарушается, и кольцо уносится потоком от плоскости диска. Таким образом, поле скоростей нестационарно и возможен периодический унос вихревого кольца в поток над несущим винтом. Такое поле скоростей является источником весьма неравномерных низкочастотных колебаний. На режиме турбулентного следа выполняется условие $V + v < 0$; при этом

поток через диск несущего винта номинально направлен вверх и концевые вихри также уносятся от плоскости диска вверх.

3.1.2.3. Режим турбулентного следа. На рис. 3.5 показано обтекание несущего винта на режиме идеальной авторотации, когда $V + v = 0$. Если бы профильная мощность была равна нулю, то безмоторное снижение могло бы происходить на этом режиме, так как для него $P = T(V + v) = 0$. Теоретически воздух через диск не протекает, но на самом деле существуют значительные обратное течение и возмущения. Обтекание винта на этом режиме сходно с обтеканием круглой пластины той же

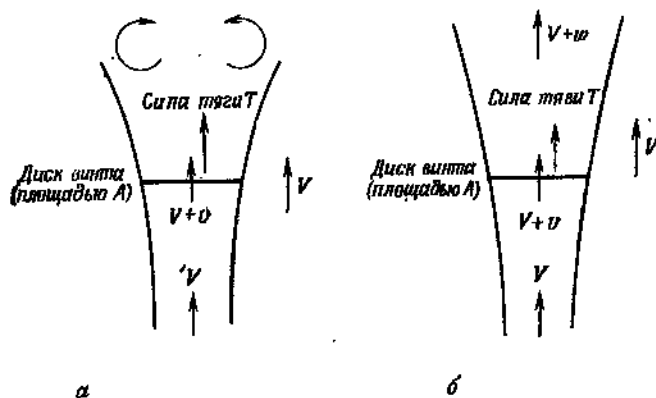


Рис. 3.6. Обтекание несущего винта на режиме ветряка.
а—граница режима ($V + 2v = 0$); б—режим ветряка.

площади (скорость протекания на диске равна нулю, а над диском находится возмущенный след).

На рис. 3.5 схематически показано также обтекание винта на режиме турбулентного следа. Поток по-прежнему сильно возмущен, но возвратное течение через диск значительно слабее, так как скорость на диске направлена вверх. Картина течения над диском на режиме турбулентного следа очень похожа на картину течения в турбулентном следе плохо обтекаемого тела (отсюда название режима). На этом режиме ощущаются некоторые толчки, вызванные возмущениями в следе, но нет ничего похожего на сильные вибрации, присущие режиму вихревого кольца.

3.1.2.4. Режим ветряка. При больших скоростях снижения ($V < -2v_*$) течение снова становится регулярным с четко выраженной спутной струей. На рис. 3.6 показано обтекание винта при этих условиях, т. е. на режиме ветряка. Течение всюду направлено вверх, спутная струя, переходя над винтом в след, расширяется. На режиме ветряка суммарная мощность $P = T(V + v)$ отрицательна, т. е. несущий винт получает энер-

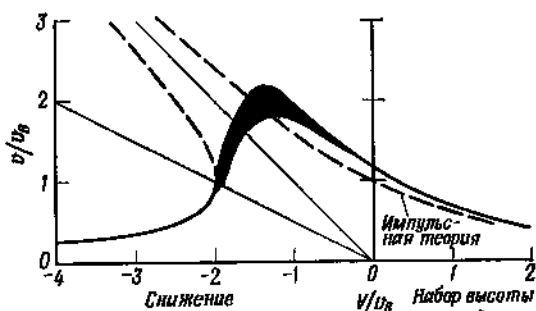
гию от воздушного потока. При этом простая схема обтекания, принятая в импульсной теории, снова становится приемлемой и позволяет надежно оценить аэродинамические характеристики винта.

При условиях $V = -2v_b$, $v = v_b$, определяющих границу режима ветряка, скорость $V + 2v$ в дальнем следе над винтом теоретически равна нулю. Площадь спутной струи далеко над диском стремится к бесконечности, так как воздух в струе затормаживается. Однако вне спутной струи течение по-прежнему направлено вверх. Следовательно, в противоположность режиму висения течение при этих предельных условиях неустойчиво. На границе режимов ветряка и турбулентного следа происходит резкое изменение картины течения: когда номинальная скорость в дальнем следе меняет направление, картина с четкой спутной струей превращается в картину с возвратным течением и возмущениями потока. Таким образом, на границе режима ветряка решение, которое дает импульсная теория, сразу становится непригодным.

3.1.3. КРИВАЯ ИНДУКТИВНЫХ СКОРОСТЕЙ

На рис. 3.7 индуктивная мощность для всех режимов вертикального полета представлена в виде предложенного Хафнером графика зависимости v/v_b от V/v_b . Индуктивную скорость v

Рис. 3.7. Кривая индуктивных скоростей на режимах вертикального полета.



непосредственно не измеряют, график построен по результатам измерений мощности и силы тяги при различных осевых скоростях. Поэтому величины, отложенные вдоль оси ординат, наиболее правильно интерпретировать как отношения P_i/P_b . Полученная в эксперименте мощность P включает профильные потери [$P = T(V + v) + P_0$], которые нужно учитывать при расчете индуктивной мощности:

$$\frac{V + v}{v_b} = \frac{P - P_0}{T \sqrt{T/(2\rho A)}} = \frac{C_P - C_{P_0}}{C_T^{3/2} / \sqrt{2}}$$

Таким образом, чтобы найти индуктивную скорость, нужно вычислить коэффициент профильной мощности. Можно использовать простую формулу $C_{P_0} = \sigma c_{d0}/8$, но желателен более обстоятельный расчет коэффициента C_{P_0} , так как любые погрешности в определении этого коэффициента приводят к разбросу значений индуктивной мощности. В результате таких расчетов можно построить кривую индуктивных скоростей на всех режимах. Кривая, представленная на рис. 3.7, построена по экспериментальным данным, приведенным в работах [L.106, B.151, C.41, G.66, W.20, W.21]. Видно, что импульсная теория действительно дает надежную оценку аэродинамических характеристик винта на нормальном рабочем режиме и на режиме ветряка. На режимах висения и набора высоты экспериментальные значения индуктивной мощности отличаются от результатов импульсной теории множителем, который ненамного больше единицы и приблизительно постоянен. Это связано с присущими реальному винту дополнительными индуктивными потерями, особенно концевыми, и потерями на неравномерность потока через диск. Экспериментальные значения индуктивной скорости всегда имеют некоторый разброс, обусловленный погрешностями расчета профильной мощности, различиями в потерях на неоптимальность винта, а также влиянием других параметров, таких, как концевое число Маха и крутка лопастей. Например, для режима висения индуктивная скорость может на 5—10% отличаться от скорости, определяемой по рис. 3.7. На режиме вихревого кольца этот разброс нужно учитывать. Вследствие того что в этом диапазоне скоростей снижения течение сильно возмущено и нестационарно, индуктивные скорости нельзя надежно представить одной кривой. Кроме того, поскольку режим вихревого кольца представляет собой, по существу, неустойчивый режим обтекания, на величине индуктивной скорости сильно сказываются близость земли, путевая скорость и скорость ветра. Эти факторы затрудняют правильное измерение аэродинамических характеристик на режиме вихревого кольца.

Локк [L.106] предложил другую форму представления индуктивных скоростей — в виде графика зависимости $(V + v)/v_\infty$ от V/v_∞ (рис. 3.8). Здесь по оси ординат отложена не индуктивная мощность, а относительная полная мощность $P/P_\infty = (V + v)/v_\infty$. Такая форма представления лучше согласуется со способами получения и использования кривой индуктивных скоростей, ибо при расчете аэродинамических характеристик винта интерес представляет именно полная мощность. На рис. 3.8 также нанесены прямые $V + v = 0$ (ось абсцисс) и $V + 2v = 0$, выделяющие четыре области, соответствующие четырем режимам обтекания винта при вертикальном полете. Прямая $v = 0$ проходит через начало координат и образует с осью абсцисс угол 45° .

Индуктивная скорость v определяется как разность ординат кривой скоростей протекания и прямой $v = 0$. Идеальной автотротации соответствует теперь ось абсцисс $V + v = 0$. Точкам выше оси абсцисс соответствуют режимы полета, при которых несущий винт сообщает энергию воздушному потоку, точкам ниже этой оси — режимы, при которых винт получает энергию из потока.

Чтобы представить себе масштаб, в котором построены обе кривые, вычислим v_n . При величине плотности, соответствующей

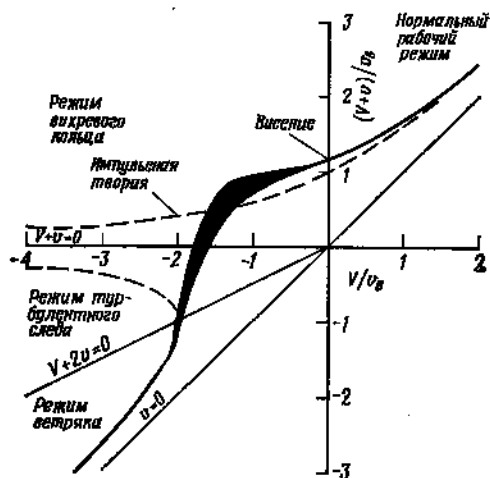


Рис. 3.8. Кривая скоростей протекания на режимах вертикального полета.

уровню моря, $v_n = \sqrt{T/(2\rho A)} = 0,64 \sqrt{T/A}$ м/с. В случае типичной для вертолетов нагрузки на диск T/A от 100 до 500 Па v_n составляет от 6 до 15 м/с. В ранних английских работах кривые скоростей протекания строили в виде графиков зависимости $1/F = [(V + v)/v_n]^2$ от $1/f = (V/v_n)^2$.

3.1.3.1. Характеристики на режиме висения. Измерение аэродинамических характеристик несущего винта на висении показывает, что индуктивная мощность постоянно превышает величину, вычисляемую по импульсной теории, на 10—20%. Импульсная теория дает наименьшие возможные индуктивные затраты. Неравномерность скоростей протекания, концевые потери, закрутка следа и другие факторы вызывают дополнительные индуктивные затраты мощности. Поэтому при расчете аэродинамических характеристик винта на режиме висения (как и в разд. 2.4.2.3) индуктивную мощность можно вычислять по импульсной теории, вводя эмпирическую поправку в виде коэффициента k :

$$C_{P_i} = kC_T^{3/2}/\sqrt{2}.$$

Предложено несколько значений k , но лучше всего подходит $k = 1,15$.

3.1.3.2. Авторотация. Кривая скоростей протекания пересекает прямую идеальной авторотации $V + v = 0$ приблизительно при $V/v_n = -1,71$ (вследствие разброса абсциссы V/v_n точки пересечения находится в диапазоне от $-1,6$ до $-1,8$, см. рис. 3.8). Реальная авторотация происходит при большей скорости снижения, относящейся к режиму турбулентного следа. На этом режиме кривая скоростей протекания хорошо аппроксимируется прямой. Проводя прямую через точку пересечения с прямой идеальной авторотации ($V + v = 0$, $V/v_n = -x$) и граничную точку режима ветряка ($(V + v)/v_n = -1$, $V/v_n = -2$), получим уравнение

$$\frac{V + v}{v_n} = \frac{x}{2 - x} + \frac{1}{2 - x} \frac{V}{v_n}.$$

Если для идеальной авторотации взять $V/v_n = -1,71$, то на режиме турбулентного следа будем иметь

$$\frac{V + v}{v_n} = 6 + 3,5 \frac{V}{v_n}.$$

Это соотношение полезно при оценке скорости снижения на реальной авторотации (разд. 3.2).

3.1.3.3. Режим вихревого кольца. Как уже было сказано, импульсная теория не дает решения для режимов вихревого кольца и турбулентного следа. Однако кривая скоростей протекания на этих режимах хорошо аппроксимируется кубическим многочленом:

$$\frac{V + v}{v_n} = a \left(\frac{V}{v_n} \right)^3 + b \left(\frac{V}{v_n} \right)^2 + c \frac{V}{v_n} + d.$$

Потребовав, чтобы эта формула давала тот же результат, что и импульсная теория в граничной точке режима ветряка ($(V + v)/v_n = -1$, $V/v_n = -2$) и в точке режима вихревого кольца ($(V + v)/v_n = (\sqrt{5} - 1)/2$, $V/v_n = -1$), получим два уравнения для определения констант. Хорошая аппроксимация получается, если положить $b = d = 0$. Если еще ввести эмпирическую поправку в виде множителя k , то придем к формуле

$$\frac{v}{v_n} = k \frac{V}{v_n} \left[0,373 \left(\frac{V}{v_n} \right)^2 - 1,991 \right],$$

которая дает очень хорошую аппроксимацию кривой скоростей протекания в диапазоне $-2 < V/v_n < -1$. На режимах набора высоты, висения и снижения с малыми скоростями ($V/v_n > -1$), а также при снижении с большими скоростями на режиме ветряка ($V/v_n < -2$) приемлемы формулы импульсной теории с соответствующими эмпирическими поправками.

В диапазоне $-0,4 < V/v_n < -1,4$ обтекание винта характеризуется сильной неравномерностью. Скорость на диске, а зна-

чит, и нагрузки несущего винта периодически изменяются с большой амплитудой, так как вихревое кольцо вблизи диска то возникает и нарастает, то уносится от него потоком. Низкочастотные изменения силы тяги вызывают сильную тряску всего вертолета, что является главной особенностью полета на режиме вихревого кольца. Наклон кривой, изображающей функциональную зависимость $V + v$ от V , в этой области невелик. Это означает, что большое изменение скорости снижения вызывает лишь малое изменение мощности, в результате чего уменьшается вертикальное демпфирование и возрастает чувствительность управления. Поэтому на режиме вихревого кольца трудно управлять скоростью снижения вертолета. На режиме турбулентного следа существенное изменение мощности слабо изменяет скорость снижения, так что при снижении на авторотации характеристики управляемости гораздо лучше.

3.1.4. ЛИТЕРАТУРА

Режимы обтекания винта в вертикальном полете рассмотрены в работах: [D.28, L.108, L.104, S.190, B.151, D.76, C.41, Y.9].

Индуктивной мощности или индуктивной скорости в вертикальном полете, в частности при снижении, посвящены работы: [L.108, G.84, B.51, C.32, L.106, S.190, B.151, D.73, N.19, C.41, S.135, K.6, P.33, C.34, W.20, W.21, A.60, B.128, S.76, S.77, W.109, S.101, W.108, H.81, B.131].

Поле скоростей в следе на режимах висения и вертикального полета исследовано в работах: [R.79, B.150, C.20, T.35, G.56, F.6, C.33, B.106, H.70, H.73, J.12, O.1, T.46, A.60, M.119, B.97, B.98, L.17].

3.2. ВЕРТИКАЛЬНОЕ СНИЖЕНИЕ НА АВТОРОТАЦИИ

Авторотация — режим полета, при котором энергия для вращения несущего винта не потребляется. Мощность для создания силы тяги и вращения винта обеспечивает либо тянущий вперед движитель (на автожире), либо снижение вертолета. На автожире несущий винт выполняет ту же роль, что и крыло на самолете. Составляющая скорости обтекающего автожир потока, направленная перпендикулярно диску винта вверх, является источником мощности для вращения несущего винта. Поэтому для устойчивого горизонтального полета автожир нужно толкать вперед. При снижении вертолета на авторотации источником мощности является потенциальная энергия всего аппарата. Конкретно энергию несущему винту сообщает относительный поток воздуха через диск винта, направленный при снижении вверх.

Хотя наименьшая скорость снижения достигается при полете вперед, несущий винт вертолета обеспечивает безмоторное снижение (авторотацию) и по вертикали.

При вертикальном снижении на авторотации суммарная мощность винта равна нулю: $P = T(V + v) + P_0 = 0$. Индуктивная мощность Tv и профильная мощность P_0 компенсируется уменьшением в единицу времени потенциальной энергии TV . Пренебрегая профильной мощностью, получим уравнение идеальной авторотации: $P = T(V + v) = 0$. Если же профильную мощность учитывать, то авторотация происходит при $V + v = -P_0/T$. Следовательно, скорость снижения можно найти как абсциссу точки пересечения кривой скоростей протекания [т. е. графика зависимости $(V + v)/v_a$ от V/v_a] с прямой $(V + v)/v_a = -P_0/P_a$. С использованием коэффициентов это уравнение записывается в виде

$$\frac{V + v}{v_a} = - \frac{C_{P_0}}{C_T^{3/2} / \sqrt{2}}$$

В типичном случае ордината $(V + v)/v_a$ точки пересечения близка к $-0,3$, так что авторотация происходит при скорости снижения, несколько большей скорости идеальной авторотации, т. е. относится к режиму турбулентного следа. Наклон кривой скоростей протекания в этой области велик. Это означает, что для компенсации профильной мощности достаточно небольшое увеличение скорости снижения. Для реального вертолета при расчете скорости $(V + v)/v_a$ должны также учитываться потери мощности на рулевой винт и на аэродинамическую интерференцию. Эти потери составляют от 15 до 20% профильной мощности, так что их учет дает лишь малую поправку к величине скорости снижения. Предельную скорость вертикального снижения можно найти, считая, что она соответствует границе режима турбулентного следа, т. е. приблизительно $-2 < V/v_a < -1,71$. Таким образом, для плотности атмосферы на уровне моря скорость снижения V составляет от $1,1 \sqrt{T/A}$ до $1,3 \sqrt{T/A}$ м/с (нагрузка на диск выражена в Па).

Для более полной количественной оценки аэродинамических характеристик реальных несущих винтов при авторотации вспомним определение коэффициента совершенства несущего винта на висении:

$$M = \frac{C_T^{3/2} / \sqrt{2}}{k C_T^{3/2} / \sqrt{2} + C_{P_0}}$$

откуда

$$\frac{C_{P_0}}{C_T^{3/2} / \sqrt{2}} = \frac{1}{M} - k.$$

Если предположить, что величины C_p и C_T на висении и на авторотации одинаковы (т. е. одинаковы коэффициент сопротивления и концевая скорость лопасти), то в левой части получается как раз та величина, которая определяет точку авторотации на кривой скоростей протекания. Следовательно,

$$\frac{V+v}{v_b} = \frac{1}{M} - k.$$

Таким образом, типичными являются значения $(V+v)/v_b$ от $-0,3$ до $-0,4$. Заметим, что малая величина профильной мощности обеспечивает хорошие аэродинамические характеристики как на режиме висения (высокий коэффициент совершенства), так и при авторотации (малая скорость снижения). Используем теперь выражение $(V+v)/v_b = 6 + 3,5 V/v_b$, которым в разд. 3.1.3.2 аппроксимировалась кривая скоростей протекания на режиме турбулентного следа. Объединяя обе формулы для $(V+v)/v_b$, найдем скорость снижения:

$$\frac{V}{v_b} = -\left[1,71 + 0,29 \left(\frac{1}{M} - k\right)\right].$$

Следовательно, вертикальное снижение на авторотации происходит со скоростью $V/v_b = -1,81$, или $V = 1,16 \sqrt{T/A}$ м/с. В типичном для вертолетов диапазоне нагрузок на диск скорость снижения V составляет от 15 до 25 м/с.

Характеристики авторотации можно определить через коэффициент сопротивления диска, вычисляемый по площади диска и по скорости снижения:

$$C_D = \frac{T}{(1/2) \rho V^2 A} = \frac{T/(2\rho A)}{V^2/4} = \left(\frac{2}{V/v_b}\right)^2.$$

Следовательно, малая скорость снижения соответствует большому коэффициенту сопротивления диска. Параметр C_D удобен тем, что не зависит от нагрузки на диск. При скоростях снижения, типичных для реальных вертолетов, $1,1 < C_D < 1,3$. Для сравнения напомним, что круглая плоская пластина площадью A имеет коэффициент сопротивления $C_D = 1,28$, а парашют с такой же лобовой площадью A — примерно 1,40. Таким образом, при безмоторном вертикальном снижении несущий винт весьма эффективно создает силу тяги, поддерживающую вертолет. Винт действует в общем как парашют того же диаметра. Скорость вертикального снижения на авторотации велика по той причине, что соответствующий парашют для такого веса слишком мал. Однако при полете вперед скорость снижения может быть значительно меньше. Картина течения вокруг винта при авторотации сходна с картиной потока вокруг плохо обтекаемого тела того же размера, поэтому нет ничего удивительного в том, что и силы их сопротивления примерно одинаковы.

Так как эффективность несущего винта при таких условиях близка к максимально возможной, малую скорость снижения можно обеспечить только посредством малой нагрузки на диск. При проектировании вертолета нагрузку на диск обычно выбирают, руководствуясь главным образом желанием получить высокие аэродинамические характеристики винта, а характеристики авторотации обычно рассчитывают, имея в виду возможность «подрыва» вблизи земли (см. разд. 7.5).

Рассмотрим теперь безмоторное снижение вертолета с точки зрения аэродинамической нагрузки лопастей. Скорость потока

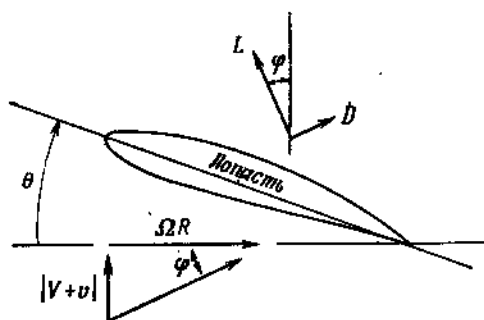


Рис. 3.9. Обтекание сечения лопасти при авторотации.

через диск, величину которой определяет коэффициент протекания $\lambda = (V + v)/(\Omega R)$, направлена вверх, так что вектор подъемной силы наклонен вперед (рис. 3.9). Чтобы сечение лопасти не потребляло и не производило мощность, сумма проекций на плоскость вращения всех сил, действующих на сечение, должна равняться нулю, т. е. должен быть равен нулю элементарный аэродинамический момент в этом сечении: $dQ = r(D - \phi L) dr = 0$. Но авторотацию создают индуктивная и профильная составляющие аэродинамического момента всего несущего винта. Поэтому, вообще говоря, энергетически нейтральным оказывается только одно сечение, а остальные либо потребляют, либо производят мощность. Так как $\phi = \arctg(|V + v|/\Omega R)$, угол протекания, большой в корневой части лопасти, уменьшается с приближением к ее концу. Следовательно, во внутренних сечениях лопасти $dQ < 0$, т. е. аэродинамический момент ускоряет вращение винта, причем энергия берется из воздушного потока. Во внешних же сечениях $dQ > 0$, аэродинамический момент тормозит винт и энергия сообщается воздушному потоку. Так как суммарная мощность винта равна нулю, ускоряющий и тормозящий аэродинамические моменты должны взаимно уравновешиваться. При заданной скорости снижения концевая скорость ΩR винта сама изменяется до тех пор, пока не достигается такое равновесие. Рис. 3.10 иллюстрирует работу сечений лопасти несущего винта при авторотации. Если угловая скорость

винта, соответствующая равновесию моментов, слегка уменьшается, то угол притекания φ возрастает во всех сечениях. При этом область ускоряющих моментов расширяется, захватывая внешние сечения, в результате чего суммарный аэродинамический момент винта становится ускоряющим. Этот момент вновь раскручивает винт до угловой скорости, соответствующей равновесию моментов. Таким образом, авторотация — устойчивый режим обтекания винта. Угол атаки $\alpha = \theta + \varphi$ увеличивается с приближением к корню лопасти, так как возрастает угол притекания. Поэтому в корневой части лопасти на режиме авторотации возникает срыв. Отрицательная крутка, которую лопастям обычно придают для улучшения характеристик винта на висении и при полете вперед, еще более увеличивает углы атаки внутренних сечений. Следовательно, с точки зрения характеристик авторотации отрицательная крутка нежелательна. Однако наибольшую часть силы тяги несущего винта создают внешние части лопастей, где велики относительные скорости воздуха, так что срыв в корневых частях, как правило, не оказывает особо неблагоприятного влияния на характеристики авторотации.

На висении поток через диск направлен вниз, а при авторотации — вверх. Вследствие изменения направления потока при переходе от висения к авторотации углы атаки сечений увеличиваются, если после отказа двигателей на висении общий шаг винта не изменяется. Избыток тормозящего аэродинамического момента уменьшает угловую скорость винта. Кроме того, расширяется зона срыва, вследствие чего снижается подъемная сила лопасти и увеличивается ее сопротивление. Уменьшение подъемной силы требует увеличения ускоряющего момента, а рост сопротивления увеличивает тормозящий момент. Следовательно, авторотация винта с большой зоной срыва может оказаться невозможной. Чтобы избежать чрезмерного увеличения зоны срыва и снижения угловой скорости вращения винта, необходимо как можно быстрее уменьшить углы установки лопастей после отказа двигателей. Обычно оптимальным общим шагом для авторотации является малый положительный угол, при котором можно поддерживать нормальную величину частоты вращения винта. Если большой зоны срыва нет, то скорость снижения слабо зависит от общего шага и частоты вращения

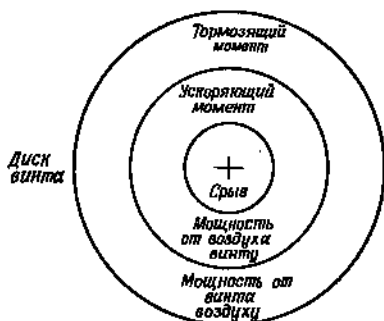


Рис. 3.10. Работа сечений лопасти несущего винта при авторотации.

винта, так как профильная мощность мало изменяется и кривая скоростей протекания на режиме турбулентного следа имеет большой наклон.

Напомним, что для энергетически нейтрального сечения $D - \varphi L = 0$, или

$$\frac{D}{L} = \frac{c_d}{c_t} = \varphi.$$

Рассмотрим график зависимости профильной характеристики c_d/c_t от α (рис. 3.11). Условие энергетической нейтральности $c_d/c_t = \varphi = \alpha - \theta$ при заданной величине θ изображается на

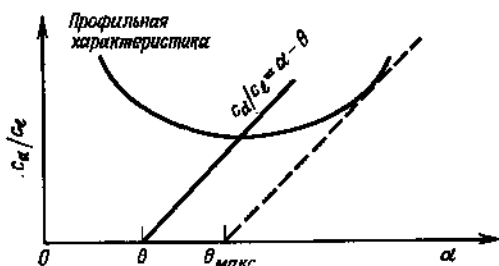


Рис. 3.11. Диаграмма авторотации.

плоскости c_d/c_t , α прямой линией. Точка пересечения этой прямой с кривой профильной характеристики определяет угол атаки, при котором рассматриваемое сечение энергетически нейтрально. График типа показанного на рис. 3.11 называют *диаграммой авторотации*. Энергетически нейтральным оказывается только одно сечение лопасти; внутренние (относительно него) сечения работают под большими углами атаки, внешние — под меньшими. Однако диаграмма авторотации дает полезные сведения о характеристиках винта в целом. Минимальной скорости снижения соответствует минимальная величина φ . Таким образом, лопасть должна работать под углом атаки, при котором отношение c_d/c_t и, следовательно, профильная мощность минимальны. Общий шаг для этого оптимального режима легко найти по диаграмме авторотации. При величинах общего шага, которые больше или меньше оптимального, отношение c_d/c_t больше минимального, поэтому скорость снижения также больше минимальной. При малых углах атаки отношение c_d/c_t возрастает вследствие того, что c_t невелико, а при больших углах атаки — вследствие срыва. Однако для многих профилей кривая профильной характеристики имеет весьма пологий минимум. Отсюда следует, что скорость снижения мало изменяется, когда θ принимает различные значения, близкие к оптимальному. Отсюда следует также, что, хотя все сечения лопасти не могут работать под оптимальным (для авторотации) углом атаки, для боль-

шей части лопасти отношение c_d/c_l может быть мало. Концевая скорость сильнее зависит от изменения общего шага, чем скорость снижения. Соотношение $c_d/c_l = \varphi = |V+v|/(\Omega r)$ показывает, что максимальной частоте вращения винта отвечает минимальная величина c_d/c_l и что вращение винта замедляется при больших и малых величинах общего шага. Диаграмма авторотации показывает далее, что существует максимальная величина $\theta_{\text{макс}}$ общего шага, при превышении которой сечение не может быть энергетически нейтральным (см. рис. 3.11). При большом угле атаки, обусловленном большим общим шагом, в сечении возникает срыв, и располагаемой подъемной силы не хватает для компенсации тормозящего аэродинамического момента, вызванного большим сопротивлением. Потребность в быстром уменьшении общего шага после отказа двигателей вытекает из необходимости не допустить превышения его предельной величины, за которой сечение уже не может быть энергетически нейтральным и частота вращения монотонно убывает, а скорость снижения возрастает.

Из теории элемента лопасти следует, что при снижении на авторотации

$$C_P = \lambda C_T + \frac{\sigma c_{d_0}}{8} = 0, \quad C_T = \frac{\sigma a}{2} \left(\frac{\theta_{0,75}}{3} - \lambda \right).$$

Исключая C_T и решая полученное уравнение относительно коэффициента протекания, получим

$$\lambda = \frac{\theta_{0,75}}{3} - \sqrt{\left(\frac{\theta_{0,75}}{3} \right)^2 + \frac{c_d}{2a}}.$$

При заданной величине общего шага отсюда можно найти λ , а затем C_T . Зная нагрузку на диск и C_T , можно рассчитать частоту вращения винта, а по величине λ и кривой скорости протекания определить скорость снижения. Таким образом можно найти скорость снижения на авторотации как функцию общего шага и определить его оптимальную величину. Однако желателен более обстоятельный численный анализ, так как важно учесть влияние срыва на характеристики винта при авторотации. Теория элемента лопасти позволяет по крайней мере оценить уменьшение общего шага, необходимое при переходе от висения к авторотации. Предполагая, что концевая скорость ΩR при этом не изменяется, из условия $2C_T/(\sigma a) = \theta_{0,75}/3 - \lambda/2$ получим

$$\begin{aligned} \Delta\theta_0 &= \frac{3}{2}(\lambda - \lambda_n) = \frac{3}{2} \left(\frac{V+v}{v_n} - 1 \right) \lambda_n = \\ &= -\frac{3}{2} \left(\frac{C_{P_0}}{C_T^{3/2}/\sqrt{2}} + 1 \right) \lambda_n = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{M} + 1 - k \right) \sqrt{C_T/2}. \end{aligned}$$

Имеется следующая литература по авторотации в вертикальном полете: [Т.56, W.102, В.51, G.53, N.19, N20, S.135, S.134, К.6]. См. также ссылки в разд. 7.5.

3.3. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ НАБОР ВЫСОТЫ

По импульсной теории мощность, требуемая для вертикального набора высоты, вычисляется по формуле

$$V + v = \frac{V}{2} + \sqrt{\left(\frac{V}{2}\right)^2 + v_b^2} \approx \frac{V}{2} + v_b,$$

причем приближенное равенство справедливо при малых скоростях набора высоты (по грубой оценке при $V/v_b < 1$; см. рис. 3.8) Следовательно, индуктивная скорость v приблизительно равна $v_b - V/2$, т. е. при наборе высоты она уменьшается вследствие увеличения массового расхода воздуха через диск несущего винта. Мощность, требуемая для набора высоты, определяется выражением $P_c = T(V+v) + P_b$. Предполагая, что скорость набора высоты не влияет на профильную мощность, найдем приращение мощности, требуемой для вертикального полета, по сравнению с висением:

$$\Delta P = P_c - P_b = T(V + v - v_b).$$

Если использовать приближенное выражение для $V+v$ при малых скоростях подъема, то прирост мощности можно определять по формуле

$$\Delta P \approx TV/2.$$

Отсюда получаем следующее выражение скорости набора высоты при заданной мощности:

$$V \approx 2\Delta P/T.$$

Данные летных испытаний хорошо согласуются с результатами расчетов по этой формуле, так как использованное приближение приемлемо почти до $V = v_b$, а это очень большая скорость для вертолетов, которые обычно не располагают значительным избытком мощности на вертикальный набор высоты. Заметим, что дополнительная мощность ΔP , требуемая для увеличения потенциальной энергии вертолета при подъеме, равна TV . Следовательно, уменьшение индуктивной мощности удваивает скорость набора высоты, возможную при заданном приращении мощности ΔP .

Для более точной оценки скорости набора высоты перепишем формулу $\Delta P = T(V + v - v_b)$ в виде

$$V = \frac{\Delta P}{T} + v_b - v.$$

Далее, из соотношения $(V + v)v = v_b^2$, полученного по импульсной теории вертикального полета, найдем

$$v = \frac{v_b^2}{V + v} = \frac{v_b^2}{\Delta P/T + v_b}.$$

Исключая v из этих равенств, придем к формуле

$$V = \frac{\Delta P}{T} \frac{2v_b + \Delta P/T}{v_b + \Delta P/T},$$

позволяющей рассчитать скорость набора высоты по заданным величинам силы тяги и избытка мощности. При малых V отсюда снова получаем $V = 2\Delta P/T$.

По теории элемента лопасти можно оценить увеличение общего шага, требуемое для набора высоты. Из соотношения $2C_T/(\sigma a) = \theta_{0,76}/3 - \lambda/2$ следует, что при малых скоростях набора высоты

$$\Delta\theta = \frac{3}{2}(\lambda - \lambda_b) \approx \frac{3}{4}\lambda_c,$$

где $\lambda \approx \lambda_b + \lambda_c/2$, причем $\lambda_c = V/(\Omega R)$. Если скорость набора высоты не предполагать малой, то

$$\Delta\theta = \frac{3}{2} \frac{V + v - v_b}{\Omega R} = \frac{3}{2} \frac{\Delta P/T}{\Omega R} = \frac{3}{2} \frac{\Delta C_P}{C_T}.$$

3.4. СОПРОТИВЛЕНИЕ ФЮЗЕЛЯЖА

Создаваемый несущим винтом поток обдувает фюзеляж, что приводит к появлению силы сопротивления фюзеляжа, которая на режимах висения и вертикального полета направлена по вертикали. Существование этого сопротивления требует увеличения силы тяги винта при заданном полетном весе и, следовательно, ухудшает аэродинамические характеристики вертолета. Чтобы оценить сопротивление фюзеляжа, рассмотрим скорость потока в полностью развитом следе винта. На режиме висения $\omega_b = 2v_b$, а при вертикальном полете, когда $V^2/v_b^2 \ll 1$,

$$V + \omega = \sqrt{V^2 + 4v_b^2} \simeq 2v_b,$$

т. е. $V + \omega \approx \omega_b$ и не зависит от скорости набора высоты. Сопротивление фюзеляжа можно выразить либо через площадь f поверхности эквивалентного сопротивления, либо через коэффициент сопротивления C_D , вычисляемый по некоторой характерной площади S , причем $f = C_D S$. Тогда дополнительная сила тяги, необходимая для преодоления сопротивления фюзеляжа, определяется выражением

$$\Delta T = \frac{1}{2} \rho \omega_b^2 f = \frac{T}{A} f,$$

или

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{l}{A} = \frac{S}{A} C_D.$$

На самом деле фюзеляж находится очень близко от винта, а не в дальнем следе. Кроме того, поле скоростей весьма неравномерно и нестационарно. Эти факторы можно учесть с помощью эмпирической поправки. Для введения такой поправки предположим, что вблизи фюзеляжа скорость потока равна nv , причем коэффициент n теоретически изменяется от 1 на диске винта до 2 в дальнем следе. Тогда

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{n^2 l}{4 A} = \frac{S}{A} \left(\frac{n^2 C_D}{4} \right).$$

Параметр $n^2 C_D/4$ можно определить путем измерения сопротивления тел, помещенных в след несущего винта. Типичное значение этого параметра равно 0,7, но он сильно зависит от положения тела в следе, соотношения размеров тела и винта, формы тела. Для набора высоты имеем аналогичную формулу:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{S}{A} C_D \left(\frac{V + nv}{2v_n} \right)^2.$$

Учитывая приближенность таких оценок, можно, по-видимому, просто принять сопротивление фюзеляжа при наборе высоты равным сопротивлению на висении.

Глауэрт [G.40] предложил следующее выражение требуемого относительного увеличения силы тяги:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{S}{A} C_D (1,22 + 0,254/C_D).$$

Второе слагаемое учитывает влияние градиента давления в следе на сопротивление тела. В работе [M.71] по результатам измерений сопротивления прямоугольных пластин, находящихся под винтом на расстоянии $(0,2 \div 0,64)R$ от него, получена формула

$$\frac{\Delta T}{T} = 0,66 \frac{S}{A} \frac{b}{2R},$$

где b — размах пластины. Таким образом, множитель $b/(2R)$ учитывает изменение скорости потока вдоль радиуса. Другой подход заключается в оценке величин n и C_D отдельно для каждого элемента фюзеляжа, помещенного в след. Согласно вихревой теории, имеем

$$n = 1 + \frac{z/R}{\sqrt{1 + (z/R)^2}}$$

на расстоянии z от несущего винта. Отсюда по справочникам можно найти соответствующий коэффициент сопротивления.

Указанные оценки весьма приближены, но в данном случае даже значительная ошибка допустима, так как отношение $\Delta T/T$ невелико. Более точное решение задачи затруднительно: требуется близкая к реальности схема следа несущего винта, учитывающая интерференцию следа и помещенного в него тела, а достаточных для построения такой схемы экспериментальных данных обычно не имеется. Известно, что скорость течения в следе значительно изменяется по радиусу и что это изменение следует принимать в расчет. Известно также, что сопротивление тела в следе периодически изменяется с большой амплитудой. Это изменение может быть причиной вибраций вертолета. Действительно, сопротивление максимально, когда тело находится на минимальном расстоянии от диска несущего винта, и быстро убывает, когда тело удаляется от плоскости диска. Такая зависимость сопротивления от расстояния до диска обусловлена периодическим изменением поля скоростей в следе. Хотя в соответствии с вихревой теорией средняя скорость потока при переходе от диска к дальнему следу увеличивается, средний скоростной напор вблизи диска значительно возрастает благодаря периодическим составляющим скорости. Если тело, помещенное в след, велико, то и загромождение следа оказывается значительным. Уменьшение эффективной площади диска, особенно вследствие загромождения следа концевых сечений, снижает эффективность несущего винта. При полете вертолета вперед набегающий поток сдувает след назад, так что за диапазоном переходных режимов сопротивление фюзеляжа становится небольшим.

По сопротивлению фюзеляжа имеется следующая литература: [С.32, F.3, M.71, M.47, M.46, B.126, С.31].

3.5. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ДВУХВИНТОВЫХ НЕСУЩИХ СИСТЕМ

При работе двух или большего числа несущих винтов, расположенных очень близко друг к другу, поле скоростей каждого винта изменяется; аэродинамические характеристики такой несущей системы не равны сумме характеристик отдельных винтов. Такие несущие системы имеют вертолеты соосной, продольной (с типичным перекрытием винтов в 30—50%) и поперечной схем. Мы сопоставим аэродинамические характеристики несущей системы, образуемой двумя винтами одинакового диаметра, с характеристиками двух отдельных винтов, создающих такую же силу тяги. Предельным случаем является соосная система, у которой площадь несущей поверхности точно равна половине площади отдельных винтов и, значит, нагрузка на диск вдвое больше. Следовательно, при работе несущих винтов в соосной системе потребная индуктивная мощ-

ность возрастает в $\sqrt{2}$ раз, т. е. на 41%. Этот вывод основан на схеме активного диска, которая приемлема, если расстояние между винтами по вертикали не превышает 10% радиуса несущего винта. Рассмотрим случай двух винтов, которые работают близко один от другого, расположены в одной плоскости, но не перекрываются. Согласно вихревой теории, нормальная (к диску) составляющая индуктивной скорости равна нулю всюду вне диска в его плоскости. Таким образом, потерь мощности на интерференцию в этом случае нет. Если несущие винты разделены некоторым расстоянием по вертикали, то даже при отсутствии перекрытия может существовать интерференция, благоприятная или неблагоприятная. Экспериментальные данные по этому вопросу противоречивы. В работе [D.48] получено уменьшение индуктивной мощности на 15% при расстоянии $2,06R$ между винтами по вертикали, тогда как в работе [S.215] не обнаружено значительных отклонений от характеристик отдельного винта.

Несущие винты с перекрытием при малом расстоянии по вертикали (менее $0,1R$) имеют общую скорость протекания через перекрывающиеся части дисков. При этом для винтов с одинаковой силой тяги нагрузки перекрывающихся частей оказываются больше, чем у отдельного винта, а значит, больше и местные индуктивные затраты мощности. С уменьшением расстояния по вертикали увеличение мощности достигает величины 41%, соответствующей соосным винтам. Когда расстояние по вертикали между соосными винтами возрастает, след верхнего винта вследствие поджатия оказывает влияние на всю меньшую часть диска нижнего винта, и в результате потери на интерференцию снижаются.

Рассмотрим соосные несущие винты с большим расстоянием по вертикали, так что нижний винт работает в дальнем следе верхнего. Нижний винт на верхний не влияет, поэтому $v_{н.в}^2 = T/(2\rho A) = v_v^2$ (индекс «в.в» будет означать верхний винт, индекс «н.в» — нижний). В плоскости диска нижнего винта след верхнего винта имеет площадь $A/2$, а скорость течения в нем равна $2v_{н.в}$. Таким образом, на половине площади диска нижнего винта скорость равна $v_{н.в}$, а на другой половине — $v_{н.в} + 2v_{н.в}$. Тогда, предполагая, что в дальнем следе нижнего винта скорость распределена равномерно и равна $w_{н.в}$, по законам сохранения импульса и энергии получаем $T_{н.в} = \rho A \times (v_{н.в} + v_{н.в}) w_{н.в} - 2\rho A v_{н.в}^2$ и $P_{н.в} = T_{н.в} (v_{н.в} + v_{н.в}) = \rho A \times (v_{н.в} + v_{н.в}) w_{н.в}^2 / 2 - 2\rho A v_{н.в}^3$. Исключая из этих равенств $T_{н.в}$, получим $w_{н.в} = 2v_{н.в} + v_{н.в}$ и $v_{н.в} = v_v (\sqrt{17} - 3)/2 = 0,56 v_v$. Так как $(P/T)_{н.в} = v_{н.в}$, а $(P/T)_{в.в} = v_{в.в} + v_{н.в}$, для обоих винтов имеем $P/T = 2,56 v_v$. Для двух отдельных винтов $P/T = 2v_v$.

Таким образом, вследствие интерференции индуктивная мощность возрастает на 28%, а при уменьшении расстояния между винтами до нуля прирост мощности увеличивается до 41%.

Для исследования (на базе импульсной теории) работы несущих винтов с перекрытием рассмотрим два винта одинакового диаметра, но, возможно, с различными силами тяги. Пусть mA — площадь зоны перекрытия; T_1 и T_2 — силы тяги винтов, причем сумма $T = T_1 + T_2$ постоянна; P_1 и P_2 — индуктивные затраты мощности вне зоны перекрытия; P_m — индуктивные затраты внутри зоны перекрытия; v_1 , v_2 и v_m — соответствующие индуктивные скорости. Предполагается, что расстояние между винтами по вертикали пренебрежимо мало, так что в зоне перекрытия оба винта имеют одинаковую индуктивную скорость v_m . При равномерной нагрузке силы тяги винтов, развиваемые вне зоны перекрытия, равны соответственно $T_1(1-m)$ и $T_2(1-m)$, а сила тяги внутри этой зоны будет $m(T_1 + T_2)$. Тогда по формулам $dT = 2\rho v^2 dA$ и $dP = v dT$ импульсной теории получим:

$$v_1 = \sqrt{T_1/(2\rho A)}, \quad v_2 = \sqrt{T_2/(2\rho A)}, \quad v_m = \sqrt{(T_1 + T_2)/(2\rho A)},$$

$$P_1 = T(1-m)v_1, \quad P_2 = T_2(1-m)v_2, \quad P_m = m(T_1 + T_2)v_m.$$

Суммарная мощность P равна $P_1 + P_2 + P_m$. Для отдельных винтов

$$P|_{m=0} = (P_1 + P_2)|_{m=0} = (T_1^{3/2} + T_2^{3/2})\sqrt{2\rho A}.$$

Изменение мощности вследствие интерференции

$$\Delta P = (P_1 + P_2 + P_m) - (P_1 + P_2)|_{m=0} =$$

$$= m[(T_1 + T_2)^{3/2} - (T_1^{3/2} + T_2^{3/2})]/\sqrt{2\rho A}.$$

Если это изменение отнести к суммарной мощности отдельных винтов, то получаем выражение

$$\frac{\Delta P}{P} = m \left[\frac{1}{\tau_1^{3/2} + \tau_2^{3/2}} - 1 \right],$$

где величины $\tau_1 = T_1/T$ и $\tau_2 = T_2/T$ (так что $\tau_1 + \tau_2 = 1$) характеризуют распределение суммарной силы тяги между винтами. Когда силы тяги несущих винтов одинаковы, $\tau_1 = \tau_2 = 1/2$ и относительные потери мощности на интерференцию $\Delta P/P$ равны $0,41m$. В случае соосных винтов (зона перекрытия охватывает всю площадь винтов, $m = 1$) получаем указанную ранее величину 41%. В общем случае потери мощности на интерференцию пропорциональны относительной площади зоны перекрытия.

Аэродинамические характеристики на режиме висения двухвинтовой несущей системы с площадью перекрытия mA можно рассчитать и другим способом. Для расчета используется вы-

ражение мощности через нагрузку на несущую поверхность всей системы: $P = \sqrt{T/(2\rho A_{\text{сист}})}$, где $A_{\text{сист}} = (2-m)A$. Тогда отношение суммарной мощности системы к суммарной мощности отдельных винтов равно

$$\frac{P}{P_{\text{отд}}} = \left(\frac{T}{T_{\text{отд}}}\right)^{3/2} \left(\frac{2}{2-m}\right)^{1/2}.$$

Если силы тяги в обоих случаях равны, то относительные потери мощности на интерференцию определяются по формуле

$$\frac{\Delta P}{P} = \left(\frac{2}{2-m}\right)^{1/2} - 1.$$

Отсюда, как и раньше, в предельном случае соосных несущих винтов получим $\Delta P/P = 0,41$. Однако при малых площадях перекрытия $\Delta P/P \approx 0,25m$, и вычисляемые по этой формуле потери мощности поначалу растут с увеличением перекрытия не столь быстро, как по предыдущей формуле. Различие объясняется тем, что во втором способе расчета нагрузка на диск в зоне перекрытия оказывается меньше, чем в первом, а потому и потери мощности при малых перекрытиях меньше. Первая формула, по которой потери на интерференцию больше, по-видимому, лучше соответствует реальным характеристикам несущей системы вертолетов продольной схемы. Заметим, наконец, что если расстояние между валами несущих винтов равно l , то относительная площадь перекрытия равна

$$m = \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{l}{2R}\right) - \frac{l}{2R} \sqrt{1 - \left(\frac{l}{2R}\right)^2} \right].$$

Если перекрытие мало ($l = 2R - \Delta l$ при $\Delta l/R \ll 1$), то $m \approx 1,2[\Delta l/(2R)]^{3/2}$.

Степневский [S.178, S.179, S.180] решил задачу об интерференции двух несущих винтов на режиме висения в рамках элементарно-импульсной теории. Решение основано на предположении, что расстояние по вертикали между винтами мало, поэтому скорость протекания в зоне перекрытия для обоих винтов одинакова. Вне зоны перекрытия индуктивные скорости v_1 и v_2 вычисляются по обычным формулам элементарно-импульсной теории (см. разд. 2.5). Внутри зоны перекрытия рассмотрим элемент площадью dA , расположенный на радиусе r_1 одного винта и на радиусе r_2 второго винта. Если $\lambda_m = v_m/(\Omega R)$ — коэффициент протекания в зоне перекрытия, то по импульсной теории $dT = 2\rho v_m^2 dA$, или $dC_T = (2/\pi)\lambda_m^2 dA$. По теории элемента лопасти $dC_{T1} = (\sigma_1 a/4\pi) (\theta_1 r_1 - \lambda_m) dA$ и $dC_{T2} = (\sigma_2 a/4\pi) (\theta_2 r_2 - \lambda_m) dA$, где θ_1 и θ_2 — углы установки сечений лопастей первого и второго винтов на радиусах r_1 и r_2 соответственно. Приравняв dC_T сумме $dC_{T1} + dC_{T2}$, получим

квадратное уравнение относительно λ_m , которое имеет следующее решение:

$$\lambda_m = - \left(\frac{\sigma_1 a}{16} + \frac{\sigma_2 a}{16} \right) + \sqrt{\frac{a^2}{256} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \frac{a}{8} (\sigma_1 \theta_1 r_1 + \sigma_2 \theta_2 r_2)}.$$

Теперь по величинам v_1 , v_2 и v_m можно определить силу тяги и мощность:

$$T = \int 2\rho v_1^2 dA + \int 2\rho v_2^2 dA + \int 2\rho v_m^2 dA,$$

$$P = \int 2\rho v_1^3 dA + \int 2\rho v_2^3 dA + \int 2\rho v_m^3 dA,$$

причем первый и второй интегралы берутся по областям дисков первого и второго винтов вне зоны перекрытия, а третий интеграл — по зоне перекрытия. С другой стороны, можно использовать формулы теории элемента лопасти, если интегрировать как по радиусу, так и по азимуту. Сравнение с данными измерений скоса потока и мощности показывает, что решение Степневского дает хорошие результаты. Степневский нашел, что интерференция на висении несущих винтов без перекрытия практически незначительна, а при $0 < \Delta l / (2R) < 0,4$ относительные сила тяги и мощность изменяются приблизительно в диапазонах $1 > T/T_{\text{отд}} > 0,94$ и $1,1 < P/P_{\text{отд}} < 1,2$. Здесь P — индуктивная мощность, а $P_{\text{отд}}$ — индуктивная мощность отдельных несущих винтов при условии, что скорость протекания распределена равномерно. Следовательно, потери на интерференцию включают индуктивные потери отдельных винтов, обусловленные неравномерностью потока.

Характеристикам двухвинтовых несущих систем посвящены также работы: [F.5, H.43, D.48, S.215, B.31].

3.6. ВЛИЯНИЕ БЛИЗОСТИ ЗЕМЛИ

Когда несущий винт работает на режиме висения вблизи земли, спутная струя наталкивается на землю, и индуктивная скорость в плоскости диска уменьшается. Следовательно, близость земли уменьшает потребную мощность при заданной силе тяги, или, что то же самое, увеличивает силу тяги при заданной мощности. Это явление называют *воздушной подушкой*. На режиме висения воздушная подушка позволяет увеличить допустимый полетный вес или высоту над уровнем моря. Увеличение силы тяги вблизи земли облегчает также «подрыв» вертолета при посадке. В экспериментах с несущим винтом на висении следует учитывать наличие воздушной подушки: либо винт должен быть достаточно далеко от земли, чтобы ее влиянием можно было пренебречь, либо в экспериментальные данные нужно ввести поправку на влияние близости земли. Для

теоретического исследования воздушной подушки под плоскостью, представляющей поверхность земли, помещают зеркальное отражение несущего винта, так что граничное условие непротекания через поверхность земли выполняется автоматически. Однако основным источником сведений об аэродинамических характеристиках несущего винта на воздушной подушке служит эксперимент.

Влияние близости земли можно представить как уменьшение индуктивной скорости в плоскости диска в $k_{в.п.}$ раз. Тогда при одинаковых силах тяги отношение требуемой индуктивной мощности к той же мощности вне воздушной подушки будет

равно $C_P/C_{P\infty} = k_{в.п.}^3$. С дру-

гой стороны, влияние близости земли можно представить как увеличение силы тяги при постоянной мощности (рис. 3.12).

Если мощность одна и та же, то $\lambda C_T = \lambda_{\infty} C_{T\infty}$ или $T/T_{\infty} =$

$= v_{\infty}/v = 1/k_{в.п.}$. Таким обра-

зом, увеличение силы тяги можно выразить через изменение индуктивной скорости. Основ-

ным параметром является расстояние z от несущего винта до земли, выраженное в долях радиуса или диаметра винта. Если это расстояние превышает диаметр винта ($z/R > 2$),

то воздушная подушка, как

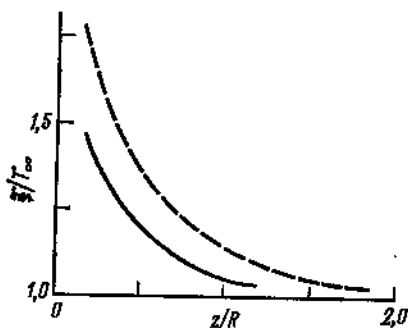


Рис. 3.12. Влияние воздушной подушки — увеличение силы тяги при постоянной мощности.

--- малая величина C_T/σ ; ——— большая величина C_T/σ .

правило, не сказывается. Обнаружена также более слабая зависимость влияния воздушной подушки от нагрузки лопасти, т. е. от параметра C_T/σ . При полете вперед влияние близости земли быстро ослабевает с увеличением скорости, так как след винта подходит к поверхности земли под все меньшим углом. Следовательно, влияние воздушной подушки зависит еще от ветра, который уносит след из-под винта.

Зброжек [Z.1] использовал данные модельных и летных экспериментов, чтобы найти отношение T/T_{∞} при постоянной мощности как функцию z/R и C_T/σ . Бетц [B.68] теоретически исследовал аэродинамические характеристики винта вблизи земли. Он нашел, что при малых расстояниях от земли ($z/R \ll 1$) и постоянной силе тяги P/P_{∞} равно $2z/R$. Найт и Хафнер [K.51] провели экспериментальные и теоретические исследования воздушной подушки. Расчеты выполнены по вихревой теории с введением отраженных вихрей под поверхностью земли. Таким образом, для равномерно нагруженного активно-го диска след был образован цилиндрической вихревой пеле-

ной, простирающейся от диска до земли, и отражением этой пелены в плоскости, представляющей землю. Результаты расчетов хорошо согласовались с экспериментальными данными¹⁾. Простой анализ явления провели Чизмен и Беннет [С.50]. Они также использовали метод отражения, но несущий винт был представлен источником. Для режима висения получена формула

$$T/T_{\infty} = [1 - (R/4z)^2]^{-1},$$

результаты расчетов по которой удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Хейдн [Н.57] обработал результаты летных испытаний с целью найти поправку на влияние близости земли, которую нужно вводить в аэродинамические характеристики несущего винта на висении. Вводя такую поправку по формуле $C_p = C_{p_0} + k_{в.п}(C_{p_0})_{\infty}$, он получил

$$k_{в.п} = [0,9926 + 0,03794(2R/z)^2]^{-1}.$$

Влиянию близости земли на режиме висения посвящены также работы: [G.132, F.45, M.116a, K.56, N.10, L.29].

¹⁾ См. также работу В. А. Кожевникова [190]. — *Прим. перев.*

Полет вперед I

В этой главе представлен предварительный анализ работы несущего винта вертолета при полете вперед. В таком полете плоскость вращения винта приблизительно горизонтальна, а скорость потока, обтекающего лопасть, равна сумме составляющей

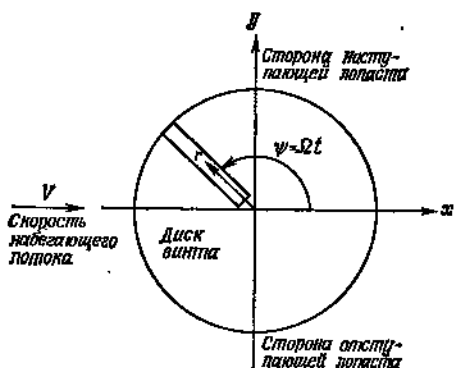


Рис. 4.1. Условия работы несущего винта вертолета при полете вперед.

Асимметричное (относительно продольной оси) распределение скоростей оказывает сильное влияние на работу несущего винта при полете вперед. Движение лопасти и ее нагрузки становятся периодическими, причем основная частота равна частоте Ω вращения винта. Именно зависимость движения лопасти и ее нагрузок от азимута ψ делает анализ работы винта при полете вперед гораздо более трудным, чем на режиме висения.

Вследствие осевой симметрии обтекания анализ работы винта на висении сводится в основном к исследованию аэродинамических характеристик. При полете же вперед асимметрия обтекания вызывает периодическое движение лопасти, которое в свою очередь влияет на аэродинамические силы. Таким образом, анализ работы винта при полете вперед должен состоять в совместном исследовании как аэродинамических, так и динамических характеристик лопасти. Характер движения лопасти при полете

скорости полета вперед и скорости собственного вращения лопасти (рис. 4.1). Обтекание несущего винта уже не осесимметричное, как на режимах висения и вертикального полета. Условия работы лопасти периодически изменяются при изменении угла между ее осью и направлением полета. У наступающей лопасти скорость относительно воздуха больше окружной скорости ее вращения, у отступающей лопасти — меньше.

вперед рассмотрен в гл. 5. В данной главе будет выяснен ряд вопросов аэродинамики несущего винта, с которыми читатель уже познакомился при анализе работы винта в вертикальном полете. В частности, мы рассмотрим применение импульсной теории винта для расчета индуктивной скорости и потребной мощности при полете вертолета вперед.

4.1. ИМПУЛЬСНАЯ ТЕОРИЯ ВИНТА ПРИ ПОЛЕТЕ ВПЕРЕД

4.1.1. ИНДУКТИВНАЯ МОЩНОСТЬ

Импульсная теория позволяет найти индуктивную мощность винта при полете вперед. Как и на висении, представим индуктивные затраты мощности через индуктивную скорость $v = P_i/T$. В теории элемента лопасти предполагалось, что индуктивная скорость равномерно распределена по диску винта. Для полета вперед это предположение менее приемлемо, чем для висения. Но при больших скоростях полета индуктивная скорость мала по сравнению с другими составляющими скорости потока, обтекающего лопасть, так что предположение о равномерной индуктивной скорости все же можно принять. При малых скоростях полета изменение скоростей протекания по диску имеет важное значение, особенно для расчета вибраций винта и нагрузок лопасти. Итак, снова представим несущий винт схемой равномерно нагруженного активного диска. При полете вперед такой диск можно рассматривать как круглое крыло.

Для тонкого крыла размаха b , движущегося со скоростью V и создающего подъемную силу T , получено следующее выражение минимального индуктивного сопротивления:

$$D_i = T^2 / (2\rho AV^2),$$

где $A = \pi(b/2)^2$ — площадь круга диаметром b [вероятно, более привычна форма этого выражения $C_{D_i} = C_L^2 / (\pi\lambda)$, где λ — удлинение крыла]. Тогда индуктивная скорость равна

$$v = P_i/T = VD_i/T = \frac{T}{2\rho AV}.$$

Минимальное сопротивление соответствует эллиптической нагрузке крыла. У равномерно нагруженного винта распределение нагрузки по размаху круговое (частный случай эллиптического). При больших скоростях полета вихревой след винта сильно скошен и располагается почти в плоскости диска, как у крыла. Кроме того, формула индуктивного сопротивления получена путем анализа течения в дальнем следе крыла (в плоскости Треффца), так что она справедлива при любом удлинении. Таким образом, формула $v = T / (2\rho AV)$ приемлема для скорости,

индуцируемой несущим винтом при больших скоростях полета вперед. У круглого крыла, эквивалентного несущему винту, размах равен диаметру винта, так что A — просто площадь диска. В теории несущей линии v интерпретируют как действительную индуктивную скорость на крыле, которая при большом удлинении распределена равномерно. На круглом же крыле, удлинение которого $\lambda = 4/\pi = 1,27$, можно ожидать значительного изменения индуктивной скорости по диску.

Итак, мы получили выражения индуктивной мощности для вертикального полета и для полета вперед с большой скоростью. Чтобы можно было рассчитать индуктивную мощность на любом режиме работы винта, нужно найти выражение, связывающее

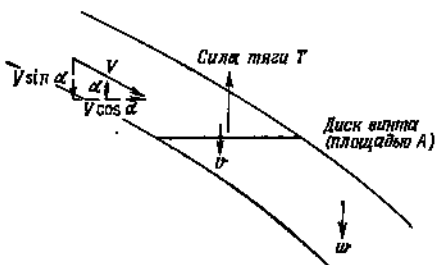


Рис. 4.2. Схема течения, используемая в импульсной теории несущего винта при полете вперед.

образом, можно получить пригодное для всех режимов выражение индуктивной скорости, если найти универсальную формулу для массового расхода через поверхность площади A . На это обстоятельство впервые обратил внимание Глауэрт [G.85].

Рассмотрим несущий винт, обтекаемый потоком со скоростью V под углом атаки α — углом между скоростью невозмущенного потока и диском винта (рис. 4.2). На диске индуктивная скорость равна v , а в дальнем следе она вдвое больше ($w = 2v$) и считается параллельной вектору силы тяги винта. По теореме импульсов $T = \dot{m}2v$, где массовый расход $\dot{m} = \rho A U$. Следуя Глауэрту [G.85], будем определять результирующую скорость U по формуле

$$U^2 = (V \cos \alpha)^2 + (V \sin \alpha + v)^2 = V^2 + 2Vv \sin \alpha + v^2.$$

Следовательно, $T = 2\rho A v \sqrt{V^2 + 2Vv \sin \alpha + v^2}$. По закону сохранения энергии находим индуктивную мощность $P = \dot{m} \left\{ (1/2) [(V \sin \alpha + 2v)^2 + (V \cos \alpha)^2] - V^2/2 \right\} = T [V \sin \alpha + v]$. При больших скоростях полета ($V \gg 0$) имеем $T = \rho A V 2v$, а на висении ($V = 0$) получаем $T = 2\rho A v^2$. Таким образом, выражение силы тяги имеет соответствующие предельные формы.

Для промежуточных скоростей полета строгое теоретическое обоснование полученных формул отсутствует. Однако аэродинамические характеристики несущего винта, рассчитанные по этим формулам, хорошо согласуются как с экспериментальными данными, так и с результатами расчетов по вихревой теории. Поэтому указанные формулы можно считать приемлемыми во всем диапазоне скоростей полета. В выражении $P = T(V \sin \alpha + v)$ слагаемое Tv определяет индуктивную мощность, а слагаемое $TV \sin \alpha$ — мощность, затрачиваемую на подъем по вертикали и на продвижение вертолета вперед (преодоление вредного сопротивления). Как и в случае вертикального полета, это соотношение можно представить в безразмерном виде: $P/P_s = = P/(Tv_n) = V(\sin \alpha + v)/v_n$, где по-прежнему $v_n^2 = T/(2\rho A)$.

Индуктивная скорость определяется выражением

$$v = v_n^2 [(V \cos \alpha)^2 + (V \sin \alpha + v)^2]^{-1/2}.$$

Введем безразмерные составляющие скорости — параллельную диску винта и нормальную к нему. Эти безразмерные составляющие, называемые соответственно характеристикой режима работы винта μ и коэффициентом протекания λ , определяются формулами

$$\mu = \frac{V \cos \alpha}{\Omega R}, \quad \lambda = \frac{V \cos \alpha + v}{\Omega R} = \mu \operatorname{tg} \alpha + \lambda_i.$$

Тогда индуктивная скорость предстанет в виде индуктивного коэффициента протекания

$$\lambda_i = \frac{C_T}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}.$$

Для определения v или λ_i в общем случае необходимо решить уравнение 4-го порядка. Вместо этого можно рассчитать λ , решая последовательными приближениями по методу Ньютона-Рафсона уравнение $f(\lambda) = \lambda - \mu \operatorname{tg} \alpha - C_T/(2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}) = 0$, т. е. вычисляя итерации по формуле $\lambda_{n+1} = \lambda_n - (f/f')_n$, или

$$\lambda_{n+1} = \left[\frac{\mu \operatorname{tg} \alpha + \frac{C_T(\mu^2 + 2\lambda^2)}{2(\mu^2 + \lambda^2)^{3/2}}}{1 + \frac{C_T \lambda}{2(\mu^2 + \lambda^2)^{3/2}}} \right]_n.$$

Если в качестве нулевого приближения взять $\lambda = \mu \operatorname{tg} \alpha + C_T/(2\sqrt{\mu^2 + C_T/2})$ то, как правило, оказывается достаточно трех-четырёх итераций.

При больших скоростях полета, когда $\mu \gg \lambda$, формула импульсной теории принимает вид $\lambda_i \approx C_T/(2\mu)$, или $v = = T/(2\rho AV \cos \alpha)$, т. е. совпадает с формулой теории круглого крыла. Эта аппроксимация полезна тем, что для расчета λ_i не

требуется последовательных приближений. На рис. 4.3 приведена кривая индуктивных скоростей при полете вперед для случая $\alpha = 0$ (в этом случае можно найти точное аналитическое решение). Видно, что с увеличением скорости полета индуктивная скорость уменьшается вследствие роста массового расхода воздуха через диск. Данные на рис. 4.3 показывают, что аппроксимация $\lambda_i \approx C_T/2\mu$ вполне приемлема при $\mu/\lambda_b > 1,5$. Чтобы исключить слишком большие значения λ_i при малых μ , вместо $\lambda_i \approx C_T/(2\mu)$ можно положить $\lambda_i = C_T/(2\sqrt{\mu^2 + C_T/2})$,

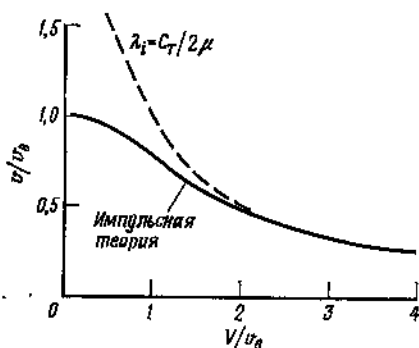


Рис. 4.3. Кривая индуктивных скоростей при полете вперед ($\alpha = 0$).

однако вторая формула дает значения индуктивного коэффициента протекания, которые несколько меньше точных. Поэтому лучше найти точное значение λ_i методом последовательных приближений. На рис. 3.8 результаты импульсной теории были представлены в виде графика зависимости $P/P_b = (V + v)/v_b$ от относительной скорости V/v_b вертикального полета. Обобщая эту форму представления результатов, построим графики зависимости $P/P_b = (V \sin \alpha + v)/v_b$ от нормальной к диску относительной скорости $V \sin \alpha/v_b$, считая параллельную диску относительную скорость $V \cos \alpha/v_b$ параметром. (Вместо этого можно построить графики λ/λ_b в зависимости от $\mu \operatorname{tg} \alpha/\lambda_b$ при заданных величинах μ/λ_b . Так как плоскость диска несущего винта не вполне горизонтальна, проекции $V \sin \alpha$ и $V \cos \alpha$ не совпадают с вертикальной и горизонтальной скоростями.) Такие графики приведены на рис. 4.4, причем для их построения индуктивная скорость была представлена в виде

$$V \sin \alpha = V \sin \alpha + v - v_b^2 [(V \cos \alpha)^2 + (V \sin \alpha + v)^2]^{-1/2}.$$

При полете вперед индуктивная мощность всегда меньше, чем в вертикальном полете (вследствие добавления параллельной диску скорости $V \cos \alpha$). На рис. 4.4 приведены кривые, полученные по импульсной теории, и соответствующие кривые, при построении которых были сделаны две эмпирические поправки. Из рисунка видно, что, во-первых, реальная индуктивная мощность на 5—20% больше той, которую дает импульсная теория. Поэтому в формулу индуктивной мощности следует ввести поправочный коэффициент k , так что $P_i = kT v$. Во-вторых, для

вертикального полета на режиме вихревого кольца построить кривую индуктивных скоростей можно только по экспериментальным данным. Видно, однако, что при $\mu/\lambda_b > 1$ результаты расчетов по импульсной теории не обнаруживают особенностей, свойственных режиму вихревого кольца. При достаточно больших скоростях полета вперед снижение вертолета с умеренной скоростью не создает никаких расчетных проблем, так как вихри следа несущего винта не скапливаются под винтом, а сносятся

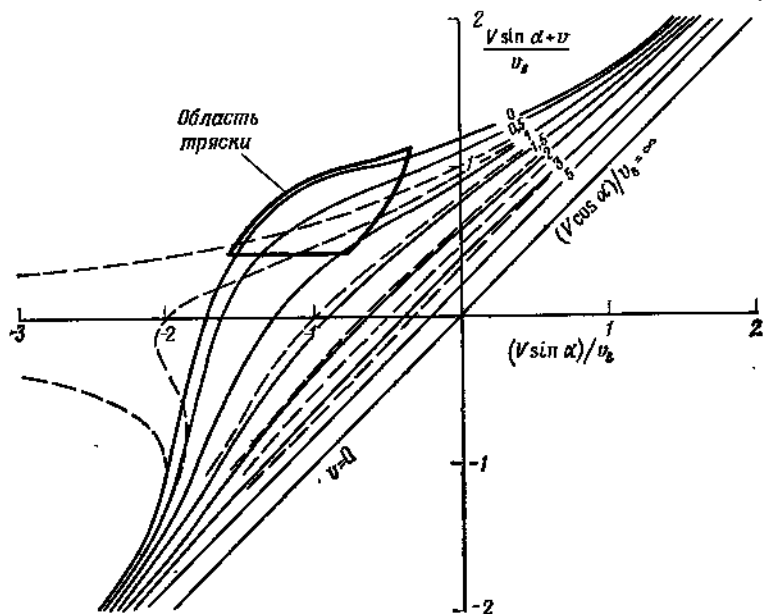


Рис. 4.4. Мощность, потребляемая несущим винтом при полете вперед. --- импульсная теория; — с учетом эмпирических поправок.

назад. Следовательно, при полете вперед импульсная теория дает удовлетворительные результаты и на режиме вихревого кольца, если ввести поправочный коэффициент k . На рис. 4.4 показаны также границы области тряски, которая наблюдается в полете на режиме вихревого кольца и исчезает при достаточно больших скоростях полета вперед. Заметим, наконец, что масштаб на рис. 4.4 служит скоростью $v_b = 0,639 \sqrt{T/A}$ м/с (нагрузка на диск выражена в Па). В типичных случаях v_b составляет от 8 до 13 м/с.

Пригодную при больших скоростях полета приближенную формулу $\lambda_i \approx C_T / (2\mu)$ можно переписать в виде $v \approx v_b^2 / (V \cos \alpha)$. Последнее соотношение изображено на рис. 4.4 прямой, которая

параллельна прямой $v = 0$. Можно видеть, что приближенная формула вполне приемлема при $V \cos \alpha / v_a > 1,5$. При типичных для вертолетов нагрузках на диск этому условию соответствуют скорости V полета, превосходящие 13—18 м/с. Если перейти к характеристике режима полета, то условие $\mu / \lambda_a > 1,5$ в типичных случаях дает $\mu > 0,1$. Таким образом, несущий винт действует как круглое крыло, но при очень малых скоростях полета. Диапазон скоростей (соответствующий приблизительно диапазону $0 < \mu < 0,1$), при которых след уже не располагается целиком под винтом, но еще имеет большую протяженность по вертикали, называют *режимом малых μ* (*переходным режимом*). Работа винта на режиме малых μ имеет ряд особенностей, которые не следуют из общего выражения индуктивной скорости. Особенно важное значение имеют большие нагрузки лопастей и вибрации, обусловленные влиянием вихря следа.

4.1.2. НАБОР ВЫСОТЫ, СНИЖЕНИЕ И АВТОРОТАЦИЯ ПРИ ПОЛЕТЕ ВПЕРЕД

Если учитывать и профильные потери P_0 , то для полета вперед требуется мощность

$$P = P_0 + TV \sin \alpha + kT v.$$

Слагаемое $TV \sin \alpha$ выражает сумму мощностей, расходуемых на преодоление вредного сопротивления и на набор высоты, для чего необходима составляющая $T \sin \alpha$ силы тяги в направлении

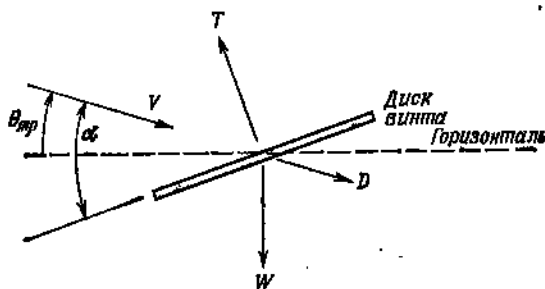


Рис. 4.5. Силы, действующие на вертолет при полете вперед.

скорости v . Чтобы найти угол атаки α диска, рассмотрим условие баланса сил, действующих на вертолет, т. е. силы тяги T винта, веса W вертолета и его сопротивления D (рис. 4.5). Если $\theta_{гр}$ — угол наклона траектории полета, то скорость набора высоты V_c равна $V \theta_{гр}$. При малых углах условие равновесия в проекциях на вертикаль и горизонталь приводит к равенствам $\alpha = \theta_{гр} + D/T$ и $T = W$. Таким образом, получаем уравнение

$$TV \sin \alpha = TV_c + DV,$$

в котором первое слагаемое правой части обозначает мощность, расходуемую на набор высоты, а второе — мощность, идущую на преодоление вредного сопротивления. (В гл. 5 будет дан более подробный вывод условия баланса сил, действующих на вертолет, и формул для аэродинамических характеристик.) При достаточно больших скоростях полета вперед можно записать $v \approx T/(2\rho AV \cos \alpha) \approx T/(2\rho AV)$. Решая с учетом этого соотношения уравнение мощностей относительно скорости набора высоты, получим

$$V_c = [P - (P_0 + VD + kT^2/(2\rho AV))]/T.$$

Так как индуктивная мощность при полете вперед не зависит от скорости набора высоты или снижения, выражению V_c можно придать простую и наглядную форму. Предполагая, что профильная мощность и сопротивление вертолета также не зависят от скорости набора высоты или снижения, имеем

$$V_c = (P - P_{гор})/T = \Delta P/T,$$

где $P_{гор}$ — мощность, требуемая для горизонтального полета с той же скоростью. Таким образом, скорость набора высоты или снижения определяется лишь избытком мощности ΔP . Поэтому характеристики набора высоты и снижения на авторотации можно найти, зная располагаемую мощность и мощность, требуемую для горизонтального полета. В частности, максимальная скорость подъема достигается, когда располагаемая мощность максимальна, а скорость полета равна скорости, при которой мощность, требуемая для горизонтального полета, минимальна. Минимальная скорость снижения на авторотации достигается при той же скорости полета вперед. Более подробно аэродинамические характеристики вертолета рассмотрены в гл. 6.

4.1.3. КОЭФФИЦИЕНТ КОНЦЕВЫХ ПОТЕРЬ

Тот факт, что число лопастей конечно, при полете вперед, как и на висении, приводит к ухудшению аэродинамических характеристик винта, которое схема активного диска не учитывает. Нагрузка может быть любым способом распределена по диску вплоть до его кромки, тогда как на реальной лопасти подъемная сила сечения в концевой части постепенно падает до нуля. В результате уменьшается сила тяги или возрастает индуктивная мощность. Уменьшение нагрузки концевой части можно учесть с помощью коэффициента концевых потерь B , предположив, что при $r > BR$ сечения лопасти не создают подъемной силы, но имеют сопротивление. В разд. 2.6.1 приведено несколько формул для расчета B . Обычно полагают $B = 0,97$.

В импульсной теории винта при полете вперед концевые потери можно рассматривать как результат уменьшения площади

диска до эффективной площади $A_{эфф} = B^2 A$. Так как индуктивная скорость при полете вперед пропорциональна нагрузке на диск, эмпирический коэффициент k в формуле индуктивной мощности ($P = kTv$), учитывающий только концевые потери, равен B^{-2} , т. е. по меньшей мере $k = 1,05$. (Для режима висения, когда индуктивная скорость пропорциональна $\sqrt{T/A}$, было получено $k = B^{-1}$.) Коэффициент концевых потерь можно ввести в общее соотношение импульсной теории, положив $v_{2в} = T/(2\rho A_{эфф}) = T/(2\rho AB^2)$.

Наличие у лопастей неоперенной части не оказывает прямого влияния на индуктивную скорость при полете вперед: по теории крыла индуктивная скорость зависит не от площади крыла, а от квадрата его размаха. Наличие неоперенной части влияет на эффективное распределение нагрузки по размаху винта и, следовательно, увеличивает индуктивную мощность по сравнению с оптимальной величиной, соответствующей эллиптическому распределению нагрузки. Однако неоперенная часть не является главным фактором, изменяющим распределение нагрузки при полете вперед. Ограничения по срыву на отступающей лопасти, скорости обтекания которой минимальны по диску, приводят к концентрации нагрузки в передней и задней частях диска, в результате чего эффективный размах несущей системы уменьшается.

4.2. ВИХРЕВАЯ ТЕОРИЯ ВИНТА ПРИ ПОЛЕТЕ ВПЕРЕД

При полете вперед набегающий поток уносит спиральные вихри, сходящие с концов лопастей, назад (вследствие наличия составляющей скорости μ , параллельной диску) и вниз (вследствие наличия составляющей скорости λ , нормальной к диску). Поэтому след состоит из вихревых нитей, которые сходят с каждой лопасти и имеют форму скошенных спиралей (рис. 4.6). Угол скоса следа $\chi = \text{arctg}(\mu/\lambda)$ можно надежно рассчитать по импульсной теории. Режимам малых μ ($0 < \mu/\lambda_v < 1,5$) приблизительно соответствует диапазон $0 < \chi < 60^\circ$. При вращении несущего винта положения лопастей относительно отдельных вихрей следа периодически изменяются, что вызывает сильные изменения поля индуктивных скоростей, в котором работают лопасти, а значит, и нагрузок лопастей. Таким образом, при полете вперед индуктивные скорости на самом деле распределены весьма неравномерно. Взаимодействие между лопастями и следом особенно сильное в тех частях диска, где вдоль радиуса лопасти скользит вихрь, сошедший с лопасти, идущей впереди. На определенных режимах полета, при которых след располагается близко к диску винта, вихри индуцируют очень большие нагрузки,

При полете вертолета вперед вихревой след винта сворачивается, причем сворачивание происходит в два этапа. Сначала отдельные вихри, сходящиеся с концевой части лопасти, быстро сворачиваются в вихревые жгуты, которые тянутся за каждой лопастью и образуют систему переплетающихся, заходящих одна в другую спиралей. Затем эти спирали, взаимодействуя, сворачиваются в дальнем следе в два вихря, похожие на вихри за круглым крылом. В наблиздавшейся экспериментально картине

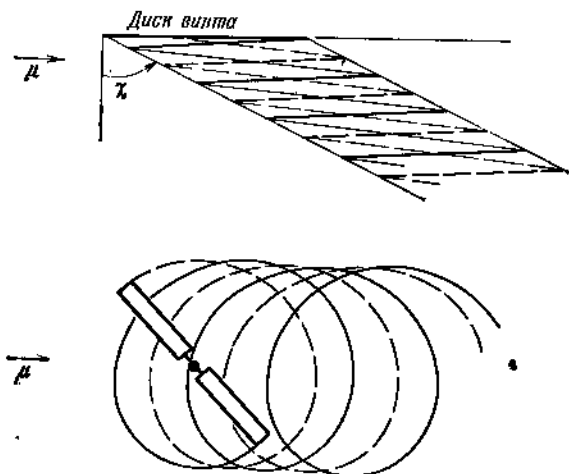


Рис. 4.6. Форма концевых вихрей в следе несущего винта (без учета деформаций, вызванных индукцией самих вихрей).

сворачивания два вихря, идущие от краев диска, формируются на расстоянии в несколько радиусов винта позади диска. Сворачивание не оказывает существенного влияния на скос потока и нагрузки в плоскости диска, но оно может иметь важное значение для эффектов интерференции в области дальнего следа. Наблюдаемое в эксперименте сворачивание следа служит также подтверждением того, что несущий винт можно рассматривать как круглое крыло.

Классическая вихревая теория винта для режима полета вперед основана на схеме активного диска, в которой завихренность распределена непрерывно по следу, а не концентрируется в дискретные вихри. При этом нагрузку часто предполагают распределенной равномерно, так что след сводится к вихревому слою на поверхности цилиндра, ограничивающего след, и к корневому вихрю. Эти два предположения дают простейшую схему следа, но математическая задача о расчете скоростей, индуцируемых скошенным вихревым цилиндром, не столь проста, как в случае висения (когда вихревой цилиндр прямой).

Индуктивные скорости на диске винта или вблизи него обычно можно найти только численно (исключая несколько особых точек). При равномерной нагрузке по вихревой теории получают те же результаты, что и по импульсной. В частности, с увеличением скорости полета результаты вихревой теории должны приближаться к тем, которые дает теория крыла. Вследствие упрощенности схемы следа дисковые вихревые теории в настоящее время могут быть полезны главным образом для общего описания поля скоростей вокруг винта и, в частности, индуктивных скоростей. Подробные расчеты индуктивных скоростей лучше делать с учетом неравномерности скоростей протекания, используя представление следа дискретными вихрями (см. гл. 13).

4.2.1. РЕЗУЛЬТАТЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ВИХРЕВОЙ ТЕОРИИ

В работе [С. 78] на базе вихревой теории рассчитано распределение индуктивных скоростей по продольному диаметру диска несущего винта. В предположении равномерно нагруженного диска для расчета индуктивных скоростей соответствующая завихренность была разложена на вихревые кольца и осевые вихри (последними пренебрегалось). На указанном диаметре для нормальной к диску составляющей индуктивной скорости можно получить аналитические формулы, но даже в этом случае в них входят эллиптические интегралы. Результаты численного решения хорошо аппроксимируются по формуле

$$v = v_0(1 + k_x r \cos \psi).$$

Здесь v_0 — индуктивная скорость, определяемая из импульсной теории, а $k_x = \operatorname{tg}(\chi/2)$, где χ — угол скоса следа в центре диска. Если считать, что $\operatorname{tg} \chi = \mu/\lambda$, то

$$k_x = \sqrt{1 + (\lambda/\mu)^2} - |\lambda/\mu|.$$

(В работе [С. 78] приведено другое выражение, в котором фигурируют скорости в дальнем следе.) Заметим, что при больших скоростях полета ($\mu \gg \lambda$) получается $k_x = 1$.

Дриз [D.73] разработал дисковую теорию винта, у которого циркуляция присоединенных вихрей описывается формулой $\Gamma = \Gamma_0 - \Gamma_1 \sin \psi$, т. е. постоянна по радиусу и переменна по азимуту. В этом случае продольные свободные вихри образуют вихревой слой на поверхности цилиндра, целиком заполненного внутри поперечными свободными вихрями. Поскольку безразмерная скорость потока, обтекающего сечения лопасти, равна $r + \mu \sin \psi$, подъемная сила всей лопасти определяется интегралом

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \rho U \Gamma dr = \rho \Omega R \int_0^1 (r + \mu \sin \psi) (\Gamma_0 - \Gamma_1 \sin \psi) dr = \\ &= (1/2) \rho \Omega R \Gamma_0 [1 + (2\mu - \Gamma_1/\Gamma_0) \sin \psi - 2\mu (\Gamma_1/\Gamma_0) \sin^2 \psi], \end{aligned}$$

а момент относительно оси ГШ равен

$$M = \int_0^1 \rho U \Gamma r dr = \\ = (1/3) \rho \Omega R^2 \Gamma_0 [1 + (3\mu/2 - \Gamma_1/\Gamma_0) \sin \psi - (3\mu/2)(\Gamma_1/\Gamma_0) \sin^2 \psi].$$

Потребовав, чтобы средняя подъемная сила лопасти была равна силе тяги одной лопасти (т. е. положив $L_{cp} = T/N$), а амплитуда первой гармоники момента относительно оси ГШ была равна нулю (это вытекает из условия равновесия лопасти в шарнире, см. гл. 5), найдем циркуляцию присоединенных вихрей:

$$\rho \Omega R N \Gamma = 2T \frac{1 - (3\mu/2) \sin \psi}{1 - 3\mu^2/2}.$$

Дриз рассчитал скорости, индуцируемые присоединенными, свободными продольными и свободными поперечными вихрями, обусловленными этой циркуляцией. При $r = 0$ и $r = 0,75$ индуктивные скорости были следующими:

$$\lambda(0) = \frac{C_T}{2\mu(1 - 3\mu^2/2)} \sin \chi, \\ \lambda(0,75) = \frac{C_T}{2\mu(1 - 3\mu^2/2)} [\sin \chi + (1 - \cos \chi - 1,8\mu^2) \cos \psi - \\ - (3\mu/2) \sin \chi \sin \psi],$$

где $\chi = \text{arctg}(\mu/\lambda)$ — угол скоса следа. С учетом соотношения $\sin \chi = \mu/\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$ средняя индуктивная скорость λ_i равна $C_T/[2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}(1 - 3\mu^2/2)]$. Множитель $1 - 3\mu^2/2$ может быть опущен, так как он отражает лишь тот факт, что индукция некоторых вихрей следа не была учтена. Если еще предположить, что скорость по диску изменяется линейно, то предыдущие формулы можно объединить:

$$\lambda_i = \frac{C_T}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{1 - \cos \chi - 1,8\mu^2}{\sin \chi} r \cos \psi - 2\mu r \sin \psi \right).$$

Дриз также предложил ввести в выражение индуктивной скорости, определяемое импульсной теорией, эмпирическую поправку, которая позволяет исключить особенность, соответствующую режиму вертикального полета при идеальной авторотации. С учетом этой поправки выражение для λ приобретает вид

$$\lambda = \mu \text{tg} \alpha + \frac{1,2}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} \left[\lambda_b^2 - \frac{(\mu \text{tg} \alpha)^2 C_{w_0}}{4(1 + 8\lambda^2/\lambda_b^2)(1 + 8\mu^2/\lambda_b^2)} \right],$$

где $\lambda_b^2 = C_T/2$, а C_{w_0} — коэффициент сопротивления диска при идеальной авторотации. Дриз положил $C_{w_0} = 1,38$. Тогда для идеальной авторотации $V/v_n = -1,70$. В работе [D.23] получена видоизмененная форма этого выражения,

Манглер [М.78] рассмотрел легко нагруженный активный диск с эпюрами нагрузки $\Gamma \sim \sqrt{1-r^2}$ и $\Gamma \sim r\sqrt{1-r^2}$. Он нашел индуктивные скорости на диске и в дальнем следе для углов скоса следа в диапазоне от 0 до 90°. Позже Манглер и Сквайр [М.79] обобщили эту теорию, определив индуктивную скорость на диске в виде ряда Фурье. Нулевая и первая гармоники этого ряда дают

$$v = v_0 \left[\frac{\pi/2}{\sqrt{1-r^2}} \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \cos \psi \right],$$

т. е. зависимость индуктивной скорости от χ оказывается такой же, как и в работе [С.78].

В работе [С.35] представлены таблицы и графики нормальной составляющей индуктивной скорости в продольной плоскости (вертикальной плоскости, проходящей через центр диска и ось следа) и на поперечной оси плоскости диска. Скорости определялись численно по вихревой теории, в которой винт представлен равномерно нагруженным активным диском. Сделан общий вывод о том, что при больших скоростях полета индуктивная скорость достигает своего максимального значения, соответствующего дальнему следу, приблизительно на расстоянии одного радиуса от центра диска, т. е. около его задней кромки. На висении и при малых скоростях полета максимальное значение достигается приблизительно на расстоянии $2R$ от центра диска. В работе [С.38] эти результаты были дополнены расчетами индуктивной скорости в поперечной плоскости.

Уилмер [W.99] разработал лопастную вихревую теорию винта на висении и при полете вперед. Дискретные спиральные вихревые пелены, сходящие с лопастей, в этой теории представлены прямоугольными пеленами, соответствующим образом ориентированными и размещенными под лопастями. В случае прямоугольных пелен можно получить замкнутые выражения для индуктивной скорости.

Различные вихревые теории часто дают выражение средней по диску индуктивной скорости, которое отличается от выражения, получаемого в импульсной теории, лишь дополнительным множителем $(1 - 3\mu^2/2)^{-1}$. Появление этого множителя объясняли изменением нагрузки лопасти по азимуту. Как показал Хейсон [Н.72], если правильно учитывать индукцию вихрей, то вихревая и индуктивная теории дают одинаковые выражения, несмотря на азимутальное изменение нагрузки.

Вихревая теория винта при полете вперед рассмотрена также в работах: [Н.84, С.40, J.15, Н.75, Н.77, В.31] ¹⁾.

¹⁾ Список упомянутых в обзоре работ следует дополнить отечественными исследованиями (см. литературу к монографии [В.31]). Последние часто опережали соответствующие зарубежные, но, по-видимому, не известны автору. — Прим. перев.

4.2.2. ИЗМЕНЕНИЕ ИНДУКТИВНОЙ СКОРОСТИ ПО ДИСКУ ПРИ ПОЛЕТЕ ВПЕРЕД

В качестве первого (и очень грубого) приближения к реальному неравномерному распределению скоростей протекания через диск рассмотрим линейное распределение

$$v = v_0(1 + k_x x + k_y y) = v_0(1 + k_x r \cos \psi + k_y r \sin \psi)$$

(используемая система координат x, y показана на рис. 4.1). Здесь через v_0 по-прежнему обозначено среднее значение индуктивной скорости, которое можно найти по импульсной теории. Формула $v = v_0(1 + k_x r \cos \psi)$ впервые была предложена Глауэртом [G.85]. В типичных случаях коэффициент k_x положителен, а k_y отрицателен, так что индуктивная скорость больше в задней части диска и на отступающей лопасти. При больших скоростях полета $k_x \approx 1$, а k_y , как правило, меньше по абсолютной величине. В результате индуктивная скорость оказывается близкой к нулю в передней точке диска, а в задней точке ее величина приблизительно равна удвоенному среднему значению. На висении $k_x = k_y = 0$. Такая линейная формула индуктивной скорости облегчает анализ работы несущего винта при полете вперед (см. гл. 5). Однако следует ожидать, что она позволит более надежно рассчитать в лучшем случае только нулевую и первую гармоники искомым переменных, если величины k_x и k_y выбраны правильно. Неравномерное распределение индуктивной скорости при полете вперед на самом деле будет гораздо сложнее, а высшие гармоники индуктивной скорости могут иметь очень важное значение.

На изменение индуктивной скорости по диску несущего винта должен влиять суммарный аэродинамический момент, создаваемый винтом. Чтобы оценить это влияние, рассмотрим дифференциальную формулу $dT = 2\rho V v dA$ импульсной теории. Представим ее в виде

$$v = (dT/dA)/(2\rho V),$$

где dT/dA — местная нагрузка на диск. Предполагая, что нагрузка, обусловленная моментами тангажа и крена, изменяется линейно, получим

$$\frac{dT}{dA} = \frac{T}{A} - 4 \frac{M_y}{RA} r \cos \psi + 4 \frac{M_x}{RA} r \sin \psi.$$

Отсюда

$$\lambda_i = \frac{C_T}{2\mu} - \frac{2C_{M_y}}{\mu} r \cos \psi + \frac{2C_{M_x}}{\mu} r \sin \psi,$$

где C_{M_y} и C_{M_x} — коэффициенты моментов тангажа и крена соответственно. Следовательно, $k_x = -4C_{M_y}/C_T$ и $k_y = 4C_{M_x}/C_T$. Тогда изменение индуктивной скорости пропорционально

расстоянию от центра диска до линии действия вектора силы тяги. Для бесшарнирных винтов это расстояние может быть значительным¹⁾.

Рассмотрим теперь продольное изменение индуктивной скорости при полете вперед в рамках импульсной теории. Напомним, что индуктивную скорость v на крыле можно связать с массовым расходом воздуха через цилиндр, охватывающий крыло на всем размахе (для круглого крыла площадь сечения такого цилиндра равна площади самого крыла). Распространяя эту теорему на элементарный объем в сечении с координатой y , получим выражение индуктивной скорости $dv = dT/\dot{m}$, где массовый расход \dot{m} равен $2\rho V \sqrt{1-y^2} dy$. Пусть нагрузка равномерно распределена по крылу, так что $dT = (T/A) dx dy$. Тогда

$$dv/dx = T/(2\rho AV \sqrt{1-y^2}).$$

Здесь dv — приращение индуктивной скорости на поперечном элементе диска с координатой x , вызванное действующей на этот элемент силой тяги dT . Следовательно, полная индуктивная скорость на элементе x равна сумме приращений скорости на всех элементах, расположенных выше по потоку (используемая система координат в плоскости диска показана на рис. 4.1). Интегрируя от передней кромки диска до сечения x , получим

$$v = \frac{T}{2\rho AV} \left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + 1 \right) = v_0 \left(1 + \frac{r \cos \phi}{\sqrt{1-y^2}} \right) = v_0 \left(1 + \frac{\cos \phi}{|\cos \phi|} \right),$$

причем на передней кромке диска $x = -\sqrt{1-y^2}$, а на задней $x = \sqrt{1-y^2}$. Таким образом, индуктивная скорость линейно изменяется по x от нуля на всей передней кромке диска до $2v_0$ на всей его задней кромке. Исходя из изменения скорости вдоль продольного диаметра диска, получаем $k_x = 1$. Указанную формулу часто используют при больших скоростях полета, но необходимо еще учесть зависимость индуктивной скорости от μ , так как коэффициент k_x должен быть равен нулю на режиме висения.

В классической вихревой теории винта получены различные выражения параметров k_x и k_y , определяющих изменение индуктивной скорости по диску при полете вперед. В работе [С.78] предложена формула

$$k_x = \operatorname{tg}(\chi/2) = \sqrt{1 + (\lambda/\mu)^2} - |\lambda/\mu|,$$

где χ — угол скоса следа, определяемый на диске. Здесь k_x действительно обращается в 1 при больших скоростях полета. Это

¹⁾ Элементно-импульсная теория не дает правильного описания изменения индуктивной скорости по диску винта. Основная причина изменения λ_x по диску в косом потоке — асимметрия положения свободных вихрей относительно диска. Более точные теории [М.79] дают переменную величину λ_x даже при $M_x = M_z = 0$. — Прим. перев.

выражение можно также получить из формул работы [М.79]. Дриз [D.73] нашел, что

$$k_x = \frac{4}{3} \frac{1 - \cos \chi - 1,8\mu^2}{\sin \chi} = \frac{4}{3} [(1 - 1,8\mu^2) \sqrt{1 + (\lambda/\mu)^2} - \lambda/\mu],$$

$$k_y = -2\mu.$$

Здесь k_x равен нулю при $\mu = 0$, достигает максимального значения $\sim 1,1$ при $\mu = 0,16$ и равен ~ 1 при $\mu \approx 0,3$. В работе [С.35] приведены численные результаты, которые Пейн [Р.36] предложил аппроксимировать линейным выражением

$$k_x = \frac{(4/3)(\mu/\lambda)}{1,2 + \mu/\lambda}.$$

Отсюда $k_x = 4/3$ при больших скоростях полета.

4.2.3. ЛИТЕРАТУРА

Кривая индуктивных скоростей при полете вперед исследована в работах: [С.16, С.20, G.56, P.33, H.78, H.81, W.20, W.21, С.136, S.74, S.76, W.108, W.109, P.51]. Исследованию индуктивной скорости и поля скоростей в следе при полете вперед посвящены работы: [W.59, С.32, С.78, R.79, M.78, B.154, D.73, F.4, D.76, M.79, С.35, G.56, H.68, H.69, H.72, H.74, H.77, F.6, С.38, С.39, H.84, С.40, H.31, J.15, W.99, G.104, С.83, M.119, L.75, J.16, I.74, B.128, J.18, J.19, B.80, B.105, L.22, M.83, J.1, B.76, B.77].

4.3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ДВУХВИНТОВЫХ НЕСУЩИХ СИСТЕМ ПРИ ПОЛЕТЕ ВПЕРЕД

Интерференцию многовинтовых несущих систем в общем случае можно рассчитать следующим образом. Представим скорость, индуцируемую на диске m -го винта, в виде

$$v_m = k_m v_{n, m} + \sum_{n \neq m} \chi_{mn} v_{n, n}.$$

Здесь $v_{n, n}$ — скорость, индуцируемая отдельным n -м винтом, который считается идеальным; k_m — поправочный множитель, учитывающий дополнительные индуктивные затраты реального винта; χ_{mn} — коэффициент интерференции, который учитывает скос на m -м винте вследствие силы тяги n -го винта. Положительная величина χ_{mn} соответствует затратам мощности на интерференцию, при отрицательном χ_{mn} интерференция оказывает благоприятное влияние. Написанное выше выражение пригодно для всех скоростей полета, включая нулевую (висение), но коэффициенты интерференции χ_{mn} зависят от скорости. При больших скоростях полета по импульсной теории винта или по теории крыла получаем, что индуктивная скорость $v_{n, n}$ равна $T_n / (2\rho AV)$.

Поэтому индуктивная мощность всей несущей системы при полете вперед определяется выражением

$$P = \sum_m T_m v_m = \left(\sum_m k_m T_m^2 + \sum_m \sum_{n \neq m} \chi_{mn} T_m T_n \right) / (2\rho AV)$$

(предполагается, что все винты имеют одинаковую площадь диска A , как это обычно и бывает). Так как суммарная мощность отдельных винтов $P_{отд}$ равна $\sum k_m T_m^2 / (2\rho AV)$, имеем

$$P/P_{отд} = 1 + \sum_m \sum_{n \neq m} \chi_{mn} T_m T_n / \sum k_m T_m^2.$$

Второе слагаемое в правой части выражает потери мощности на интерференцию. Обычно эта величина положительна и не мала в сравнении с единицей, но при некоторых расположениях винтов возможна небольшая благоприятная интерференция.

Рассмотрим теперь случай двух несущих винтов равной площади. Положим $k_m = 1$, так как здесь нас интересуют главным образом потери на интерференцию. Индуктивные мощности каждого из винтов определяются по формулам

$$P_1 = (T_1^2 + \chi_{12} T_1 T_2) / (2\rho AV), \quad P_2 = (T_2^2 + \chi_{21} T_1 T_2) / (2\rho AV),$$

а относительная мощность всей системы составляет

$$P/P_{отд} = 1 + (\chi_{12} + \chi_{21}) T_1 T_2 / (T_1^2 + T_2^2).$$

Если силы тяги равны ($T_1 = T_2$), то

$$P/P_{отд} = 1 + (\chi_{12} + \chi_{21}) / 2 = 1 + \chi,$$

где χ — коэффициент интерференции всей системы.

Теория крыла, соответствующая схеме одной несущей поверхности, показывает, что индуктивная мощность пропорциональна квадрату отношения силы тяги к размаху, т. е. $P \sim (T/\text{размах})^2$. Следовательно, суммарная индуктивная мощность многовинтовой системы зависит от размаха эквивалентной несущей поверхности. Для двух отдельных несущих винтов с силой тяги T и размахом $2R$ имеем $P = 2T^2 / (2\rho AV)$. Те же два винта в соосной несущей системе работают в общем как один несущий винт с удвоенной нагрузкой на диск. Поэтому индуктивная мощность также удваивается, т. е. $\chi \approx 1$.

Из теории крыла следует также, что индуктивное сопротивление несущей системы не зависит от продольного расстояния между несущими элементами. Поэтому у винтов в продольной схеме без превышения потери на интерференцию такие же, как и в соосной схеме, т. е. $\chi \approx 1$. Распределение же потерь между двумя винтами зависит от продольного расстояния между ними. В соосной схеме оба винта работают в одинаковых условиях, так что $\chi_{12} = \chi_{21} = 1$. При больших продольных расстояниях между винтами задний винт не оказывает влияния на передний,

а сам работает в его развившемся следе. Поэтому для продольной схемы в пределе следует ожидать $\chi_n = 0$ и $\chi_s = 2$. С увеличением расстояния по вертикали между винтами в соосной и продольной схемах условия их работы приближаются к условиям работы отдельного винта при полете вперед. Следовательно, при небольшом расстоянии между винтами по вертикали $\chi < 1$, а с увеличением этого расстояния до длины радиуса и больше $\chi = 0$. Заметим, что интенсивность интерференции определяется расстоянием между следами винтов, а не между их дисками.

Рассмотрим винты в поперечной схеме. Если поперечное расстояние равно нулю (соосная схема), то опять $\chi \approx 1$. Когда расстояние между валами винтов равно $2R$ (диски винтов касаются друг друга), несущая система работает, в общем, как один винт с той же нагрузкой на размахе, что и у двух отдельных винтов. Поэтому индуктивную мощность системы нужно уменьшить вдвое, т. е. $\chi \approx 1/2$. Благоприятная интерференция обусловлена в этом случае тем, что каждый винт работает в той части поля индуктивных скоростей другого винта, где скорости направлены вверх. Однако распределение нагрузки по размаху в поперечной схеме далеко от эллиптического даже при равномерно нагруженных дисках винтов. Поэтому интерференция на самом деле хотя и благоприятна, но не столь значительна. При дальнейшем увеличении поперечного расстояния между винтами, как и в предыдущем случае, $\chi \rightarrow 0$.

Рассмотрим интерференцию несущих винтов вертолета продольной схемы при полете вперед на основе импульсной теории. Предположим, что задний винт не влияет на характеристики переднего и работает в его полностью развившемся следе. Тогда суммарная индуктивная скорость переднего винта равна v_n , а заднего $v_s + 2v_n$, причем $v_n = T_n/(2\rho AV)$ и $v_s = T_s/(2\rho AV)$. Индуктивная мощность всей системы определяется выражением

$$P = T_n v_n + T_s (v_s + 2v_n) = (T_n^2 + T_s^2 + 2T_n T_s)/(2\rho AV) = (T_n + T_s)^2/(2\rho AV).$$

Отсюда коэффициент индукции равен

$$\chi = \frac{\Delta P}{P_{отд}} = \frac{2T_n T_s}{T_n^2 + T_s^2}.$$

Максимального значения ($\chi = 1$) этот коэффициент достигает при одинаковой силе тяги винтов. (Хотя неравенство сил тяги уменьшает потери на интерференцию, минимальная суммарная мощность будет получена при одинаковых силах тяги.) Таким образом, на режиме полета вперед двухвинтовая несущая система продольной схемы менее эффективна, чем два отдельных винта: при нулевом расстоянии по вертикали между винтами ее индуктивная мощность приблизительно в два раза больше.

Однако задний несущий винт устанавливают, как правило, со значительным превышением над передним, чтобы свести к минимуму влияние следа переднего винта на аэродинамические характеристики заднего. Кроме того, при полете вперед индуктивная мощность составляет лишь малую часть общих затрат мощности. По экспериментальным данным для вертолетов продольной схемы обычно χ составляет около 0,9 ($P/P_{\text{отд}} \approx 1,9$). Следовательно, индуктивные скорости на переднем и заднем винтах равны соответственно $v_{\text{п}}$ и $v_{\text{з}} + 1,9v_{\text{п}}$. Имеются также некоторые данные, показывающие, что $2,2 \leq P/P_{\text{отд}} \leq 2,3$, если

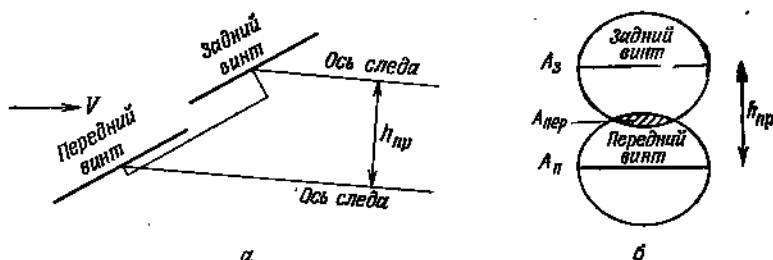


Рис. 4.7. К импульсной теории несущей системы вертолета продольной схемы при полете вперед.

а — вид сбоку; б — вид сверху.

наряду с потерями на интерференцию учитывать концевые потери и потери на неравномерность потока через винт. Для оценки влияния интерференции можно использовать также вихревую теорию несущего винта.

Степневский [S.178, S.180] разработал импульсную теорию двухвинтовой несущей системы продольной схемы при полете вперед. В этой теории учтено влияние расстояния между винтами по вертикали (рис. 4.7). Благодаря установке заднего винта на пилоне и наклону фюзеляжа след заднего винта располагается выше следа переднего винта на расстоянии $h_{\text{пр}}$. Типичные значения относительного превышения $h_{\text{пр}}/R$ находятся в диапазоне от 0,3 до 0,5. В результате этого превышения определяющая интерференцию скорость у заднего винта меньше $2v_{\text{п}}$ и, следовательно, аэродинамические характеристики несущей системы лучше. Для количественной оценки интерференции снова рассчитаем индуктивную мощность по массовому расходу через контрольный цилиндр, охватывающий несущую систему на всем размахе. При $h_{\text{пр}} = 0$ контрольные цилиндры обоих винтов совпадают, так что определяющая интерференцию скорость у заднего винта достигает максимального значения $2v_{\text{п}}$. При $h_{\text{пр}} > 0$ контрольные цилиндры перекрываются лишь частично. Примем степень перекрытия в качестве меры отношения скорости интерференции к ее максимальному значению $2v$. Площадь перекры-

тия $A_{\text{пер}} = \tilde{m}A_s$, где \tilde{m} — функция превышения $h_{\text{пр}}$:

$$\tilde{m} = \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{h_{\text{пр}}}{2R}\right) - \frac{h_{\text{пр}}}{2R} \sqrt{1 - \left(\frac{h_{\text{пр}}}{2R}\right)^2} \right].$$

Тогда суммарная индуктивная скорость на заднем винте равна $v_s + 2v_n\tilde{m}$. Индуктивная мощность всей системы

$$P = (T_n^2 + T_s^2 + 2T_nT_s\tilde{m})/(2\rho AV),$$

так что коэффициент интерференции

$$\chi = \frac{\Delta P}{P_{\text{отд}}} = \frac{2T_nT_s}{T_n^2 + T_s^2} \tilde{m}.$$

При одинаковых силах тяги винтов $\chi = \tilde{m}$. Когда превышение мало, величина χ несколько меньше 1, а при $h_{\text{пр}} = 2R$ коэффициент интерференции обращается в нуль. Степневский установил, что результаты расчетов по его теории хорошо согласуются с экспериментальными данными о потерях на интерференцию для вертолетов продольной схемы. Хотя эта теория дает лишь грубую оценку влияния интерференции, она позволяет удовлетворительно рассчитать аэродинамические характеристики несущей системы при полете вперед, когда индуктивная мощность мала.

Рассмотрим теперь несущую систему поперечной схемы. При расстоянии между валами винтов l размах несущей системы в $1 + l/(2R)$ раз больше, чем в случае соосной схемы. В последнем случае общая индуктивная мощность вдвое превышает индуктивную мощность отдельных винтов. Значит, для поперечной схемы коэффициент интерференции равен

$$\chi = P/P_{\text{отд}} - 1 = 2/(1 + l/2R)^2 - 1.$$

Отсюда при $l = 2R$ получаем, как и раньше, $\chi = -1/2$. При выводе последней формулы никак не учитывалось отклонение распределения нагрузки по размаху от эллиптического. Поэтому при очень больших значениях l коэффициент χ приближается к -1 , а не к 0. Величина $\chi = -1/2$, соответствующая случаю, когда диски винтов касаются один другого, также дает завышенную оценку благоприятной интерференции. Последнюю формулу для χ следует использовать только при $l/R < 1,75$; при дальнейшем увеличении l/R интерференция постепенно исчезает. По экспериментальным данным $-0,3 \leq \chi \leq -0,2$ в случае касающихся дисков винтов, а наиболее благоприятная интерференция ($-0,45 \leq \chi \leq -0,25$) имеет место при $l/(2R) \approx 1,75$. Таким образом, в самом благоприятном случае индуктивная мощность составляет 55% мощности отдельных винтов.

Аэродинамические характеристики двухвинтовых несущих систем при полете вперед рассмотрены также в работах [F.5, S.178, D.48, H.181, M.116, B.31¹⁾].

4.4. ВЛИЯНИЕ ЗЕМЛИ ПРИ ПОЛЕТЕ ВПЕРЕД

Как уже отмечалось в разд. 3.6, вблизи земли индуктивная мощность уменьшается при заданной силе тяги (или сила тяги увеличивается при заданной мощности). При полете вперед, когда след винта скашивается назад, влияние земли быстро ослабевает с ростом скорости полета. Воздушной подушкой можно пренебречь при $V > 2v_v$ или, по грубой оценке, при $\mu > 0,15$.

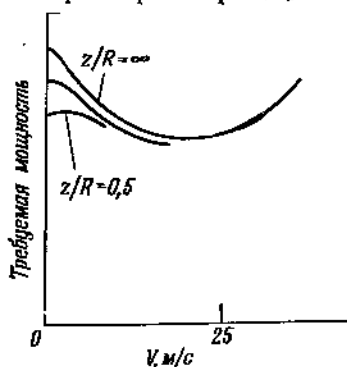


Рис. 4.8. Схематический график зависимости влияния земли от скорости полета.

Рис. 4.8 иллюстрирует зависимость влияния воздушной подушки от скорости полета. На висении вблизи земли требуемая мощность значительно уменьшается. Влияние земли сохраняется при малых скоростях полета, но после перехода через режим малых μ быстро ослабевает и при $V \approx 15$ м/с становится пренебрежимо слабым. Воздушная подушка в конечном счете уменьшает зависимость требуемой мощности от изменений скорости полета или скорости ветра вблизи режима висения. Это может иметь важное значение при эксплуатации вертолета.

Чизмен и Беннет [С.50] разработали приближенный метод оценки влияния земли на подъемную силу несущего винта при полете вертолета вперед. Вводя отражение несущего винта в виде источника, находящегося под поверхностью земли на расстоянии z от нее, они нашли, что

$$\frac{T}{T_{\infty}} = \left[1 - \frac{(R/4z)^2}{1 + (\mu/\lambda)^2} \right]^{-1}.$$

При $z/R > 0,5$ эта формула правильно передает зависимость подъемной силы от высоты над землей и от скорости полета. Используя теорию элемента лопасти для учета нагрузки лопасти, Чизмен и Беннет получили

$$\frac{T}{T_{\infty}} = \left[1 - \frac{\sigma a \lambda}{4C_T} \frac{(R/4z)^2}{1 + (\mu/\lambda)^2} \right]^{-1}.$$

Приведенные формулы удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, показывая, что воздушная подушка

¹⁾ См. также книгу Л. С. Вильдгрубе [69]. — Прим. перев.

определяется в первую очередь параметрами z/R и μ и лишь во вторую очередь — нагрузкой винта.

Хейсон [Н.71] исследовал влияние земли при полете вертолета вперед на основе схемы активного диска с вихревым следом, вводя отраженную систему вихрей под поверхностью земли. Он установил, что воздушная подушка всегда уменьшает требуемую мощность, но при полете вперед этот эффект ослабевает с высотой быстрее, чем на режиме висения. Влияние земли уменьшается и с ростом скорости полета, причем наиболее сильно изменение скорости сказывается в диапазоне $1,5 \leq V/v_b \leq 2,0$. Хейсон нашел также, что на малых высотах увеличение мощности, вызванное ослаблением влияния земли с ростом скорости, происходит быстрее, чем уменьшение мощности вследствие обычного уменьшения индуктивной скорости при полете вперед. Поэтому в конечном счете требуемая мощность вблизи земли должна возрастать с увеличением скорости от нуля (см. рис. 4.8)¹⁾.

¹⁾ Влияние «воздушной подушки» подробно исследовано В. М. Калявкным [165]. — *Прим. перев.*

Полет вперед II

5.1. РАБОТА НЕСУЩЕГО ВИНТА ПРИ ПОЛЕТЕ ВПЕРЕД

Висение, экономичное по затратам мощности, — основная характеристика вертолета, но она ничего не стоит, если плохи аэродинамические характеристики при полете вперед. В таком полете диск несущего винта движется передней кромкой навстречу воздуху, оставаясь почти горизонтальным (небольшой наклон обеспечивает создание пропульсивной силы). Поэтому лопасть несущего винта обтекается потоком, скорость которого в плоскости диска складывается из составляющей скорости вертолета и из скорости, обусловленной собственным вращением лопасти. У наступающей лопасти при полете вперед скорость обтекания больше, у отступающей — меньше. Предположим, что угол атаки сечений лопасти постоянен. Тогда изменение скоростного напора в процессе работы винта приводит к тому, что подъемная сила наступающей лопасти становится больше, чем у отступающей, т. е. на винте возникает момент крена. Если не ликвидировать этот момент, вертолет будет крениться в сторону отступающей лопасти до тех пор, пока момент крена на винте не сбалансируется моментом силы тяжести, приложенной в центре масс вертолета. Но момент крена может быть столь большим, что такая балансировка окажется недостижимой. Именно этим на заре развития вертолетостроения было вызвано несколько аварий, которые происходили при попытках лететь вперед. Кроме того, моменту крена на несущем винте соответствует большой изгибающий момент в комлевой части каждой лопасти. Этот момент периодически изменяется (период равен $2\pi/\Omega$), достигая максимального положительного значения на наступающей лопасти и минимального отрицательного значения на отступающей.

Так как нагрузка T/A_x лопасти ограничена срывом потока в ее сечениях, для заданной силы тяги (и концевой скорости) площадь лопастей должна оставаться приблизительно одинаковой независимо от диаметра винта. Следовательно, у слабо нагруженных несущих винтов вертолетов коэффициент заполнения $\sigma = A_x/A_{к.в}$ мал, а значит, удлинение лопасти велико. Для обеспечения предельно высоких аэродинамических характеристик тонкие лопасти большого удлинения должны выдерживать в комлевой части высокий уровень напряжений, которые, кроме

того, при полете вперед периодически изменяются с периодом $2\pi/\Omega$. Это создает серьезную проблему для конструкторов: необходимо каким-то способом уменьшить изгибающие моменты в комлевых частях и снизить напряжения в лопастях до допустимого уровня. Если лопасти жесткие, как у пропеллера, то все аэродинамические нагрузки воспринимает конструкция. У гибких же лопастей под действием аэродинамических сил возникают значительные изгибные колебания, в результате которых аэродинамические силы могут изменяться так, что нагрузка лопастей существенно снизится. Таким образом, при полете вперед азимутальное изменение подъемной силы лопасти вызывает ее периодическое движение с периодом $2\pi/\Omega$ в плоскости, нормальной к плоскости диска (плоскости взмаха). Это движение называют *маховым*. С учетом инерционных и аэродинамических сил, обусловленных маховым движением, результирующие нагрузки лопасти в комлевой части и момент крена, передающийся на фюзеляж, существенно уменьшаются. Обычно для снижения нагрузок втулки несущих винтов снабжают горизонтальными шарнирами (ГШ). При маховом движении лопасть поворачивается вокруг оси ГШ как твердое тело (см. рис. 1.4). Так как на оси ГШ момент равен нулю, на фюзеляж он вообще не может передаваться (если относ оси ГШ от оси вращения равен нулю), а изгибающие моменты в комлевой части лопасти должны быть малы. Несущий винт, у которого имеются горизонтальные шарниры, называют *шарнирным винтом*. В последнее время на вертолетах с успехом применяют несущие винты, не имеющие ГШ и называемые *бесшарнирными*. При использовании высококачественных современных материалов комлевую часть лопасти можно сделать прочной и в то же время достаточно гибкой, чтобы обеспечить маховое движение, которое снимает большую часть нагрузок в комле лопасти. Вследствие значительных центробежных сил, действующих на лопасти, маховые движения у шарнирных и бесшарнирных винтов весьма сходны. Естественно, нагрузка комлевой части лопасти у бесшарнирных винтов выше, чем у шарнирных, а увеличение момента, передаваемого на втулку, оказывает значительное влияние на характеристики управляемости вертолета. В целом маховое движение лопастей уменьшает асимметрию в распределении подъемной силы по диску винта при полете вперед. Поэтому учет махового движения имеет принципиальное значение в исследовании аэродинамических характеристик несущего винта при полете вперед.

Рассмотрим составляющие скорости потока, обтекающего лопасть при полете вперед (рис. 5.1). Обозначим скорость полета через V , угол атаки диска винта — через α (этот угол положителен, когда диск наклонен верхней стороной вперед). Несущий винт вращается с частотой Ω . Так как обычно несущие винты

вращаются против часовой стрелки (при виде сверху), лопасть будет наступающей в правой половине диска (если смотреть вперед)¹⁾. Введем связанную с фюзеляжем систему координат x, y, z , оси которой направлены соответственно назад, вправо и вверх, а начало находится в центре вращения винта. Величина составляющей в плоскости диска скорости потока, набегающего на винт, равна $V \cos \alpha$. Отношение этой величины к концевой скорости назовем *характеристикой режима работы винта* и обозначим через μ , т. е. $\mu = V \cos \alpha / (\Omega R)$. Таким образом, μ — это

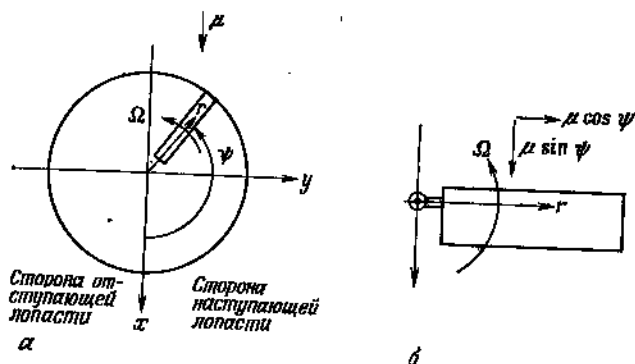


Рис. 5.1. Обтекание лопасти при полете вперед.

а — система координат, связанная с диском; б — система координат, связанная с лопастью.

безразмерная скорость перемещения несущего винта вперед. Положение лопасти определено ее азимутом $\psi = \Omega t$, отсчитываемым от положительного направления оси x . Во вращающейся системе координат, связанной с лопастью, выражения тангенциальной и радиальной составляющих скорости потока, обтекающего лопасть, будут соответственно $\Omega r + V \cos \alpha \sin \psi$ и $V \cos \alpha \cos \psi$. Переходя к безразмерным величинам, запишем эти выражения в виде

$$u_T = r + \mu \sin \psi, \quad u_R = \mu \cos \psi.$$

Изменение проекции u_T с периодом $2\pi/\Omega$ оказывает наибольшее влияние на аэродинамические характеристики несущего винта при полете вперед. При типичных для вертолета крейсерских скоростях полета характеристика режима работы винта μ мала. У первых вертолетов максимальной скорости соответствовала величина $\mu_{\max} \approx 0,25$, у современных вертолетов μ_{\max} составляет от 0,35 до 0,40. При концевой скорости $\Omega R \approx 200$ м/с величина $\mu = 0,5$ соответствует скорости полета $V \approx 100$ м/с.

¹⁾ Имеется в виду направление вращения, принятое на американских вертолетах. У отечественных одновинтовых вертолетов направление вращения винта противоположное. — Прим. перев.

В процессе полета вперед на диске несущего винта образуется зона обратного обтекания, т. е. зона в левой половине диска, где скорость потока, обтекающего отступающую лопасть, направлена от задней кромки к передней. В выражении тангенциальной составляющей скорости первое слагаемое Ωr , обусловленное вращением лопасти, положительно и линейно возрастает с радиусом сечения, а второе слагаемое $\Omega R \mu \sin \psi$, обусловленное скоростью полета вперед, отрицательно на стороне отступающей лопасти ($180^\circ < \psi < 360^\circ$). Поэтому в комлевой части отступающей лопасти обязательно существует зона, в которой второе слагаемое по абсолютной величине больше первого, так что обтекание становится обратным. В частности, при $\psi = 270^\circ$ величина тангенциальной составляющей равна $\Omega R (r - \mu)$, и обратное обтекание имеет место в сечениях, для которых $r < \mu$. В общем случае зона обратного обтекания определяется как область на диске винта, в которой $u_T < 0$. Уравнением границы этой зоны является $r + \mu \sin \psi = 0$, т. е. граница представляет собой окружность диаметра μ с центром в точке $r = \mu/2$, $\psi = 270^\circ$ (рис. 5.2). При $\mu \geq 1$ зона обратного обтекания захватывает всю лопасть на азимуте $\psi = 270^\circ$ и оказывает сильное влияние на аэродинамические характеристики несущего винта. Однако для современных вертолетов типичные значения μ находятся в интервале $0,3 \div 0,4$. При малых значениях характеристики режима работы винта зона обратного обтекания занимает лишь небольшую часть диска винта (отношение площади этой зоны к общей площади диска равно $\mu^2/4$). Кроме того (так как по определению на границе зоны обратного обтекания $u_T = 0$), во всей этой зоне скоростной напор невелик при малых значениях μ . Неоперенная часть лопасти, составляющая до 15—30% радиуса несущего винта, занимает большую часть зоны обратного обтекания. Поэтому влиянием зоны обратного обтекания можно пренебречь до $\mu \approx 0,5$.

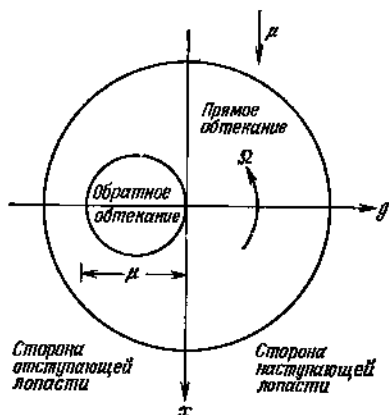


Рис. 5.2. Зона обратного обтекания (соответствует $\mu \approx 0,7$).

Асимметрия обтекания лопасти при полете вперед, обусловленная сложением скорости набегающего потока со скоростью вращения винта, приводит к тому, что аэродинамические нагрузки и движение лопасти зависят от азимута ψ . В установившемся полете все характеристики лопасти на заданном азимуте

при ее вращении остаются неизменными, т. е. нагрузки лопасти и ее движение представляют собой периодические (с периодом 2π) функции азимута. Характеристики лопасти в размерной форме являются периодическими функциями времени с периодом $T = 2\pi/\Omega$ и основной частотой, равной частоте Ω вращения винта. Периодические функции могут быть представлены рядами Фурье. Например, угол взмаха β можно выразить в виде

$$\beta(\psi) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{nc} \cos n\psi + \beta_{ns} \sin n\psi).$$

Таким образом, периодическая функция $\beta(\psi)$ определяется коэффициентами гармоник β_0 , β_{1c} , β_{1s} и т. д. Опыт показывает, что для адекватного описания движения лопасти достаточно знать только несколько низших гармоник, т. е. зависимость движения лопасти от времени полностью характеризуется малым числом параметров. Коэффициенты Фурье функции $\beta(\psi)$ вычисляются по формулам

$$\beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta d\psi, \quad \beta_{nc} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta \cos n\psi d\psi,$$

$$\beta_{ns} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta \sin n\psi d\psi.$$

Движение лопасти описывается дифференциальными уравнениями (по одному на каждую степень свободы), составленными во вращающейся системе координат. Нужно найти периодические решения этих уравнений. Одним из способов решения является метод подстановки, который состоит в следующем. Ряды Фурье, описывающие углы отклонения лопасти и их производные по времени, подставляют в уравнения движения. По тригонометрическим формулам произведения гармоник выражают через их суммы. Затем в каждом уравнении суммы коэффициентов при одинаковых гармониках ($1, \cos \psi, \sin \psi, \cos 2\psi, \sin 2\psi$ и т. д.) приравнивают нулю. В результате получают систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов гармоник, на которые разложены углы отклонения лопасти. Другой способ решения — операционный метод, состоящий в том, что к дифференциальным уравнениям движения лопасти последовательно применяют операторы

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\psi, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \sin \psi d\psi, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \cos \psi d\psi,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \sin 2\psi d\psi, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \cos 2\psi d\psi$$

и т. д. Затем, используя приведенные выше формулы, интегралы в уравнениях движения заменяют коэффициентами Фурье. В результате получают ту же самую систему алгебраических уравнений, что и методом подстановки, хотя операционным методом уравнения определяются не сразу, а по одному. Линейные дифференциальные уравнения сводятся, таким образом, к линейным алгебраическим уравнениям относительно коэффициентов гармоник. Оба метода дают приближенные решения, так как для получения конечной системы алгебраических уравнений ряда Фурье приходится обрывать. Однако для описания периодических функций, встречающихся при исследовании работы несущего винта, достаточно конечного числа гармоник.

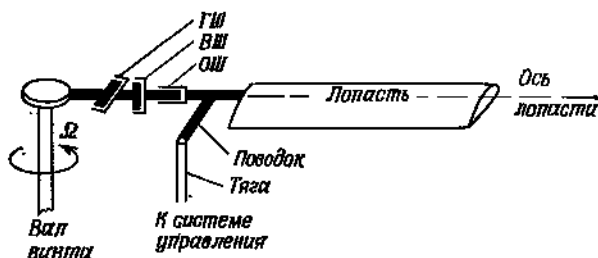


Рис. 5.3. Схема расположения ГШ, ВШ и ОШ на втулке шарнирного несущего винта.

Чтобы обеспечить движение лопасти в плоскости взмаха, необходимое для уменьшения напряжений в комле лопасти и моментов на втулке, нужен горизонтальный шарнир (ГШ). Маховое движение порождает также аэродинамические и инерционные, в частности кориолисовы, силы в плоскости диска. Поэтому несущие винты часто снабжают вертикальными шарнирами (ВШ), которые обеспечивают возможность качания лопасти и уменьшают нагрузки комлевой части лопасти в плоскости диска. Однако вследствие применения ВШ усложняется конструкция втулки и появляется возможность механической неустойчивости, называемой «земным резонансом». Для устранения этой неустойчивости требуется механическое демпфирование качания. («Земной резонанс» возникает из-за взаимосвязи между колебаниями лопастей в вертикальных шарнирах и колебаниями втулки винта в плоскости диска. Последнее движение обычно обусловлено упругостью шасси, когда вертолет стоит на земле, см. разд. 12.4) Вместо применения ВШ можно усилить конструкцию комлевой части лопасти с тем, чтобы она выдерживала нагрузки в плоскости диска. В комлевой части лопасти должен также быть осевой шарнир (ОШ), который позволяет изменять угол установки лопасти и тем самым управлять несущим винтом. Таким образом, лопасть полностью шарнирного

несущего винта имеет три шарнира в комле: горизонтальный, вертикальный и осевой (рис. 5.3). Движение лопасти в горизонтальном и вертикальном шарнирах ограничивают центробежные силы, возникающие при вращении лопасти, а движение в осевом шарнире определяет система управления. Заметим, что когда говорят о шарнирном несущем винте, обычно имеют в виду наличие ГШ и ВШ. Например, «бесшарнирный» винт часто имеет ОШ. У полностью шарнирного винта оси ГШ и ВШ по конструктивным соображениям отнесены от центра вращения. Относ осей ВШ необходим, иначе нельзя было бы передать винту крутящий момент от вала. Относ осей ГШ улучшает характеристики управляемости вертолета, так как позволяет передать на втулку моменты тангажа и крена. У двухлопастных винтов типа качалки (с качающейся втулкой) и у карданных винтов (со втулкой на карданном шарнире) ось ГШ проходит через центр

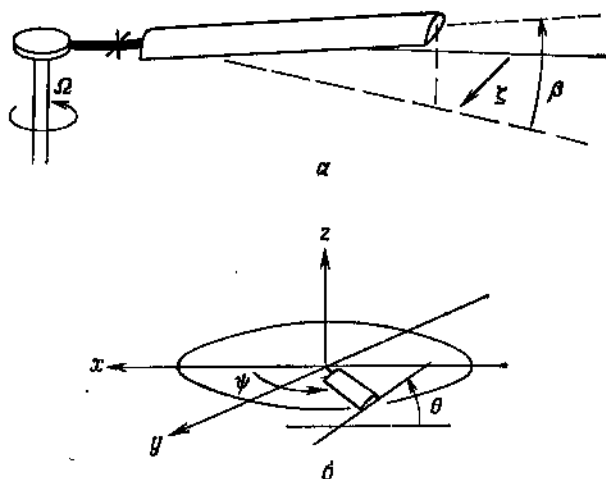


Рис. 5.4. Движение лопасти несущего винта.

a — маховое движение и качание; *b* — установившееся движение.

вращения, а ВШ отсутствуют. Наконец, у бесшарнирных винтов маховое движение и качание происходят в основном за счет изгиба комлевой части лопасти. Такие винты можно приближенно считать эквивалентными шарнирным винтам с большим числом шарниров (а также и с пружинами в шарнирах, имеющими некоторую эффективную жесткость).

Основными движениями лопасти являются повороты в горизонтальном, вертикальном и осевом шарнирах (рис. 5.4). Движение в плоскости взмаха, или маховое движение, — это поворот лопасти как твердого тела вокруг оси ГШ на угол β (поло-

жителен при отклонении вверх). Движение в плоскости диска, или качание, представляет собой поворот вокруг оси ВШ на угол ξ (положителен при отклонении лопасти назад, против направления вращения). Наконец, изменение угла установки (иногда, для краткости, мы будем называть его *установочным движением*) — это поворот вокруг оси ОШ на угол θ (положителен при перемещении носка лопасти вверх). Углы взмаха и установки отсчитывают от плоскости диска (различные определения плоскости диска, используемые в теории несущего винта, рассмотрены ниже). В установившемся полете маховое движение можно описать рядом Фурье:

$$\beta(\psi) = \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi + \beta_{2c} \cos 2\psi + \beta_{2s} \sin 2\psi + \dots$$

Выясним, каков смысл входящих сюда гармоник, если маховое движение рассматривать в системе координат, связанной

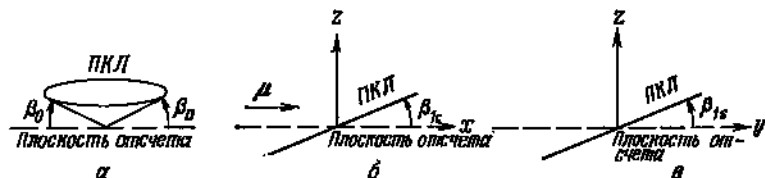


Рис. 5.5. Интерпретация гармоник махового движения.

a — угол конусности β_0 ; b — продольный наклон плоскости концов лопастей на угол β_{1c} (вид слева); v — поперечный наклон плоскости концов лопастей на угол β_{1s} (вид слева).

с диском (рис. 5.5). Нулевую гармонику, или среднее значение β_0 угла взмаха, называют *углом конусности*. Когда $\beta = \beta_0$, маховое движение не зависит от ψ , т. е. лопасти при вращении описывают конус. Концы лопастей описывают окружность, которая лежит в плоскости, параллельной плоскости отсчета (плоскости диска). Первая гармоника с коэффициентом β_{1c} определяет изменение $\Delta\beta = \beta_{1c} \cos \psi$ угла взмаха, происходящее один раз за оборот винта. Отклонение сечения лопасти от плоскости отсчета равно $z = r\Delta\beta = r\beta_{1c} \cos \psi = x\beta_{1c}$. Таким образом, если бы было $\beta = \beta_{1c} \cos \psi$, то лопасти при вращении описывали бы плоскость, повернутую вперед вокруг поперечной оси y на угол β_{1c} относительно плоскости отсчета. Аналогично первая гармоника $\Delta\beta = \beta_{1s} \sin \psi$ вызывает отклонение $z = r\Delta\beta = r\beta_{1s} \sin \psi = y\beta_{1s}$, которому соответствует плоскость, повернутая вбок (в сторону отступающей лопасти) вокруг продольной оси x на угол β_{1s} относительно плоскости отсчета. Сумма указанных трех гармоник определяет конус, ось которого имеет поперечный и продольный наклоны. При этом траектория концов лопастей остается окружностью, которая лежит в плоскости, называемой *плоскостью концов лопастей* (ПКЛ). Углы β_{1c} и β_{1s} определяют ориентацию этой плоскости относительно плоскости отсчета. Высшие гармо-

ники махового движения (с коэффициентами β_{2c} , β_{2s} и т. д.) деформируют плоскость концов лопастей в более сложную поверхность. Однако коэффициенты этих гармоник обычно малы, так что маховое движение лопастей при полете вперед характеризуется в основном величинами β_0 , β_{1c} и β_{1s} .

Угол качания также можно представить рядом Фурье:

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_{1c} \cos \psi + \zeta_{1s} \sin \psi + \dots$$

Нулевая гармоника, или *угол отставания* ζ_0 , — это средний угол качания лопасти относительно втулки несущего винта (рис. 5.6). Первой гармонике с коэффициентом ζ_{1c} соответствует смещение

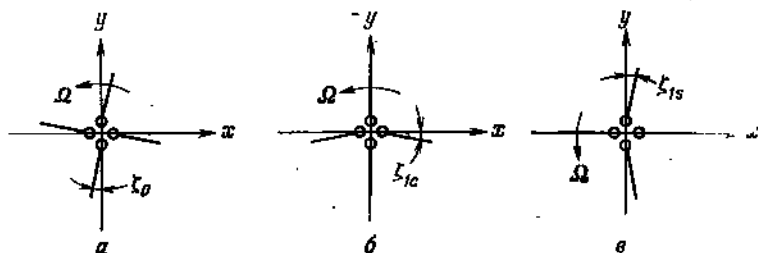


Рис. 5.6. Интерпретация гармоник качания.

a — угол отставания ζ_0 ; *b* — смещение лопастей вбок на угол ζ_{1c} ; *v* — смещение лопастей назад на угол ζ_{1s} .

лопастей вбок, причем при $\zeta_{1c} > 0$ смещение происходит влево (см. рис. 5.6). Если пренебречь относом ВШ, то центр масс лопасти имеет координаты

$$x_{ц.м} = r_{ц.м} \cos(\psi - \zeta) \approx r_{ц.м} (\cos \psi + \zeta \sin \psi),$$

$$y_{ц.м} = r_{ц.м} \sin(\psi - \zeta) \approx r_{ц.м} (\sin \psi - \zeta \cos \psi),$$

где $r_{ц.м}$ — радиальная координата центра масс. Положение центра масс всего винта определяется путем осреднения этих выражений по азимуту и умножения на число лопастей. Используя определения коэффициентов Фурье, получим

$$(x_{ц.м})_{п.в.} = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_{ц.м} d\psi = (N/2) r_{ц.м} \zeta_{1s},$$

$$(y_{ц.м})_{п.в.} = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_{ц.м} d\psi = -(N/2) r_{ц.м} \zeta_{1c}.$$

Таким образом, качание по первой гармонике с коэффициентом ζ_{1c} вызывает поперечное смещение центра масс несущего винта. Аналогично качанию по первой гармонике с коэффициентом ζ_{1s} соответствует продольное смещение лопастей в плоскости вра-

щения (назад, если $\xi_{1s} > 0$) и продольное смещение центра масс винта. Характер движения лопастей при учете только нулевых и первых гармоник махового движения и качания позволяет сделать вывод о том, что угол конусности β_0 обусловлен средней подъемной силой лопасти, угол отставания ξ_0 — средним аэродинамическим моментом лопасти, первые гармоники махового движения — моментами на диске винта, а первые гармоники качания — движением втулки в плоскости диска.

Ряд Фурье, описывающий изменение угла установки лопасти, имеет вид

$$\theta = \theta_0 + \theta_{1c} \cos \psi + \theta_{1s} \sin \psi + \dots$$

Здесь нулевая гармоника θ_0 — это средний угол установки лопасти, а первые гармоники ряда характеризуют циклическое изменение угла установки с частотой 1. Изменение угла установки лопасти происходит по двум причинам. Во-первых, при работе винта возникают упругие деформации лопасти и элементов цепи управления (динамические степени свободы). Это движение описывают уравнения, которые выводятся из условия равенства нулю суммы моментов, действующих на лопасть относительно ее оси. Во-вторых, угол установки изменяется вследствие действия системы управления. Именно изменением угла установки лопастей летчик управляет вертолетом. Моменты относительно оси лопасти малы, а изменения подъемной силы, вызванные действием управления, значительны, так как происходит непосредственное изменение угла атаки. Поэтому управление углом установки лопастей — весьма эффективный способ управления силами, создаваемыми несущим винтом. Обычно управление охватывает только нулевую и первую гармонику, т. е. задает угол установки $\theta = \theta_0 + \theta_{1c} \cos \psi + \theta_{1s} \sin \psi$ без учета деформаций. Среднее значение θ_0 называют *общим шагом винта*, а сумму первых гармоник с коэффициентами θ_{1c} и θ_{1s} — *циклическим шагом*. Изменение общего шага позволяет управлять в основном средними силами на лопастях, а значит, величиной силы тяги винта, изменение же циклического шага дает возможность управлять ориентацией плоскости концов лопастей (т. е. первыми гармониками махового движения), а значит, наклоном вектора силы тяги. Угол θ_{1c} определяет поперечный наклон вектора силы тяги, угол θ_{1s} — продольный.

Вертолет должен иметь механизм, осуществляющий изменение общего и циклического шагов лопастей. Изменение шага осуществляется с помощью осевого шарнира (рис. 5.3). Поводок жестко соединен с лопастью (место соединения находится дальше от оси вращения, чем подшипник ОШ), а тяга прикреплена к поводку так, что ее вертикальное перемещение вызывает изменение угла установки. Таким образом, нужен механизм, который обеспечивает синусоидальное перемещение тяги по верти-

кали с периодом $2\pi/\Omega$. Конструкции такого (или эквивалентного ему) механизма у различных вертолетов весьма сходны. Имеются и другие способы изменения подъемной силы лопасти, например применение сервозакрылков Камана. Существуют также разнообразные механические устройства для управления сервозакрылками. Однако все способы управления несущим винтом можно рассматривать как воплощение описанных выше общих идей. Широкое распространение получила система управления углом установки лопасти с помощью автомата перекоса¹⁾.

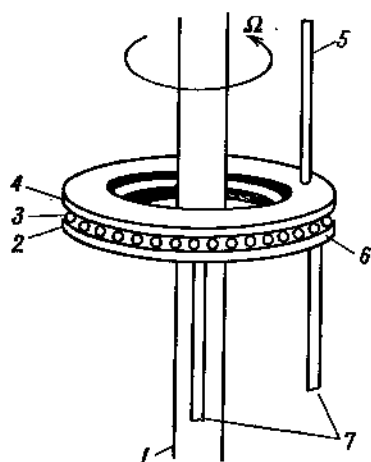


Рис. 5.7. Схема автомата перекоса.

1—вал внята; 2—невращающееся кольцо; 3—подшипник; 4—вращающееся кольцо; 5—тяга к поводку лопасти (на каждую лопасть по тяге); 6—наклоняемая тарелка; 7—к органам управления.

тарелкой автомата перекоса. Вращающееся кольцо крепится к валу на кардане, который позволяет произвольным образом ориентировать плоскость автомата перекоса относительно вала, когда одно кольцо вращается, а другое неподвижно. Тяги лопастей прикреплены к вращающемуся кольцу, а тяги, идущие от органов управления, — к неподвижному. Перемещение тарелки вдоль вала вызывает вертикальное перемещение тяг лопастей, которое не зависит от азимута и потому изменяет общий шаг θ_0 лопастей. Если тарелке придать поперечный наклон $\varphi_{a.л.}$, то это вызовет синусоидальное перемещение тяги лопасти по вертикали: $z_{т.л.} = \varphi_{a.л.} x_{т.л.} = \varphi_{a.л.} r_{т.л.} \sin \psi$. Аналогично продольный наклон тарелки на угол $\varphi_{a.п.}$ вызывает перемещение $z_{т.л.} = \varphi_{a.п.} r_{т.л.} \cos \psi$. Таким образом, наклон тарелки автомата пере-

Автомат перекоса — это механизм, который преобразует движение невращающихся элементов системы управления (задаваемое летчиком) в циклическое изменение углов установки вращающихся лопастей. На рис. 5.7 схематически показано устройство автомата перекоса. Реальные конструкции этого механизма весьма разнообразны, но на рисунке представлены основные элементы, которые в той или иной форме должны быть в любой конструкции. Автомат перекоса состоит из вращающегося и невращающегося колец, соединенных подшипником и соосных с валом несущего винта. Оба кольца вместе с соединяющим их подшипником иногда называют

¹⁾ Автомат перекоса изобретен В. Н. Юрьевым в 1911 г.— *Прим. перев.*

коса, задаваемый движением ручки управления, обеспечивает управление циклическим шагом лопастей, а вертикальное перемещение тарелки (или его эквивалент, если имеется отдельный механизм) — управление общим шагом. В общем случае действие системы управления можно охарактеризовать положением *плоскости управления*: наклон этой плоскости определяет циклический шаг, а ее положение по вертикали — общий шаг. Так как изменение угла установки лопасти может быть вызвано и другими причинами (например, кинематической связью установочного и махового движений), положение плоскости управления не всегда полностью определяет установочное движение лопасти.

Существует плоскость отсчета, относительно которой циклический шаг равен нулю. Эта плоскость называется *плоскостью постоянных углов установки*, так как отсчитываемый от нее угол θ будет постоянным. Чтобы найти ее положение, рассмотрим произвольную плоскость отсчета, относительно которой коэффициенты Фурье θ_{1c} и θ_{1s} не равны нулю. Плоскость постоянных углов установки получим в результате поворота первоначальной плоскости вокруг поперечной оси y назад на угол θ_{1s} и поворота вокруг продольной оси x влево на угол θ_{1c} . Эти повороты соответствуют повороту лопасти на азимуте ψ вокруг оси ОШ на угол $\theta_{1c} \cos \psi + \theta_{1s} \sin \psi$ относительно плоскости отсчета, т. е. из первоначального угла установки вычитается как раз циклический шаг. Следовательно, первую гармонику с коэффициентом θ_{1s} угла установки можно трактовать как следствие продольного наклона плоскости постоянных углов установки, а первую гармонику с коэффициентом θ_{1c} — как следствие поперечного наклона этой плоскости. В результате действия управления плоскость концов лопастей (а с ней и вектор силы тяги) наклоняется параллельно плоскости постоянных углов установки. Поэтому введение угла θ_{1s} обеспечивает продольное управление вертолетом, а введение угла θ_{1c} — поперечное управление. Плоскость постоянных углов установки часто используют в теории несущего винта, так как отсутствие циклического изменения θ несколько упрощает выкладки. Заметим, что плоскость постоянных углов установки и плоскость управления, вообще говоря, не совпадают: первая определяется полным углом установки лопасти, а вторая — системой управления, т. е. той составляющей угла установки, которая задается управлением.

Рассмотрим теперь следствия из того факта, что углы взмаха и установки (точнее говоря, первые гармоники β и θ) определяют ориентацию плоскости хорд лопасти относительно плоскости отсчета (плоскости диска). Выясним, как преобразуются β и θ при переходе от одной плоскости отсчета к другой, если положение лопасти в пространстве не изменяется. Положение лопасти в пространстве (относительно набегающего потока),

имеет физический смысл, а выбор плоскости отсчета произволен, хотя для решения конкретной задачи некоторая плоскость отсчета может быть более удобна, чем другие. Таким образом, следует ожидать, что существуют инварианты указанных преобразований, т. е. величины, характеризующие ориентацию лопасти в пространстве и потому не зависящие от выбора плоскости отсчета. Рассмотрим две плоскости отсчета, одна из которых наклонена вперед на угол φ_y относительно другой. Вследствие этого наклона угол взмаха относительно первой из указанных плоскостей уменьшается при $\psi = 0$ на φ_y и на ту же величину увеличивается при $\psi = 180^\circ$, а угол установки при $\psi = 90^\circ$ увеличивается на φ_y и уменьшается на φ_y при $\psi = 270^\circ$. Это наводит на мысль, что в результате наклона плоскости отсчета коэффициент β_{1c} уменьшается на φ_y , а коэффициент β_{1s} возрастает на ту же величину. Углы взмаха и установки преобразуются таким образом, что первые гармоники β и θ , измеряемые относительно новой плоскости отсчета, изменяются на одну и ту же величину, но со сдвигом по фазе на 90° . Аналогично поперечный наклон плоскости отсчета на угол φ_x вызывает уменьшение β_{1s} и θ_{1c} на φ_x . Таким образом, величины $\beta_{1c} + \theta_{1s}$ и $\beta_{1s} - \theta_{1c}$ должны быть независимыми от выбора плоскости отсчета. Выведем теперь более строго формулы преобразований углов при изменении плоскости отсчета.

Во вращающейся системе координат углы β и θ определяют ориентацию плоскости хорд лопасти относительно некоторой плоскости отсчета. В невращающейся системе координат плоскость хорд имеет поперечный наклон на угол $\theta \cos \psi + \beta \sin \psi$ и продольный наклон на угол $\theta \sin \psi - \beta \cos \psi$. Если теперь повернуть плоскость отсчета на угол φ_x вбок и на угол φ_y вперед, то получим вторую плоскость отсчета. Так как положение лопасти в пространстве остается неизменным, углы ориентации лопасти связаны следующими соотношениями:

$$\theta_2 \cos \psi + \beta_2 \sin \psi = \theta_1 \cos \psi + \beta_1 \sin \psi - \varphi_x,$$

$$\theta_2 \sin \psi - \beta_2 \cos \psi = \theta_1 \sin \psi - \beta_1 \cos \psi - \varphi_y,$$

или, во вращающейся системе координат, — соотношениями

$$\theta_2 = \theta_1 - \varphi_x \cos \psi - \varphi_y \sin \psi,$$

$$\beta_2 = \beta_1 - \varphi_x \sin \psi + \varphi_y \cos \psi.$$

Эти формулы описывают преобразования углов взмаха и установки (если учитывать только первые гармоники). Разлагая β и θ в ряды Фурье, получим

$$(\theta_{1c})_2 = (\theta_{1c})_1 - \varphi_x, \quad (\beta_{1c})_2 = (\beta_{1c})_1 + \varphi_y,$$

$$(\theta_{1s})_2 = (\theta_{1s})_1 - \varphi_y, \quad (\beta_{1s})_2 = (\beta_{1s})_1 - \varphi_x.$$

Если исключить отсюда φ_x и φ_y , то обнаружится, что при переходе от одной плоскости отсчета к другой величины $\beta_{1s} - \theta_{1c}$ и

$\beta_{1c} + \theta_{1s}$ не изменяются. Вводя углы, отсчитываемые от плоскости постоянных углов установки (ППУ) и от плоскости концов лопастей (ПКЛ), будем иметь

$$\beta_{1s} - \theta_{1c} = (\beta_{1s})_{\text{ППУ}} = -(\theta_{1c})_{\text{ПКЛ}},$$

$$\beta_{1c} + \theta_{1s} = (\beta_{1c})_{\text{ППУ}} = (\theta_{1s})_{\text{ПКЛ}}.$$

Коэффициенты θ_{1c} и θ_{1s} определяют ориентацию плоскости постоянных углов установки относительно произвольной плоскости отсчета, а коэффициенты β_{1c} и β_{1s} — ориентацию плоскости концов лопастей. Как показано на рис. 5.8, величины $\beta_{1c} + \theta_{1s}$ и $\beta_{1s} - \theta_{1c}$ — это просто углы между ПКЛ и ППУ соответственно в продольной и поперечной плоскостях. Эти углы, конечно, не

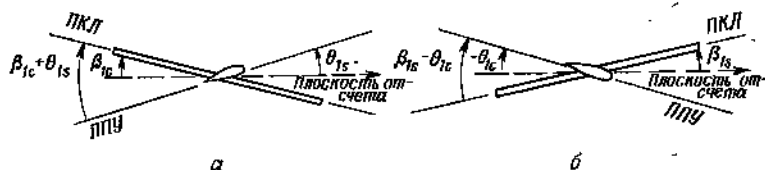


Рис. 5.8. Эквивалентность махового и установочного движений.

а — продольный наклон ПКЛ относительно ППУ (вид со стороны наступающей лопасти);
б — поперечный наклон ПКЛ относительно ППУ (вид спереди).

могут зависеть от выбора плоскости отсчета. Плоскость, относительно которой нет махового движения, и плоскость, относительно которой нет установочного движения, имеют физический смысл и потому связаны с инвариантами преобразования угла взмаха и угла установки при переходе от одной плоскости отсчета к другой. Тот факт, что посредством преобразования плоскости отсчета циклическое изменение угла взмаха можно заменить циклическим изменением угла установки и наоборот, свидетельствует об эквивалентности махового и установочного движений.

Полезно рассмотреть несущий винт без относ осей ГШ и подшипников ОШ. Хотя такая конструкция практически неприемлема, она удобна для описания основных свойств шарнирного винта. ГШ и ОШ без отнosa эквивалентны креплению лопасти к втулке на кардане, который допускает произвольную ориентацию вала несущего винта при сохранении лопастью неизменного положения в пространстве. В этом случае ориентация вала не оказывает влияния на аэродинамические и динамические характеристики лопасти; значение имеет только взаимное расположение ППУ и ПКЛ. Поэтому при анализе в качестве плоскости отсчета можно использовать ППУ или ПКЛ, не принимая во внимание ориентацию вала винта, пока не потребуются рассчитать углы наклона тарелки автомата перекося. В последнем случае эквивалентность махового и установочного движений позволяет

легко найти изменения углов β и θ при различных возможных ориентациях вала винта. Для бесшарнирного винта или для шарнирного винта с относом шарниров ориентация вала относительно ППУ или ПКЛ имеет физический смысл. Плоскость отсчета, перпендикулярную валу несущего винта, называют *плоскостью вращения*.

На рис. 5.9 показаны различные плоскости отсчета, используемые в теории несущего винта при полете вперед. При вертикальном полете естественной плоскостью отсчета служит горизонтальная плоскость диска. Вследствие осевой симметрии течения ППУ и ПКЛ горизонтальны. Плоскость же вращения в

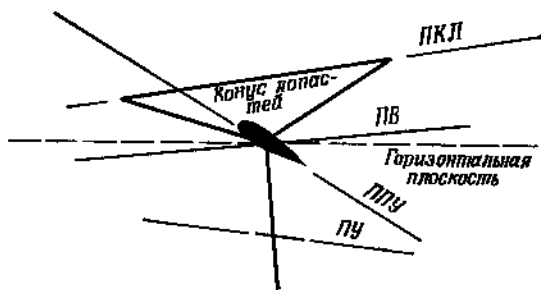


Рис. 5.9. Плоскости отсчета: плоскость концов лопастей (ПКЛ), плоскость постоянных углов установки (ППУ), плоскость вращения (ПВ) и плоскость управления (ПУ).

вертикальном полете не обязательно горизонтальна; горизонтальна она только в том случае, когда центр масс вертолета расположен на оси вала несущего винта. В гл. 2 и 3 не требовалось рассматривать плоскость вращения, так как анализ работы несущего винта на режиме висения в основном связан с аэродинамическими характеристиками. Однако при полете вперед физический смысл имеют несколько плоскостей отсчета, причем вследствие асимметрии в распределениях скоростей и аэродинамических сил эти плоскости в общем случае не совпадают с горизонтальной плоскостью и между собой. Плоскость концов лопастей (ПКЛ) параллельна плоскости, которую описывают концы лопастей, так что относительно ПКЛ отсутствует маховое движение по первой гармонике. Ориентацию ПКЛ определяют углы β_{1c} и β_{1s} между этой и любой другой плоскостью. Относительно плоскости постоянных углов установки (ППУ) отсутствует установочное движение по первой гармонике; ориентацию ППУ определяют углы θ_{1c} и θ_{1s} между нею и любой другой плоскостью. Плоскость управления (ПУ) определяется изменением угла установки, которое задается системой управления. Эту плоскость можно считать параллельной плоскости тарелки автомата перекоса. Плоскость вращения (ПВ) нормальна к валу несущего винта. ПВ является естественной плоскостью отсчета в тех случаях, когда существенна ориентация лопасти относительно втулки; таковы случаи винта с относом шарниров и бесшарнирного винта. Относительно ПВ лопасть совершает

циклические маховое и установочное движения. Хотя в общем случае ни одна из указанных плоскостей не совпадает с другой, в некоторых частных случаях такое совпадение имеет место. Если лопасти совершают маховое движение, а циклическое управление углом установки отсутствует (как у рулевого винта или у несущих винтов некоторых автожиров), то совпадают ПВ и ПУ. Если отсутствует связь между маховым и установочным движениями или если изменение угла установки определяется только действием управления, то совпадают ПУ и ППУ. Наконец, если маховое движение отсутствует, а установочное движе-

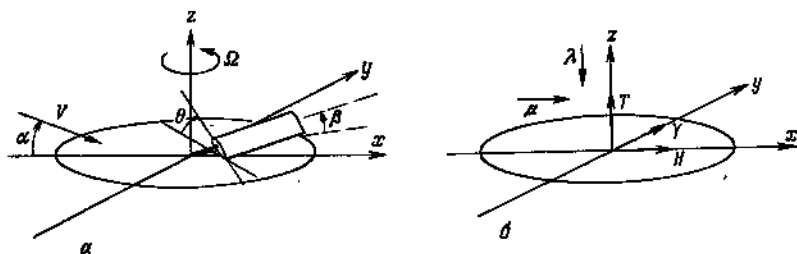


Рис. 5.10. К определению углов, скоростей и сил при заданной плоскости отсчета.

а—скорости и углы; *б*—силы и безразмерные скорости.

ние есть (как у пропеллеров с циклическим шагом), то совпадают ПВ и ПКЛ.

На рис. 5.10 представлены величины, которые характеризуют движение лопасти, скорости потока, обтекающего винт, и действующие на него силы при заданной плоскости отсчета. Оси *x* и *y* невращающейся системы координат лежат в плоскости отсчета, а ось *z* нормальна к ней. Углы взмаха и установки измеряются от плоскости отсчета. Скорость набегающего потока образует с плоскостью *xy* угол α (положителен, когда ось *z* наклонена вперед). Индуктивная скорость *v* считается нормальной к плоскости отсчета. Безразмерные составляющие скорости — параллельная плоскости отсчета и нормальная к ней — носят соответственно названия характеристики режима работы винта μ и коэффициента протекания λ , т. е.

$$\mu = V \cos \alpha / (\Omega R), \quad \lambda = (V \sin \alpha + v) / (\Omega R) = \mu \operatorname{tg} \alpha + \lambda_i.$$

При малых углах наклона диска $\mu \approx V / (\Omega R)$ и $\lambda = \mu \alpha + \lambda_i$. Следовательно, α (а значит, и λ) зависит от выбора плоскости отсчета, тогда как характеристику режима μ приблизительно можно считать не зависящей от этого выбора. Составляющие силы, которую создает несущий винт, также определяются относительно выбранной плоскости отсчета: сила тяги *T* нормальна к ней,

а продольная H и поперечная Y силы лежат в этой плоскости. Коэффициенты сил определены следующим образом:

$$C_T = \frac{T}{\rho A (\Omega R)^2}, \quad C_H = \frac{H}{\rho A (\Omega R)^2}, \quad C_Y = \frac{Y}{\rho A (\Omega R)^2}.$$

Аналогично определяются для заданной плоскости отсчета коэффициенты C_{M_x} и C_{M_y} моментов на втулке, а также коэффициент C_Q аэродинамического крутящего момента. Результирующая сила несущего винта должна не зависеть от выбора плоскости отсчета. Так как сила тяги обычно намного больше продольной и поперечной сил, ее можно приближенно считать не связанной с плоскостью отсчета. Выше были получены формулы преобразования углов взмаха и установки при переходе от одной плоскости отсчета к другой. Если углы поворота новой плоскости относительно старой вокруг продольной и поперечной осей равны соответственно φ_x и φ_y , то

$$\begin{aligned} (\theta_{1c})_2 &= (\theta_{1c})_1 - \varphi_x, & (\beta_{1c})_2 &= (\beta_{1c})_1 + \varphi_y, \\ (\theta_{1s})_2 &= (\theta_{1s})_1 - \varphi_y, & (\beta_{1s})_2 &= (\beta_{1s})_1 - \varphi_x. \end{aligned}$$

Следовательно, величины $\beta_{1s} - \theta_{1c}$ и $\beta_{1c} + \theta_{1s}$, которые описывают ориентацию плоскости концов лопастей относительно плоскости постоянных углов установки, инвариантны при преобразовании плоскости отсчета. Интересно также выяснить инварианты составляющих сил и скоростей при таком преобразовании. Если наклон новой плоскости отсчета относительно старой определен указанными углами, то составляющие скорости, угол атаки и составляющие силы преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 - \mu_1 \varphi_y, & T_2 &= T_1 - \varphi_x Y_1 + \varphi_y H_1 \approx T_1, \\ \mu_2 &= \mu_1 + \lambda_1 \varphi_y \approx \mu_1, & H_2 &= H_1 - \varphi_y T_1, \\ \alpha_2 &= \alpha_1 - \varphi_y, & Y_2 &= Y_1 + \varphi_x T_1. \end{aligned}$$

Исключив отсюда φ_x и φ_y , можно найти величины, которые не зависят от ориентации плоскости отсчета. Заметим, что в принятом здесь приближении характеристика режима работы винта μ и сила тяги T сами будут инвариантами. Наиболее полезны выражения инвариантных скоростей и сил через величины, связанные с ПКЛ или ППУ:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_{\text{ППУ}} + \mu \theta_{1s} = \lambda_{\text{ПКЛ}} - \mu \beta_{1c}, \\ \alpha &= \alpha_{\text{ППУ}} + \theta_{1s} = \alpha_{\text{ПКЛ}} - \beta_{1c}, \\ H &= H_{\text{ППУ}} + \theta_{1s} T = H_{\text{ПКЛ}} - \beta_{1c} T, \\ Y &= Y_{\text{ППУ}} - \theta_{1c} T = Y_{\text{ПКЛ}} - \beta_{1s} T. \end{aligned}$$

Для коэффициента протекания получаем соотношения $\lambda = \mu \alpha + \lambda_i = \mu (\alpha_{\text{ППУ}} + \theta_{1s}) + \lambda_i = \mu (\alpha_{\text{ПКЛ}} - \beta_{1c}) + \lambda_i$.

Теперь начнем исследование аэродинамических и динамических характеристик несущего винта при полете вперед. Сначала будет рассмотрен простейший случай несущего винта со всеми шарнирами без отбоя ГШ и без пружин в них, а также без связи угла установки с углом взмаха; лопасти абсолютно жесткие и совершают только маховое движение; система управления недеформируемая, а влияние зоны обратного обтекания, эффекты неоперенной части лопасти и концевые потери пренебрежимо малы. Прежде всего будут выведены аэродинамические соотношения для лопасти при полете вперед и получены формулы для сил, создаваемых несущим винтом. Затем будет исследовано маховое движение лопасти. Остальные разделы этой главы будут посвящены некоторым факторам, влияние которых простейшая схема винта не учитывает.

5.2. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛОПАСТИ

В этом разделе будут выведены формулы для сил, действующих на лопасть при полете вперед. Рассмотрим несущий винт со всеми шарнирами, но без отбоя ГШ. Лопасти абсолютно жесткие, они машут и изменяют свои общий и циклический шаги под действием управления, т. е. изгибные и крутильные деформации лопастей пренебрежимо малы. Такая схема достаточна для определения аэродинамических характеристик и характеристик управления шарнирного несущего винта. Чтобы найти аэродинамические силы в сечении, используем теорию элемента лопасти. Влиянием зоны обратного обтекания пока пренебрежем. Плоскость отсчета выбираем произвольно.

Теория элемента лопасти основана на предположении, что каждое сечение лопасти работает как профиль в двумерном потоке, а влияние следа несущего винта полностью учтено величиной индуктивной скорости в этом сечении. Тогда, зная движение лопасти и условия обтекания данного сечения, можно использовать профильные характеристики для расчета нагрузок каждого сечения. Индуктивную скорость можно найти различными способами: по импульсной теории, по вихревой теории или путем расчета неравномерного распределения скоростей протекания численными методами. Для применения рассматриваемой теории удлинение лопастей должно быть большим, что как раз и характерно для винтокрылых аппаратов. Однако вблизи конца лопасти или в тех областях, где вследствие взаимодействия лопасти с вихрем велики градиенты индуктивной скорости, для уточнения результатов следует применять теорию несущей поверхности.

Рассмотрим составляющие скорости потока, обтекающего сечение лопасти (рис. 5.11). Угол θ установки сечения изме-

рется от плоскости отсчета до линии нулевой подъемной силы; он включает в себя общий и циклический шаги лопасти, заданные управлением, и конструктивную крутку в данном сечении. Относительную скорость воздуха, обтекающего лопасть, разложим на три составляющие: u_T — параллельную плоскости отсчета (направлена к задней кромке), u_P — перпендикулярную этой плоскости (направлена вниз) и u_R — радиальную (направлена к концу лопасти). В сечении получаем результирующую скорость $U = (u_T^2 + u_P^2)^{1/2}$ и угол притекания $\varphi = \text{arctg}(u_P/u_T)$. Тогда угол атаки сечения $\alpha = \theta - \varphi$. Относительная скорость

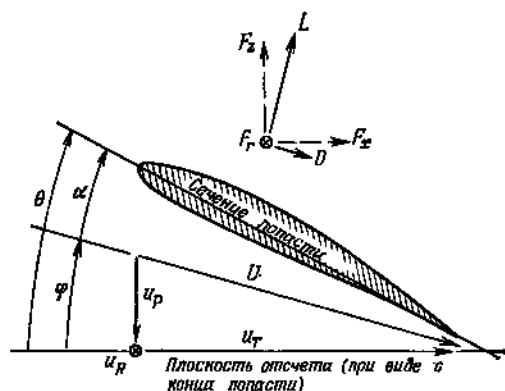


Рис. 5.11. Скорости и силы в сечении лопасти.

обтекания лопасти определяется вращением несущего винта, движением вертолета вперед, индукцией следа и собственным движением лопасти. В приближении первого порядка величины тангенциальной и радиальной составляющих скорости обусловлены только вращением винта и движением вертолета (рис. 5.12):

$$u_T = r + \mu \sin \psi, \quad u_R = \mu \cos \psi.$$

Эти величины не зависят от выбора плоскости отсчета. Нормальная составляющая u_P есть сумма трех слагаемых: $\Omega R \lambda$, которое складывается из индуктивной скорости и нормальной к плоскости отсчета составляющей скорости набегающего потока (напомним, что $\lambda = \mu \alpha + \lambda_i$), $r d\beta/dt$ — скорости, обусловленной маховым движением, и $\Omega R \beta \mu \cos \psi$ — составляющей радиальной скорости u_R , которая нормальна к оси лопасти при взмахе на угол β (рис. 5.12). Таким образом, безразмерная нормальная скорость описывается выражением

$$u_P = \lambda + r\dot{\beta} + \mu\beta \cos \psi.$$

Отметим, что каждое слагаемое u_P зависит от выбора плоскости отсчета; здесь они определены в предположении, что угол взмаха β мал. Хотя угол установки и проекции скорости зависят от вы-

бора плоскости отсчета, условия обтекания сечения лопасти, определяемые результирующей скоростью и углом атаки, не должны зависеть от этого выбора. Действительно, при малых углах притекания легко показать, что $U \approx u_T$ и $\alpha \approx \theta - u_p/u_T$ инвариантны при преобразовании плоскости отсчета.

На рис. 5.11 показаны также аэродинамические силы, действующие в сечении лопасти. Подъемная сила L и сопротивле-

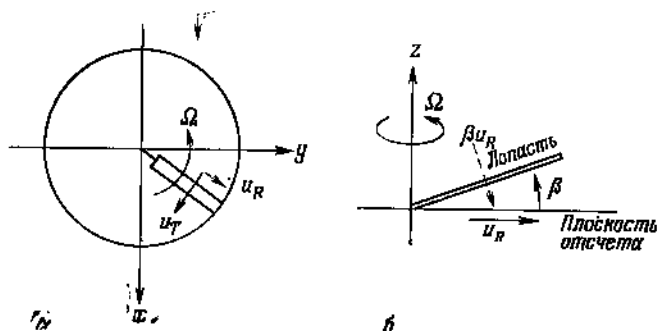


Рис. 5.12. Составляющие относительной скорости потока, обтекающего лопасть при полете вперед.

а — составляющие скорости в плоскости отсчета; *б* — слагаемое u_R скорости u_p .

ние D направлены соответственно по нормали к результирующей скорости U и параллельно ей. Эти силы можно выразить через коэффициенты подъемной силы и сопротивления:

$$L = \frac{1}{2} \rho U^2 c_l, \quad D = \frac{1}{2} \rho U^2 c_d,$$

где c_l и c_d — функции угла атаки α сечения лопасти и числа Маха $M = M_\infty U$. Здесь ρ — плотность воздуха (которая не входит в формулы безразмерных величин), c — длина хорды лопасти, $M_\infty = \Omega R / c_{зв}$ — концевое число Маха. Подъемную силу и сопротивление сечения можно разложить на следующие составляющие: параллельную плоскости отсчета и нормальную к оси лопасти; нормальную к плоскости отсчета; радиальную, которая параллельна плоскости отсчета (направлена от оси вращения). Первые две составляющие описываются выражениями

$$F_z = L \cos \varphi - D \sin \varphi, \quad F_x = L \sin \varphi + D \cos \varphi$$

(первое слагаемое F_x — индуктивное сопротивление, второе — профильное сопротивление). Радиальная составляющая равна

$$F_r = -\beta F_z + D_{\text{рад.}}$$

Первое слагаемое представляет собой радиальную составляющую нормальной силы при взмахе лопасти на угол β . Второе слагаемое — радиальная сила сопротивления, обусловленная радиальным течением вдоль лопасти; до разд. 5.12 эта сила не

рассматривается. Если в приведенные выше формулы подставить выражения L и D через коэффициенты сил, действующих в сечении, и отнести проекции результирующей силы к произведению длины s хорды на градиент a подъемной силы сечения по углу атаки, то после перехода к безразмерным величинам получим следующие формулы для проекций результирующей силы на оси системы координат, связанной с лопастью:

$$F_{zj}(ac) = U^2 [(c_i/2a) \cos \varphi - (c_d/2a) \sin \varphi],$$

$$F_{xj}(ac) = U^2 [(c_i/2a) \sin \varphi + (c_d/2a) \cos \varphi],$$

$$F_{rj}(ac) = -\beta F_{zj}(ac).$$

Далее мы будем считать коэффициент протекания λ и углы β , φ , θ малыми величинами и пренебрежем влияниями срыва и сжимаемости воздуха. Из предположения о малости указанных величин следует, что u_p/u_T и α также малы, $\varphi \simeq u_p/u_T$, $\sin \varphi \simeq \varphi$, $\cos \varphi \simeq 1$, $U^2 \simeq u_T^2$ и $\alpha \simeq \theta - u_p/u_T$. Считая наклон кривой подъемной силы сечений постоянным, получим $c_i \approx \alpha a$, а следствием предположения об отсутствии срыва является соотношение $c_d/c_i \ll 1$. Из этого неравенства, а также из условия малости углов вытекает, что $F_z \approx L$ и $F_x \approx \varphi L + D$. Таким образом, выражения для аэродинамических сил в сечении лопасти принимают вид

$$F_{zj}(ac) = (1/2) u_T^2 \alpha = (u_T^2 \theta - u_p u_T)/2,$$

$$F_{xj}(ac) = u_T^2 \left(\frac{\alpha}{2} \varphi + \frac{c_d}{2a} \right) = (u_p u_T \theta - u_p^2)/2 + c_d u_T^2 / (2a),$$

$$F_{rj}(ac) = -\beta F_{zj}(ac).$$

5.3. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ НЕСУЩЕГО ВИНТА

Выведем теперь выражения для аэродинамических сил, действующих на несущий винт. Используем при этом произвольную плоскость отсчета, хотя некоторые величины будут исследованы в системе координат, связанной с плоскостью постоянных углов установки или плоскостью концов лопастей. Сила тяги T нормальна к плоскости диска (плоскости отсчета), продольная сила H действует в плоскости диска и направлена назад, поперечная сила Y лежит в плоскости диска и направлена в сторону наступающей лопасти (рис. 5.10). Продольная и поперечная силы в плоскости концов лопастей обычно малы, так что величины отношений H/T и Y/T имеют тот же порядок, что и углы наклона ПКЛ. Кроме того, несущий винт создает аэродинамический крутящий момент Q , который считается положительным, когда винт потребляет мощность. В случае шарнирного винта без отброса ГШ моменты тангажа и крена не могут передаваться на втулку винта. Силы, действующие на винт, определяются ин-

тегрированием по радиусу лопастей сил, действующих в сечениях. Сила тяги винта складывается из нормальных сил F_z , продольная и поперечная сила — из проекций сил F_x и F_r на оси вращающейся системы координат, крутящий момент — из сил F_x . Умножая интегралы на число N лопастей, найдем аэродинамические силы и момент для всего несущего винта:

$$T = N \int_0^R F_z dr,$$

$$H = N \int_0^R (F_x \sin \psi + F_r \cos \psi) dr,$$

$$Y = N \int_0^R (-F_x \cos \psi + F_r \sin \psi) dr,$$

$$Q = N \int_0^R r F_x dr.$$

Чтобы получить стационарные силы, нужно еще осреднить эти выражения по азимуту [применив оператор $(1/2\pi) \int_0^{2\pi} (\dots) d\psi$].

Заметим, что коэффициент силы тяги C_T равен $T/[\rho A (\Omega R)^2] = (N/\pi) \int_0^R F_z [\rho R (\Omega R)^2] (dr/R) = [Nc/(\pi R)] \int_0^R F_z [\rho c (\Omega R)^2] (dr/R)$, или,

в безразмерных величинах, $C_T = \int_0^1 \sigma (F_z/c) dr$. Вообще длина хорды лопасти зависит от r , но здесь будет рассмотрен случай постоянной хорды. Тогда коэффициент заполнения σ также постоянен и коэффициент силы тяги

$$C_T/(\sigma a) = \int_0^1 [F_z/(ac)] dr.$$

Аналогично

$$C_H/(\sigma a) = \int_0^1 [(F_x/ac) \sin \psi + (F_r/ac) \cos \psi] dr,$$

$$C_Y/(\sigma a) = \int_0^1 [-(F_x/ac) \cos \psi + (F_r/ac) \sin \psi] dr,$$

$$C_Q/(\sigma a) = \int_0^1 r (F_x/ac) dr.$$

Считая соответствующие углы малыми и пренебрегая конечными потерями и влиянием неоперенной части лопасти, мы можем подставить в эти интегралы выражения для элементарных сил; в результате получим

$$\frac{C_T}{\sigma a} = \int_0^1 \frac{1}{2} (u_T^2 \theta - u_P u_T) dr,$$

$$\frac{C_H}{\sigma a} = \int_0^1 \left\{ \left[\frac{1}{2} (u_P u_T \theta - u_P^2) + \frac{c_d}{2a} u_T^2 \right] \sin \psi - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \beta (u_T^2 \theta - u_P u_T) \cos \psi \right\} dr,$$

$$\frac{C_Y}{\sigma a} = \int_0^1 \left\{ - \left[\frac{1}{2} (u_P u_T \theta - u_P^2) + \frac{c_d}{2a} u_T^2 \right] \cos \psi - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \beta (u_T^2 \theta - u_P u_T) \sin \psi \right\} dr,$$

$$\frac{C_Q}{\sigma a} = \int_0^1 r \left[\frac{1}{2} (u_P u_T \theta - u_P^2) + \frac{c_d}{2a} u_T^2 \right] dr,$$

где

$$u_T = r + \mu \sin \psi, \quad u_P = \lambda + r\beta + \beta\mu \cos \psi,$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi + \beta_{2c} \cos 2\psi + \beta_{2s} \sin 2\psi + \dots,$$

$$\theta = \theta_0 + \theta_{\kappa P} r + \theta_{1c} \cos \psi + \theta_{1s} \sin \psi.$$

Крутку лопасти будем считать линейной, а распределение скоростей протекания, — как правило, равномерным. Угол взмаха представлен бесконечным рядом Фурье, но фактически в большей части этой главы будут рассматриваться только нулевая и первые гармоники угла взмаха.

Аналогичным образом можно определить моменты на втулке несущего винта. Момент тангажа M_y (положителен, когда отклоняет винт назад) и момент крена M_x (положителен, когда отклоняет винт в сторону отступающей лопасти) вычисляются по формулам

$$M_y = -N \int_0^R r F_z \cos \psi dr, \quad M_x = N \int_0^R r F_z \sin \psi dr.$$

После перехода к безразмерным величинам эти формулы принимают вид

$$C_{M_y}/(\sigma a) = - \int_0^1 r (F_z/ac) \cos \psi dr, \quad C_{M_x}/(\sigma a) = \int_0^1 r (F_z/ac) \sin \psi dr.$$

Заметим, что во вращающейся системе координат момент относительно оси ГШ в комле каждой лопасти M_F равен $\int_0^R r F_z dr$.

Если представить M_F в виде ряда Фурье и учесть, что силы и моменты несущего винта нужно осреднить по азимуту, то получим следующие формулы для моментов тангажа и крена:

$$M_y = -(N/2)(M_F)_{1c}, \quad M_x = (N/2)(M_F)_{1s}.$$

Таким образом, первые гармоники момента относительно оси ГШ, приложенные в центре вращения, порождают стационарные моменты тангажа и крена, действующие на вертолет. В случае шарнирного винта без отброса ГШ моменты на втулке отсутствуют, так как они равны нулю на оси ГШ. В общем же случае, как будет показано, моменты крена и тангажа можно связать с углами наклона плоскости концов лопастей. Эти углы служат мерой первых гармоник момента относительно оси ГШ.

Удобно разделить продольную и поперечную силы, а также аэродинамический момент на две части: *профильную*, связанную с коэффициентом сопротивления c_d , и *индуктивную*, связанную с коэффициентом подъемной силы c_l . Первое слагаемое будем обозначать индексом 0, второе — индексом i . Такое разделение, подсказанное разделением профильной и индуктивной мощностей, не вполне корректно, так как в индуктивные слагаемые будет входить коэффициент протекания λ , величину которого частично определяет наклон диска, необходимый для преодоления профильной части продольной силы (имеющей коэффициент C_H). Поэтому вводимое здесь разделение является, строго говоря, формальным; оно основано на том, какой коэффициент имеет соответствующая элементарная сила (момент): c_d или c_l . В разд. 5.4 из этих выражений будут получены формулы для профильной и индуктивной мощностей, согласующиеся с определениями, которые были даны в предшествующих главах. Таким образом, $C_H = C_{H_i} + C_{H_0}$, $C_Y = C_{Y_i} + C_{Y_0}$ и $C_Q = C_{Q_i} + C_{Q_0}$ (сила тяги не имеет профильной части), где

$$C_{H_0} = \int_0^1 \frac{\sigma c_d}{2} \sin^2 \psi u_T^2 dr,$$

$$C_{Y_0} = \int_0^1 \frac{\sigma c_d}{2} (-\cos \psi) u_T^2 dr,$$

$$C_{Q_0} = \int_0^1 \frac{\sigma c_d}{2} r u_T^2 dr$$

и

$$C_{H_1} = \frac{\sigma a}{2} \int_0^1 (u_T \theta - u_P) (u_P \sin \psi - u_T \beta \cos \psi) dr,$$

$$C_{Y_1} = \frac{\sigma a}{2} \int_0^1 (u_T \theta - u_P) (-u_P \cos \psi - u_T \beta \sin \psi) dr,$$

$$C_{Q_1} = \frac{\sigma a}{2} \int_0^1 r (u_P u_T \theta - u_P^2) dr.$$

Заметим, что

$$u_P \sin \psi - u_T \beta \cos \psi = \lambda \sin \psi + r \dot{\beta} \sin \psi - r \beta \cos \psi,$$

$$u_P \cos \psi + u_T \beta \sin \psi = \lambda \cos \psi + r \dot{\beta} \cos \psi + r \beta \sin \psi + \mu \beta.$$

Следующим шагом должно быть осреднение по азимуту. Используя определения коэффициентов Фурье, интегралы от θ и β можно выразить через соответствующие коэффициенты. Например, в выражение C_T входят интегралы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta u_T^2 d\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta \left[r^2 + 2r\mu \sin \psi + \frac{1}{2} \mu^2 (1 - \cos 2\psi) \right] d\psi = \\ &= (\theta_0 + r\theta_{xp}) (r^2 + \mu^2/2) + \theta_{1s} r \mu - \theta_{2c} \mu^2/4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_P u_T d\psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda + r\dot{\beta} + \mu\beta \cos \psi) (r + \mu \sin \psi) d\psi = \\ &= \lambda r + (\mu^2/4) \beta_{2s}, \end{aligned}$$

причем при вычислении второго интеграла нужно иметь в виду, что

$$\int_0^{2\pi} (r^2 \dot{\beta} + r\mu \dot{\beta} \sin \psi + r\mu \dot{\beta} \cos \psi) d\psi = \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\psi} (r^2 \beta + r\mu \beta \sin \psi) d\psi = 0,$$

так как функция $r^2 \beta + r\mu \beta \sin \psi$ — периодическая. Управление высшими гармониками угла установки отсутствует, и потому $\theta_{2c} = 0$, а высшие гармоники угла взмаха малы, так что величиной β_{2s} можно пренебречь. Следовательно, коэффициент силы тяги описывается выражением

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{\sigma a}{2} \int_0^1 [(\theta_0 + \theta_{xp} r) (r^2 + \mu^2/2) + \theta_{1s} r \mu - \lambda r] dr = \\ &= \frac{\sigma a}{2} \left[\frac{\theta_0}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2 \right) + \frac{\theta_{xp}}{4} (1 + \mu^2) + \frac{\mu}{2} \theta_{1s} - \frac{\lambda}{2} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично находим выражения для индуктивных составляющих продольной и поперечной сил несущего винта:

$$C_{H_i} = \frac{\sigma a}{2} \left[\theta_0 \left(-\frac{1}{3} \beta_{1c} + \frac{1}{2} \mu \lambda \right) + \theta_{кр} \left(-\frac{1}{4} \beta_{1c} + \frac{1}{4} \mu \lambda \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \theta_{1c} \beta_0 + \theta_{1s} \left(-\frac{1}{4} \mu \beta_{1c} + \frac{1}{4} \lambda \right) + \frac{3}{4} \lambda \beta_{1c} + \frac{1}{6} \beta_0 \beta_{1s} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \mu (\beta_0^2 + \beta_{1c}^2) \right],$$

$$C_{Y_i} = -\frac{\sigma a}{2} \left[\theta_0 \left(\frac{3}{4} \mu \beta_0 + \frac{1}{3} \beta_{1s} (1 + \frac{3}{2} \mu^2) \right) + \right. \\ \left. + \theta_{кр} \left(\frac{1}{2} \mu \beta_0 + \frac{1}{4} \beta_{1s} (1 + \mu^2) \right) + \theta_{1c} \left(\frac{1}{4} \lambda + \frac{1}{4} \mu \beta_{1c} \right) + \right. \\ \left. + \theta_{1s} \left(\frac{1}{6} \beta_0 (1 + 3\mu^2) + \frac{1}{2} \mu \beta_{1s} \right) - \frac{3}{4} \lambda \beta_{1s} + \beta_0 \beta_{1c} \left(\frac{1}{6} - \mu^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \mu \lambda \beta_0 - \frac{1}{4} \mu \beta_{1c} \beta_{1s} \right].$$

Индуктивная составляющая аэродинамического момента будет рассмотрена в разд. 5.4. При расчете профильных составляющих предполагается, что коэффициент сопротивления сечения постоянен по всему диску несущего винта и имеет соответствующее среднее значение c_{d_0} . Тогда, осредняя по азимуту, получим

$$C_{H_0} = \int_0^1 (\sigma c_{d_0} / 2) \sin \psi u_T^2 dr = \int_0^1 (\sigma c_{d_0} / 2) r \mu dr = \sigma c_{d_0} \mu / 4,$$

$$C_{Y_0} = \int_0^1 (\sigma c_{d_0} / 2) (-\cos \psi) u_T^2 dr = 0,$$

$$C_{Q_0} = \int_0^1 (\sigma c_{d_0} / 2) r u_T^2 dr = \int_0^1 (\sigma c_{d_0} / 2) r (r^2 + \mu^2 / 2) dr = \sigma c_{d_0} (1 + \mu^2) / 8.$$

Профильная часть поперечной силы равна нулю вследствие симметрии обтекания, обусловленной предположением о постоянстве коэффициента сопротивления сечений. Приведенные выше формулы получены без учета влияния зоны обратного обтекания и радиальной составляющей скорости потока, обтекающего лопасть. В разд. 5.12 будут получены выражения для профильных составляющих продольной силы, аэродинамического момента и мощности, в которых учитывается наличие зоны обратного обтекания, радиального течения и радиального сопротивления. Заметим, что радиальное сопротивление сказывается только на величине C_{H_0} , так как на аэродинамический момент оно не влияет, а $C_{Y_0} = 0$ вследствие симметрии обтекания.

Коэффициент силы тяги при полете вперед можно выразить формулой, содержащей угол установки $\theta_{0,75}$ лопасти на радиусе $r = 0,75R$ ($\theta_{0,75} = \theta_0 + 0,75\theta_{кр}$), и коэффициент протекания $\lambda_{ппу}$ через плоскость постоянных углов установки ($\lambda_{ппу} = \lambda - \mu\theta_{1s}$):

$$C_T = \frac{\sigma a}{2} \left[\frac{\theta_{0,75}}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2 \right) - \frac{\theta_{кр}}{8} \mu^2 - \frac{1}{2} \lambda_{ппу} \right].$$

Это наиболее компактная формула, но особенно важен физический смысл коэффициента протекания через плоскость концов лопастей [$\lambda - \mu\theta_{1s} = \lambda_{пкЛ} - \mu(\beta_{1c} + \theta_{1s})$], так как угол атаки ПКЛ определяется непосредственно величиной сопротивления вертолета (включая несущий винт). Следовательно, для расчета силы тяги нужно знать угол $\beta_{1c} + \theta_{1s}$ наклона ПКЛ относительно ППУ.

Коэффициент продольной силы в ПКЛ определяется выражением

$$(C_H)_{пкЛ} = \frac{1}{4} \sigma c_{d0} \mu + \frac{\sigma a}{2} \left[\frac{1}{2} \mu \lambda_{пкЛ} \left(\theta_0 + \frac{1}{2} \theta_{кр} \right) - \frac{1}{6} \theta_{1c} \beta_0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \theta_{1s} \lambda_{пкЛ} + \frac{1}{4} \mu \beta_0^2 \right].$$

Коэффициент продольной силы в произвольной плоскости отсчета можно найти отсюда прибавлением члена, обусловленного наклоном вектора силы тяги, т. е. $C_H = (C_H)_{пкЛ} - \beta_{1c} C_T$. Аналогично коэффициент C_H относительно ППУ можно найти, отбрасывая члены с θ_{1c} и θ_{1s} из общей формулы, так что $C_H = (C_H)_{ппу} + \theta_{1s} C_T$. Коэффициент поперечной силы несущего винта в ПКЛ равен

$$(C_Y)_{пкЛ} = - \frac{\sigma a}{2} \left[\frac{3}{4} \mu \beta_0 \left(\theta_0 + \frac{2}{3} \theta_{кр} \right) + \frac{1}{4} \theta_{1c} \lambda_{пкЛ} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \theta_{1s} \beta_0 (1 + 3\mu^2) - \frac{3}{2} \mu \beta_0 \lambda_{пкЛ} \right],$$

откуда $C_Y = (C_Y)_{пкЛ} - \beta_{1s} C_T = (C_Y)_{ппу} - \theta_{1c} C_T$. Так как отношения $(C_H)_{пкЛ}/C_T$ и $(C_Y)_{пкЛ}/C_T$ обычно малы, вектор силы тяги при полете вперед отклоняется от нормали к ПКЛ на угол, не превышающий 1° (угол наклона пропорционален μ).

5.4. МОЩНОСТЬ, ПОТРЕБЛЯЕМАЯ ПРИ ПОЛЕТЕ ВПЕРЕД

В предыдущем разделе получено следующее выражение для коэффициента аэродинамического крутящего момента несущего винта:

$$\frac{C_Q}{\sigma a} = \int_0^1 r \frac{F_x}{ac} dr = \int_0^1 r \left[\frac{1}{2} (u_p u_T \theta - u_p^2) + \frac{c_d}{2a} u_T^2 \right] dr.$$

Аэродинамический момент можно найти, выполняя интегрирование по диску винта, как и при расчете сил. Вся мощность P , передаваемая несущему винту через вал, равна ΩQ , т. е. $C_p = = C_Q$. Другой способ, который дает более простой результат, состоит в рассмотрении баланса энергии на несущем винте. Кроме того, полученное вторым способом выражение имеет более общий характер, так как при его выводе нет нужды во многих предположениях, которые приходится делать при рассмотрении баланса сил.

Напишем снова выражения для силы тяги, продольной силы и аэродинамического крутящего момента через элементарные силы в сечениях:

$$C_T/(\sigma a) = \int_0^1 (F_z/ac) dr,$$

$$C_H/(\sigma a) = \int_0^1 [(F_x/ac) \sin \psi + (F_r/ac) \cos \psi] dr,$$

$$C_Q/(\sigma a) = \int_0^1 (F_x/ac) r dr$$

(как обычно, требуется еще осреднение по азимуту). Силы F_x , F_y , F_r можно выразить через коэффициенты подъемной силы и сопротивления сечений:

$$\begin{aligned} F_z/ac &= U^2 [(c_l/2a) \cos \varphi - (c_d/2a) \sin \varphi], \\ F_x/ac &= U^2 [(c_l/2a) \sin \varphi + (c_d/2a) \cos \varphi] = \\ &= (F_z/ac) \operatorname{tg} \varphi + U^2 c_d/(2a \cos \varphi) = u_p F_z/(a c u_T) + U^3 c_d/(2a u_T), \\ F_r/ac &= -\eta' \beta F_z/ac, \end{aligned}$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(u_p/u_T)$ и $U^2 = u_p^2 + u_T^2$. Предполагать углы малыми мы здесь не будем, но составляющей F_r , обусловленной радиальным сопротивлением, пренебрежем (см. разд. 5.12). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{C_H}{\sigma a} &= \int_0^1 \left(\frac{u_p}{u_T} \sin \psi - \eta' \beta \cos \psi \right) \frac{F_z}{ac} dr + \int_0^1 \frac{U^3}{u_T} \frac{c_d}{2a} \sin \psi dr = \\ &= C_{H1}/(\sigma a) + C_{H0}/(\sigma a), \end{aligned}$$

$$\frac{C_Q}{\sigma a} = \int_0^1 \frac{u_p}{u_T} \frac{F_z}{ac} r dr + \int_0^1 \frac{U^3}{u_T} \frac{c_d}{2a} r dr = C_{Q1}/(\sigma a) + C_{Q0}/(\sigma a).$$

В формуле для C_{H_1} сделано важное обобщение. Отклонение сечения лопасти от плоскости отсчета принято равным $z = \beta\eta(r)$, где η — произвольная функция, характеризующая форму оси лопасти. Если лопасть абсолютно жесткая, то $\eta = r$, но у винтов с относом ГШ и у бесшарнирных винтов необходимо учитывать изгиб лопастей. Для принятого отклонения величина нормальной составляющей скорости описывается выражением $u_p = \lambda + \eta\dot{\beta} + \eta'\beta\mu \cos \psi$, а радиальная сила $F_r = -\eta'\beta F_z$, откуда и следует формула для C_{H_1} . Рассмотрим теперь сумму

$$C_{Q_1} + \mu C_{H_1} = \sigma a \int_0^1 (ru_p/u_T + \mu u_p \sin \psi/u_T - \mu \eta' \beta \cos \psi) (F_z/ac) dr = \\ = \sigma a \int_0^1 (u_p - \eta' \beta \mu \cos \psi) (F_z/ac) dr = \sigma a \int_0^1 (\lambda + \eta\dot{\beta}) (F_z/ac) dr.$$

Второй член, как сейчас будет показано, равен нулю. Заметим, что $\eta\dot{\beta} = \dot{z}$ — это скорость отклонения сечения от плоскости отсчета, так что $\int_0^{2\pi} \eta\dot{\beta} F_z d\psi = \int_0^{2\pi} \dot{z} F_z d\psi = \oint F_z dz$ есть работа, совершаемая периодической силой F_z при перемещении сечения за время одного оборота винта. Однако полная энергия лопасти от оборота к обороту должна оставаться неизменной, так как на установившемся режиме работы винта движение лопасти будет периодическим. Следовательно, полная работа по перемещению лопасти в течение одного оборота должна быть равна нулю. К тому же выводу можно прийти, рассматривая маховое движение лопасти. Ниже в этой главе будет выведено следующее дифференциальное уравнение махового движения лопасти:

$$\ddot{\beta} + \nu^2 \beta = \gamma \int_0^1 \eta (F_z/ac) dr.$$

где ν — собственная частота ее колебаний. Осреднением по азимуту получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \eta \dot{\beta} \frac{F_z}{ac} dr \right) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\beta} \left(\int_0^1 \eta \frac{F_z}{ac} dr \right) d\psi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma} \dot{\beta} (\ddot{\beta} + \nu^2 \beta) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\gamma} \frac{d}{d\psi} (\dot{\beta}^2 + \nu^2 \beta^2) d\psi = 0,$$

так как энергия $\dot{\beta}^2 + \nu^2 \beta^2$ отклонения лопасти является периодической функцией азимута. Этот результат получен при произвольных форме и частоте колебаний лопасти, и потому он спра-

ведлив для любого винта. Тот же результат получается, когда отклонение лопасти представлено несколькими тонами. Таким образом,

$$C_{Q_i} + \mu C_{H_i} = \sigma a \int_0^1 \lambda \frac{F_z}{ac} dr = \int \lambda dC_T.$$

Следовательно, коэффициент мощности можно записать в виде

$$\begin{aligned} C_P = C_Q &= (C_{Q_i} + \mu C_{H_i}) - \mu C_H + (C_{Q_0} + \mu C_{H_0}) = \\ &= \int \lambda dC_T - \mu C_H + (C_{Q_0} + \mu C_{H_0}). \end{aligned}$$

Теперь можно было бы подставить сюда выражения для C_T и C_H , полученные в разд. 5.3. Но мы применим другой способ,

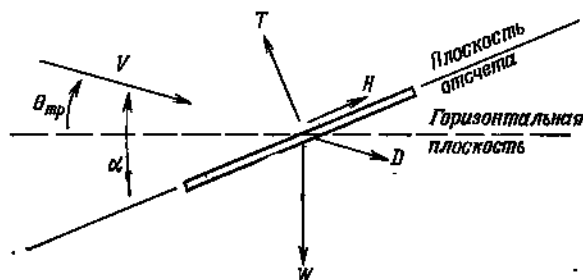


Рис. 5.13. Силы, действующие на вертолет в продольной плоскости.

в котором используется выражение для коэффициента протекания $\lambda = \mu \operatorname{tg} \alpha + \lambda_i$, и, следовательно, нужно знать угол атаки плоскости диска.

Рассмотрим условия равновесия сил, действующих на вертолет в установившемся полете (рис. 5.13). Направления силы тяги T и продольной силы H определены положением используемой плоскости отсчета. Соппротивление D вертолета направлено по скорости V набегающего потока. Кроме того, на вертолет действует сила тяжести W , направленная по вертикали. Вспомогательные пропульсивные или несущие устройства можно принять в расчет, вычитая создаваемые ими силы из D и W . Поскольку траектория полета наклонена к горизонтали на угол $\theta_{тр}$, вертолет набирает высоту со скоростью $V_c = V \sin \theta_{тр}$ ($\lambda_c = V_c / \Omega R$). При малых углах $W \approx T$, и условие равновесия сил принимает вид $D + H = T(\alpha - \theta_{тр})$ или $\alpha = \theta_{тр} + (D + H)/T$. Тогда коэффициент протекания можно вычислить по формуле

$$\lambda = \lambda_i + \mu \alpha = \lambda_i + \lambda_c + \mu \frac{D}{W} + \mu \frac{C_H}{C_T}.$$

Предположение о малости углов не обязательно, но оно упрощает анализ. Соотношения, справедливые при больших углах, выведены в разд. 5.18.

Подставляя выражение величины λ в формулу для коэффициента мощности, получим

$$\begin{aligned} C_P &= \int \lambda dC_T - \mu C_H + (C_{Q_0} + \mu C_{H_0}) = \\ &= \int \lambda_i dC_T + (C_{Q_0} + \mu C_{H_0}) + \mu (D/W) C_T + \lambda_c C_T = \\ &= C_{P_i} + C_{P_0} + C_{P_{вр}} + C_{P_e}. \end{aligned}$$

Здесь C_{P_i} — коэффициент индуктивной мощности, которая требуется для создания силы тяги; C_{P_0} — коэффициент профильной мощности, требуемой для вращения винта в вязком воздухе; $C_{P_{вр}}$ — коэффициент мощности, требуемой для преодоления сопротивления вертолета (вредного сопротивления); C_{P_e} — коэффициент мощности, расходуемой на увеличение потенциальной энергии вертолета. Это уравнение баланса энергии определяет мощность, необходимую для компенсации всех затрат энергии, и используется для расчета характеристик вертолета при полете вперед. Заметим, что уравнение баланса энергии не зависит от выбора плоскости отсчета.

Коэффициент индуктивной мощности C_{P_i} выражается интегралом $\int \lambda_i dC_T$, где $dC_T = \sigma a [F_d/(ac)] dr$ (требуется еще осреднение по азимуту). При равномерном распределении скорости протекания это соотношение принимает простой вид $C_{P_i} = \lambda_i C_T$. При полете вперед на режимах $\mu > 0,1$ хорошим приближением будет выражение $\lambda_i \approx k C_T / (2\mu)$, откуда $C_{P_i} \approx k C_T^2 / (2\mu)$. Эмпирический коэффициент k учитывает концевые потери, потери вследствие неравномерности протекания и др.

Коэффициент профильной мощности вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} C_{P_0} &= C_{Q_0} + \mu C_{H_0} = \int_0^1 (\sigma c_d / 2) [r U^3 / \mu_T + \mu (U^3 / \mu_T) \sin \psi] dr = \\ &= \int_0^1 (\sigma c_d / 2) U^3 dr, \end{aligned}$$

где $U^2 = u_T^2 + u_p^2$. Эту формулу можно записать в виде $C_{P_0} = \int_0^1 (\sigma/c) DU dr$, где DU — мощность, затрачиваемая сечением лопасти. Считая длину хорды постоянной, коэффициент сечения

также постоянным и равным некоторому среднему значению, а скорость протекания малой (так что $U^3 \approx u_T^3$), получим

$$C_{P_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{2} \int_0^1 u_T^3 dr = \frac{\sigma c_{d_0}}{2} \int_0^1 \left(r^3 + \frac{3}{2} \mu^2 r \right) dr = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} (1 + 3\mu^2).$$

Эту формулу можно было бы также получить из выражений $C_{Q_0} = (\sigma c_{d_0}/8)(1 + \mu^2)$ и $C_{H_0} = (\sigma c_{d_0}/4)\mu$, выведенных в разд. 5.3. Таким образом, две трети прироста коэффициента профильной мощности с увеличением скорости обусловлены составляющей C_{H_0} . Если учесть влияние радиального сопротивления и зоны обратного обтекания, то C_{P_0} будет возрастать со скоростью быстрее. В разд. 5.12 показано, что приемлемой аппроксимацией служит формула

$$C_{P_0} = (\sigma c_{d_0}/8)(1 + 4,6\mu^2).$$

На преодоление вредного сопротивления затрачивается мощность, коэффициент которой $C_{P_{вп}}$ равен $\mu(D/W)C_T = VD/[\rho A(\Omega R)^3]$. Если сопротивление вертолета выразить через площадь f эквивалентного сопротивления, т. е. положить $D = (1/2)\rho V^2 f$, то

$$C_{P_{вп}} = (1/2)[V^3 f / (\Omega R)^3 A] \approx (1/2)\mu^3 (f/A).$$

Объединяя результаты, получаем следующую формулу для расчета мощности, затрачиваемой при полете вперед:

$$C_P = C_{P_t} + C_{P_0} + C_{P_{вп}} + C_{P_c} \approx \\ \approx kC_T^2/(2\mu) + (\sigma c_{d_0}/8)(1 + 4,6\mu^2) + f\mu^3/(2A) + \lambda_c C_T.$$

Эта формула определяет требуемую мощность как функцию полетной массы или скорости. Расчет характеристик можно уточнить, если учесть неравномерность распределения индуктивных скоростей, ввести в расчет действительные значения коэффициентов сопротивления сечений (для чего нужно знать распределение углов атаки по диску винта) и более детально определить сопротивление вертолета. В ранних работах по теории вертолета применение метода баланса сил для расчета летных характеристик было, по существу, основано на соотношении $C_P = \lambda C_T - \mu C_{H_t} + C_{Q_0}$ и выражениях для C_T и C_{H_t} , приведенных в разд. 5.3. В расчетах C_{Q_0} часто учитывалось распределение углов атаки сечений по диску. При определении летных характеристик вертолета численными методами применяют, как правило, метод баланса сил, находя мощность по величине коэффициента аэродинамического момента, т. е. по формуле $C_P =$

$$= \int_0^1 \sigma a [F_x/(ac)] r dr.$$

5.5. МАХОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЛОПАСТИ

Чтобы определить аэродинамические характеристики несущего винта при полете вперед полностью, нужно знать маховое движение лопасти, особенно первые гармоники угла взмаха (угол конусности β_0 и углы β_{1c} , β_{1s} наклона плоскости концов лопастей). В этом разделе будут выведены формулы, описывающие наклон ПКЛ относительно ППУ. Если известна ориентация ПКЛ (определяемая условием равновесия сил, действующих на вертолет), то можно найти ориентацию ППУ, а значит,

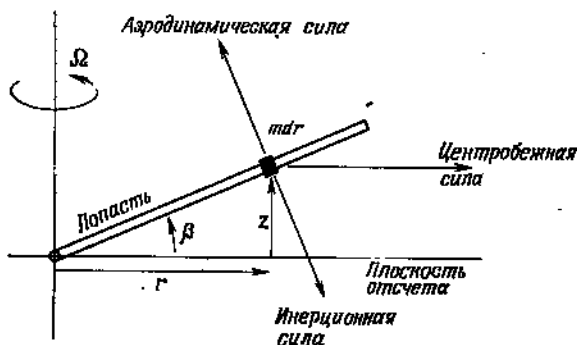


Рис. 5.14. Силы, создающие моменты относительно оси ГШ.

и параметры циклического управления, необходимого для поддержания заданного режима полета вертолета. Маховое движение лопасти определяется условием равновесия моментов аэродинамических и инерционных сил относительно оси ГШ. В качестве введения в исследование махового движения рассмотрим простейшую схему: колебание абсолютно жесткой лопасти, когда отброса ГШ нет и движение лопасти не ограничено пружиной в шарнире.

Рассмотрим равновесие моментов инерционных и аэродинамической сил относительно оси ГШ (рис. 5.14). Если лопасть абсолютно жесткая и отброса ГШ нет, то отклонение сечения от плоскости отсчета равно $z = \beta r$. На элементарную массу $m dr$ (m — погонная масса лопасти) сечения, находящегося на радиусе r , действуют следующие силы: 1) инерционная сила $m\ddot{z} dr = m\ddot{\beta} r dr$, направленная противоположно скорости махового движения и имеющая относительно оси ГШ плечо r ; 2) центробежная сила $m\Omega^2 r dr$, направленная по радиусу от оси вращения и имеющая плечо $z = r\beta$; 3) аэродинамическая сила $F_z dr$, нормальная к лопасти и имеющая плечо r . Напомним, что вследствие малости углов сила F_z не отличается от подъемной силы L сечения. Так как центробежная сила всегда направлена по радиусу от оси вращения (т. е. лежит в пло-

скости, нормальной к оси вращения), она действует как пружина, препятствующая маховому движению.

Моменты относительно оси ГШ определяются интегралами от произведений элементарных сил, действующих в сечении, на соответствующие плечи. Так как ГШ не имеют пружин, сумма моментов должна быть равна нулю. В результате получается следующее уравнение махового движения:

$$\int_0^R mr\ddot{\beta}r dr + \int_0^R m\Omega^2r(r\beta)dr - \int_0^R F_zr dr = 0,$$

или

$$(\ddot{\beta} + \Omega^2\beta) \int_0^R mr^2 dr = \int_0^R F_zr dr.$$

Введем теперь момент инерции лопасти относительно оси ГШ по формуле $I_x = \int_0^R mr^2 dr$ и перейдем к безразмерным величинам, масштабами которых служат ρ , Ω и R . Тогда уравнение махового движения примет вид

$$\ddot{\beta} + \beta = \frac{1}{I_x} \int_0^1 F_zr dr.$$

Безразмерным временем является азимут лопасти $\psi = \Omega t$. Далее, определим массовую характеристику лопасти γ равенством $\gamma = \rho acR^4/I_x$. Величина γ есть безразмерный параметр, характеризующий отношение аэродинамических сил к инерционным. Типичные значения γ для шарнирных винтов составляют $8 \div 10$, а для бесшарнирных винтов — $5 \div 7$. Заметим, что плотность воздуха входит в уравнение махового движения только через параметр γ . Если хорда лопасти постоянна, то после введения этого параметра уравнение махового движения станет следующим:

$$\ddot{\beta} + \beta = \gamma \int_0^1 \frac{F_z}{ac} r dr = \gamma M_{ГШ}.$$

Левая часть этого уравнения совпадает с левой частью уравнения колебаний точечной массы, подвешенной на пружине, причем роль пружины играет центробежная сила, а собственная частота колебаний равна 1 (Ω в размерной форме). Правая часть представляет собой вынуждающий момент аэродинамических сил. Отсюда следует, что первые гармоники аэродинамических сил действуют в резонансе с собственными колебаниями лопасти. Амплитуда вынужденных колебаний системы при резонансе определяется только величиной демпфирования. В данном случае демпфирование создают сами аэродинамические силы.

Вынужденные колебания при резонансе отстают по фазе от вынуждающей силы точно на 90° независимо от величины демпфирования.

Относительная аэродинамическая сила, нормальная к лопасти, определяется соотношениями $F_z/(ac) = L/(ac) = u^2 \alpha / 2 = = (1/2)(u_T^2 \theta - u_p \mu_T)$. Момент этой силы относительно оси ГШ равен

$$M_{ГШ} = \int_0^1 [F_z/(ac)] r dr = \\ = \int_0^1 (r/2) [(r + \mu \sin \psi)^2 \theta - (\lambda + r\dot{\beta} + \mu\dot{\beta} \cos \psi)(r + \mu \sin \psi)] dr.$$

Если считать распределение скоростей протекания равномерным, а крутку лопасти линейной, то интегрирование по радиусу можно выполнить аналитически, в результате получим:

$$M_{ГШ} = M_\theta \theta_{упр} + M_{кр} \theta_{кр} + M_\lambda \lambda + M_{\dot{\beta}} \dot{\beta} + M_\beta \beta = \\ = \theta_{упр} (1/8 + \mu \sin \psi / 3 + \mu^2 \sin^2 \psi / 4) + \\ + \theta_{кр} (1/10 + \mu \sin \psi / 4 + \mu^2 \sin^2 \psi / 6) - \lambda (1/6 + \mu \sin \psi / 4) - \\ - \dot{\beta} (1/8 + \mu \sin \psi / 6) - \beta \mu (1/6 + \mu \sin \psi / 4) \cos \psi,$$

где $\theta_{упр} = \theta_0 + \theta_{1c} \cos \psi + \theta_{1s} \sin \psi$ — сумма общего и циклического шагов, определяемая управлением. Таким образом, уравнение махового движения принимает вид

$$\ddot{\beta} + \beta = \gamma (M_\theta \theta_{упр} + M_{кр} \theta_{кр} + M_\lambda \lambda + M_{\dot{\beta}} \dot{\beta} + M_\beta \beta).$$

Аэродинамические коэффициенты — это моменты относительно оси ГШ, которые обусловлены изменением угла атаки, создаваемым углом установки, круткой, скоростью протекания, скоростью взмаха и самим углом взмаха. Скорость взмаха вызывает такое изменение угла атаки, что соответствующее изменение подъемной силы противодействует маховому движению, т. е. аэродинамические силы вызывают демпфирование махового движения, определяемое коэффициентом M_β .

Нужно найти установившееся решение уравнения махового движения, точнее говоря, гармоники периодического угла взмаха. Здесь мы имеем в виду только нулевую и первую гармоники: если высшие гармоники управления (с частотой 2 и более) отсутствуют, то высшие гармоники угла взмаха малы. Решение может быть найдено применением к уравнению махового движения операторов

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\psi, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \cos \psi d\psi \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \sin \psi d\psi.$$

В результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье функции $\beta(\psi)$, причем коэффициенты этой системы содержат и коэффициенты Фурье функции $\theta(\psi)$. (О другом методе решения уравнения махового движения — методе подстановки — сказано в разд. 5.1.) По существу операторным методом определяются нулевые и первые гармоники моментов относительно оси ГШ, причем последним соответствуют моменты тангажа и крена несущего винта (см. разд. 5.3). Применяя указанные операторы к моментам инерционных и центробежных сил, получим

$$(1/2\pi) \int_0^{2\pi} (\ddot{\beta} + \beta) d\psi = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \beta d\psi = \beta_0,$$

$$(1/\pi) \int_0^{2\pi} (\ddot{\beta} + \beta) \cos \psi d\psi = (1/\pi) \int_0^{2\pi} (-\beta \cos \psi + \beta \cos \psi) d\psi = 0$$

(здесь член $\ddot{\beta} \cos \psi$ дважды интегрируется по частям) и аналогично

$$(1/\pi) \int_0^{2\pi} (\ddot{\beta} + \beta) \sin \psi d\psi = (1/\pi) \int_0^{2\pi} (-\beta \sin \psi + \beta \sin \psi) d\psi = 0.$$

Центробежные силы дают среднюю величину момента относительно оси ГШ, определяющую угол конусности β_0 . Сумма первых гармоник моментов инерционных и центробежных сил точно равна нулю. Следовательно, первые гармоники момента аэродинамических сил также должны быть равны нулю. Из условия равенства нулю моментов тангажа и крена, создаваемых аэродинамическими силами, получаются два уравнения, которые позволяют определить углы β_{1c} и β_{1s} наклона ПКЛ. Точная взаимная компенсация инерционного члена и члена, пропорционального углу взмаха, обусловлена тем, что первые гармоники аэродинамических сил действуют в резонансе с собственными колебаниями лопасти. Если бы эти гармоники отсутствовали, то управлять несущим винтом было бы нельзя, так как ПКЛ находилась бы в равновесии при любой ориентации.

Применяя указанные операторы к правой части уравнения махового движения, учитывая выражения для аэродинамических коэффициентов и пренебрегая высшими гармониками, получим следующие уравнения:

$$\gamma [\theta_0 (1 + \mu^2)/8 + \theta_{кр} (1 + 5\mu^2/6)/10 + \mu\theta_{1s}/6 - \lambda/6] = \beta_0,$$

$$\theta_{1c} (1 + \mu^2/2)/8 - \beta_{1s}/8 - \mu\beta_0/6 - \mu^2\beta_{1s}/16 = 0,$$

$$\theta_{1s} (1 + 3\mu^2/2)/8 + \mu\theta_0/3 + \mu\theta_{кр}/4 - \mu\lambda/4 + \beta_{1c}/8 - \mu^2\beta_{1c}/16 = 0.$$

С помощью равенства $\lambda - \mu\theta_{1s} = \lambda_{\text{ППУ}}$ решение этой системы можно записать в виде

$$\beta_0 = \gamma \left[\frac{1}{8} \theta_{0,8} (1 + \mu^2) - \frac{1}{60} \mu^2 \theta_{\text{кр}} - \frac{1}{6} \lambda_{\text{ППУ}} \right],$$

$$\beta_{1s} - \theta_{1c} = - \frac{(4/3) \mu \beta_0}{1 + \mu^2/2},$$

$$\beta_{1c} + \theta_{1s} = - \frac{8}{3} \mu \frac{\theta_{0,76} - (3/4) \lambda_{\text{ППУ}}}{1 - \mu^2/2},$$

где $\theta_{0,8}$ — значение θ на радиусе $r = 0,8R$. С другой стороны, используя соотношение $\lambda_{\text{ПКЛ}} = \lambda_{\text{ППУ}} + \mu(\beta_{1c} + \theta_{1s})$, решению можно придать также вид

$$\beta_0 = \gamma \left[\frac{1}{8} \theta_{0,8} (1 + \mu^2) - \frac{1}{60} \mu^2 \theta_{\text{кр}} - \frac{1}{6} \lambda_{\text{ПКЛ}} + \frac{1}{6} \mu (\beta_{1c} + \theta_{1s}) \right],$$

$$\beta_{1s} - \theta_{1c} = - \frac{4}{3} \mu \frac{\beta_0}{1 + \mu^2/2},$$

$$\beta_{1c} + \theta_{1s} = - \frac{8}{3} \mu \frac{\theta_{0,75} - (3/4) \lambda_{\text{ПКЛ}}}{1 + 3\mu^2/2}.$$

Выразить β_0 через $\lambda_{\text{ППУ}}$ проще, но через $\lambda_{\text{ПКЛ}}$ более удобно, так как ориентация ПКЛ имеет непосредственный физический смысл (по существу она показывает направление вектора силы тяги, определяемое условием равновесия сил, действующих на вертолет в продольной плоскости). Заметим, что при переходе к ПКЛ исчезает также особенность при $\mu = \sqrt{2}$, которая присуща выражению величины $\beta_{1c} + \theta_{1s}$ через $\lambda_{\text{ППУ}}$. (Значение $\mu = \sqrt{2}$ в любом случае находится за пределами применимости этих формул, а учет влияния зоны обратного обтекания устраняет особенность и в выражении $\beta_{1c} + \theta_{1s}$ через $\lambda_{\text{ППУ}}$.) Угол конусности определяется выражением $\beta_0 \approx (3/4) \gamma C_T / \sigma a$, т. е. он приближенно пропорционален нагрузке лопасти. Углы β_{1c} и β_{1s} пропорциональны характеристике режима работы винта μ и C_T / σ . Типичные значения β_0 и β_{1c} составляют несколько градусов, а угол β_{1s} немного меньше первых двух.

Решение уравнения махового движения для режима висения сводится к равенствам $\beta_0 = \gamma(\theta_{0,8}/8 - \lambda/6)$, $\beta_{1c} + \theta_{1s} = \beta_{1s} - \theta_{1c} = 0$. Вспомним, что $\beta_{1c} + \theta_{1s}$ и $\beta_{1s} - \theta_{1c}$ — это углы наклона ПКЛ относительно ППУ. Следовательно, решение уравнения махового движения показывает, что на висении ПКЛ и ППУ всегда параллельны. Маховое движение на режиме висения можно найти так. Если $\mu = 0$, то аэродинамические коэффициенты постоянны, а $M_\beta = 0$. Когда первые гармоники моментов относительно оси ГШ, обусловленные инерционными силами, скоростью протекания или круткой, равны нулю, уравнение махового движения сводится к равенству $M_\theta \dot{\theta} + M_\beta \dot{\beta} = 0$, из кото-

рого, в частности, получаем $M_\theta \theta_{1c} + M_\beta \beta_{1s} = 0$ и $M_\theta \theta_{1s} - M_\beta \beta_{1c} = 0$. В результате имеем решение $\beta_{1s}/\theta_{1c} = -\beta_{1c}/\theta_{1s} = -M_\theta/M_\beta$. Как и следовало ожидать, сдвиг по фазе между циклическим управлением и маховым движением точно равен 90° , а амплитуду угла взмаха определяет величина отношения управляющего момента к демпфирующему. В рассматриваемом случае $M_\theta = -M_\beta = 1/8$, т. е. $(-M_\theta)/M_\beta = 1$, и ПКЛ всегда параллельна ППУ. При полете вперед относительное положение ПКЛ и ППУ однозначно определяется режимом работы винта, так как углы $\beta_{1c} + \theta_{1s}$ и $\beta_{1s} - \theta_{1c}$ зависят только от скорости полета и нагрузки винта. Когда летчик, действуя управлением, наклоняет ППУ, наклоняется и ПКЛ, а вместе с ней вектор силы тяги. Используя циклическое управление (наклон тарелки автомата перекося) для отклонения вектора силы тяги, летчик может создавать моменты относительно центра масс вертолета и благодаря этому управлять положением вертолета.

Продолжим исследование роли инерционных и аэродинамических сил в маховом движении лопасти. Если аэродинамические силы отсутствуют, нет отбоя ГШ и каких-либо стеснений движению лопасти, то уравнение махового движения имеет вид $\ddot{\beta} + \beta = 0$. Решением этого уравнения является функция $\beta = \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi$, где β_{1c} и β_{1s} — произвольные постоянные. Таким образом, в этом случае ориентация несущего винта произвольна, но постоянна, так как в отсутствие аэродинамических сил или при нулевом отбоя ГШ нельзя создать момент на втулке посредством изменения углов установки лопастей или наклона вала винта. Несущий винт ведет себя как гироскоп, который в отсутствие внешних моментов сохраняет свою ориентацию относительно инерциальной системы отсчета. Когда винт вращается в воздухе, угол установки создает аэродинамический момент M_θ относительно оси ГШ, который можно использовать для отклонения оси винта, т. е. для управления его ориентацией. Если бы M_θ был единственным моментом, то циклическое управление вызывало бы отклонение оси винта с постоянной скоростью. Однако возникает также аэродинамический момент демпфирования M_β . Наклон ПКЛ на угол β_{1c} или β_{1s} создает скорость взмаха (во вращающейся системе координат). Следовательно, момент, порождаемый наклоном плоскости управления, вызывает процессию несущего винта, наклоняя ПКЛ до тех пор, пока маховое движение не создаст момент, обусловленный моментами M_β и как раз достаточный, чтобы уравновесить управляющий момент. Вследствие равновесия моментов, обусловленных углом θ и скоростью $\dot{\beta}$, несущий винт займет новое устойчивое положение. Таким образом, маховое движение лопастей можно рассматривать с двух точек зрения. Во-первых, лопасть можно считать колебательной системой, собственная

частота которой равна 1, так что аэродинамический момент, создаваемый циклическим шагом, действует в резонансе с собственными колебаниями системы. Вынужденные колебания такой системы отстают по фазе от колебаний вынуждающего момента точно на 90° (т. е. на одну четверть цикла колебаний, что при частоте 1 означает отставание на 90° и по азимуту), а амплитуда определяется величиной демпфирования. Во-вторых, несущий винт можно рассматривать как гироскоп, установленный (при нулевом отnose ГШ) на кардане. Тогда управляющий момент, обусловленный циклическим шагом, вызывает прецессию винта с присущим гироскопу запаздыванием по фазе на 90° . Прецессия продолжается до тех пор, пока создаваемый маховым движением демпфирующий момент не остановит ее.

Угол конусности несущего винта пропорционален массовой характеристике лопасти γ , так как этот угол определяется равновесием моментов аэродинамических и центробежных сил относительно оси ГШ. Угол конусности, по существу, пропорционален коэффициенту силы тяги; некоторое различие между ними обусловлено наличием в подынтегральном выражении момента относительно оси ГШ добавочного множителя r (по сравнению с выражением для полной подъемной силы лопасти). Так как сила тяги винта создает моменты относительно осей ГШ, угол конусности увеличивается до тех пор, пока возрастающий момент центробежных сил не уравнивает аэродинамический момент.

Угол $\beta_{1c} + \theta_{1c}$ отрицателен, поэтому при полете вперед ПКЛ отклонена назад относительно ППУ. Асимметрия распределения скоростей u_T относительно продольного диаметра диска при полете вперед означает, что при постоянном угле установки (т. е. в случае, когда плоскостью отсчета служит ППУ) подъемная сила наступающей лопасти больше, чем у отступающей. В результате сумма моментов относительно осей ГШ будет кренить винт вбок. Во вращающейся системе координат, где этот суммарный момент изменяется с резонансной частотой 1, вынужденные колебания лопасти запаздывают по фазе на 90° , т. е. угол взмаха максимален в передней точке диска. Следовательно, поперечный момент вызывает продольный (назад) наклон ПКЛ. Однако углу наклона β_{1c} соответствует скорость взмаха $\dot{\beta} = -\beta_{1c} \sin \psi$, которая имеет максимальные абсолютные значения на концах поперечного диаметра диска. Она порождает момент относительно оси ГШ, демпфирующий маховое движение. Вследствие этого демпфирования наклон ПКЛ создает поперечный момент на диске винта. Конус лопастей будет отклоняться назад до тех пор, пока этот поперечный момент, вызываемый демпфированием, не станет столь большим, что уравнивает поперечный момент, обусловленный аэродинамической асиммет-

рией. При достижении равновесия аэродинамических моментов винт займет новое устойчивое положение.

Так как угол $\beta_{1s} - \theta_{1c}$ отрицателен, ПКЛ при полете вперед отклонена относительно ППУ в сторону наступающей лопасти. Когда винт имеет угол конусности β_0 , величина нормальной к поверхности лопасти составляющей скорости набегающего потока равна $\beta_{0n} \cos \psi$ (см. рис. 5.12). Эта составляющая в максимальной степени увеличивает угол атаки сечения в передней точке диска и аналогичным образом уменьшает его в задней точке диска; следовательно, она создает продольный аэродинамический момент на винте. Во вращающейся системе координат этот переменный момент с частотой 1 вызывает вынужденные колебания лопасти с запаздыванием по фазе на 90° , т. е. поперечный (вправо) наклон ПКЛ. Но углу наклона β_{1s} соответствует скорость взмаха $\dot{\beta} = \beta_{1s} \cos \psi$, которая порождает демпфирующий момент относительно оси ГШ, а посредством его — продольный момент на винте. Конус лопастей отклоняется вправо до тех пор, пока продольный момент, вызываемый углом конусности, не уравнивается продольным моментом, обусловленным демпфированием. При ориентации ПКЛ, соответствующей равновесию, положение несущего винта будет устойчивым.

Углы наклона ПКЛ приблизительно пропорциональны характеристике режима работы винта μ . Чтобы сохранять неизменным направление вектора силы тяги с увеличением скорости полета, необходимо наклонять ППУ вперед и вбок, в сторону отступающей лопасти, компенсируя возрастающий наклон ПКЛ. Таким образом, при увеличении скорости полета нужно смещать ручку управления вперед дополнительно к требуемому для увеличения пропульсивной силы. Кроме того, следует увеличить смещение ручки влево.

Управляющие воздействия, необходимые для балансировки вертолета, определяются условиями равновесия сил и моментов, действующих на него. Как показано в разд. 5.4, равновесие сил в продольной плоскости определяет наклон ПКЛ относительно горизонтальной плоскости (угол $\alpha_{ПКЛ}$, а также $\lambda_{ПКЛ}$). Равновесие моментов тангажа, действующих на вертолет, определяет угол наклона плоскости вращения по отношению к горизонтальной плоскости (угол $\alpha_{ПВ}$) как функцию продольного положения центра масс вертолета и аэродинамических сил, действующих на аппарат (см. разд. 5.18). По этим углам можно найти угол взмаха относительно плоскости вращения в продольной плоскости: $(\beta_{1c})_{ПВ} = \alpha_{ПКЛ} - \alpha_{ПВ}$. Условие равновесия моментов относительно оси ГШ определяет углы наклона ПКЛ относительно ППУ, а по ним можно рассчитать угол $(\theta_{1s})_{ПВ}$. Аналогично условия равновесия вертолета в поперечной плоскости определяют угол взмаха $(\beta_{1s})_{ПВ}$ в поперечной плоскости,

а значит, и угол $(\theta_{1c})_{пв}$. Полученные выше формулы махового движения нельзя непосредственно использовать для расчета циклического шага, требуемого в связи с наклоном ПКЛ. Необходимо еще совместно решить уравнения для C_T и β_{1c} относительно $\theta_{0,75}$ и θ_{1s} . После этого можно рассчитать угол конусности β_0 , а по нему найти угол θ_{1c} . В результате получим следующие формулы:

$$\theta_{0,75} = \frac{(1 + \frac{3}{2}\mu^2)(6C_T/\sigma a + \frac{3}{8}\mu^2\theta_{кр}) + \frac{3}{2}\lambda_{ПКЛ}(1 - \frac{1}{2}\mu^2)}{1 - \mu^2 + \frac{9}{4}\mu^4},$$

$$\theta_{1s} = -\beta_{1c} - \frac{\frac{3}{8}\mu(6C_T/\sigma a + \frac{3}{8}\mu^2\theta_{кр}) + 2\mu\lambda_{ПКЛ}(1 - \frac{3}{2}\mu^2)}{1 - \mu^2 + \frac{9}{4}\mu^4},$$

$$\beta_0 = \frac{\gamma/8}{1 - \mu^2 + \frac{9}{4}\mu^4} [(1 - \frac{19}{18}\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^4)6C_T/\sigma a + \frac{1}{20} + \frac{29}{120}\mu^2 -$$

$$- \frac{1}{5}\mu^4 + \frac{3}{8}\mu^6)\theta_{кр} + (\frac{1}{6} - \frac{7}{12}\mu^2 + \frac{1}{4}\mu^4)\lambda_{ПКЛ}] / (1 - \mu^2 + \frac{9}{4}\mu^4),$$

$$\theta_{1c} = \beta_{1s} + \frac{1}{3}\mu\beta_0 / (1 + \frac{1}{2}\mu^2).$$

5.6. ПРИМЕРЫ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИНТА И МАХОВОГО ДВИЖЕНИЯ ЛОПАСТИ

В качестве примера рассмотрим шарнирный несущий винт с коэффициентом заполнения $\sigma = 0,1$, массовой характеристикой $\gamma = 8$, градиентом линейной крутки $\theta_{кр} = -8^\circ$ и градиентом подъемной силы сечений $a = 5,7$. Пусть винт работает при нагрузке на лопасть $C_T/\sigma = 0,12$, а сопротивление вертолета определяется относительной площадью эквивалентного сопротивления $f/A = 0,015$. Указанные величины параметров весьма характерны, за исключением величины нагрузки на лопасть. Последняя значительно больше тех величин, при которых обычно работают лопасти несущих винтов при полете вперед. Такая нагрузка на лопасть взята с целью продемонстрировать распределение углов атаки сечений по диску вблизи срыва. Наблюдаемые закономерности аналогичны тем, которые присущи винту с типичной нагрузкой на лопасть (например, $C_T/\sigma = 0,08$). Рассмотрены также примеры, в которых $C_T/\sigma = 0,04$, $f/A = 0$ или $\theta_{кр} = 0$ (каждый раз изменялся только один параметр). По формулам, выведенным в предыдущих разделах, рассчитаны нагрузки несущего винта и маховое движение лопастей. Все результаты получены при равномерном распределении скоростей протекания (неравномерные распределения рассмотрены в разд. 13.2).

На рис. 5.15 приведены графики коэффициента протекания через ПКЛ в зависимости от μ , построенные по формуле

$$\lambda_{ПКЛ} = \frac{C_T}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}} + \frac{1}{2}\mu^3 \frac{f/A}{C_T}.$$

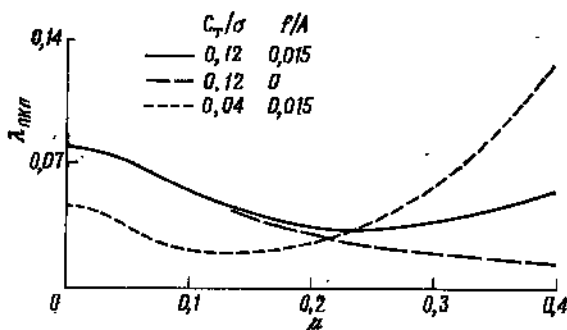


Рис. 5.15. Изменение коэффициента протекания через ПКЛ в зависимости от скорости полета.

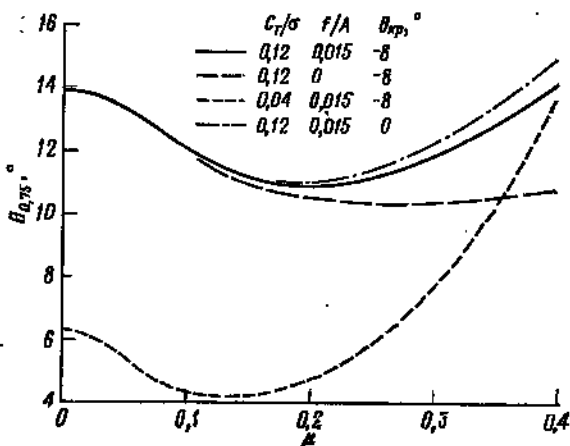


Рис. 5.16. Изменение общего шага в зависимости от скорости полета. Распределение индуктивных скоростей равномерное.

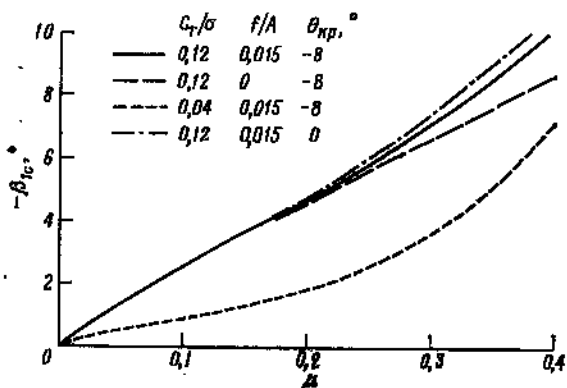


Рис. 5.17. Изменение продольного наклона конуса лопастей в зависимости от скорости полета. Распределение индуктивных скоростей равномерное.

При малых скоростях полета величина $\lambda_{\text{пкл}}$ определяется индуктивной скоростью, а при больших скоростях полета — пропульсивной силой, требуемой для преодоления вредного сопротивления вертолета. На рис. 5.16 показано требуемое изменение

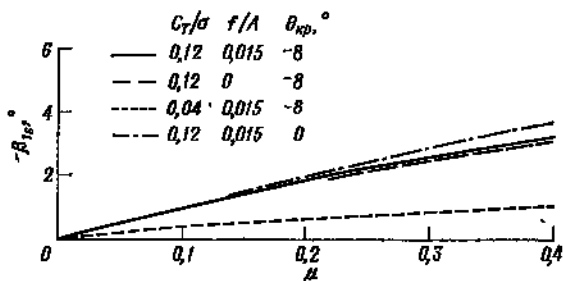


Рис. 5.18. Изменение поперечного наклона конуса лопастей в зависимости от скорости полета.

Распределение индуктивных скоростей равномерное.

общего шага в зависимости от скорости. Это изменение обусловлено в основном изменением коэффициента протекания. Следовательно, положение рычага общего шага по существу отвечает кривой потребной мощности. На рис. 5.17 и 5.18 представлены

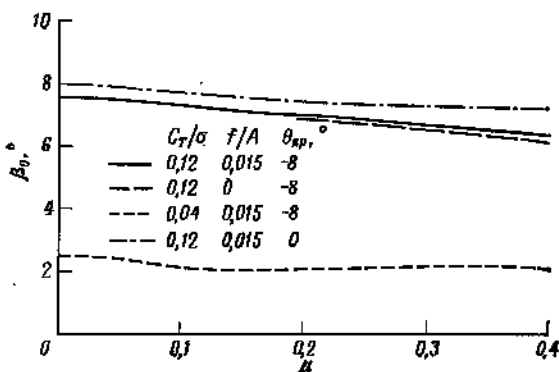


Рис. 5.19. Изменение угла конусности в зависимости от скорости полета.

Распределение индуктивных скоростей равномерное.

графики коэффициентов махового движения относительно ППУ. Эти коэффициенты практически линейно зависят от μ (без учета неравномерности скоростей протекания) и нагрузки на лопасть; влияние других параметров второстепенно. На угол $\beta_{1с}$ влияет, как видим, увеличение индуктивной скорости при больших скоростях полета. На рис. 5.19 приведены графики угла конусности, который зависит главным образом от силы тяги несущего винта.

На рис. 5.20 показано распределение углов атаки сечений по диску винта, рассчитанное по формуле

$$\alpha = \theta - u_p/u_T = \theta_0 + \theta_{кр}r + (\beta_{lc} + \theta_{ls}) \sin \psi - (\beta_{ls} - \theta_{le}) \sin \psi - \frac{\lambda_{ПКЛ} + \mu\beta_0 \cos \psi}{r + \mu \sin \psi}$$

Скорость полета вперед вызывает уменьшение углов атаки на наступающей лопасти и увеличение их на отступающей лопасти, так как вследствие махового движения подъемная сила лопасти одинакова на обеих сторонах диска, несмотря на асимметрию

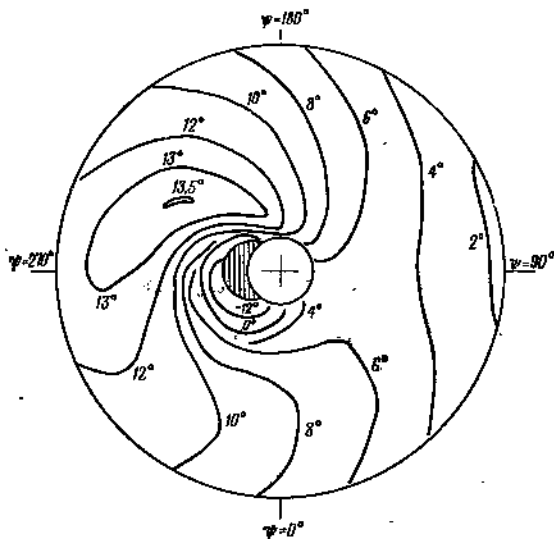


Рис. 5.20. Распределение углов атаки по диску при $\mu = 0,25$, $C_T/\sigma = 0,12$, $f/A = 0,015$ и $\theta_{кр} = -8^\circ$.

Распределение индуктивных скоростей равномерное.

условий обтекания (точнее говоря, вследствие махового движения равны нулю первые гармоники момента относительно оси ГШ). При полете вперед зонами рабочих углов атаки являются передняя и задняя части диска. Для указанной большой нагрузки лопасти ($C_T/\sigma = 0,12$) углы атаки на стороне отступающей лопасти достигают критического значения. Распределение углов атаки зависит главным образом от параметров режима полета (μ , C_T/σ , f/A) и от крутки лопастей. На рис. 5.21 и 5.22 показаны распределения углов атаки для случаев нулевой крутки и нулевого сопротивления (пропульсивной силы) соответственно. Видно, что уменьшение крутки увеличивает максимальный угол атаки сечений и смещает область срыва к концу лопасти. Однако следует иметь в виду, что эти результаты получены для равномерного распределения скоростей протекания.

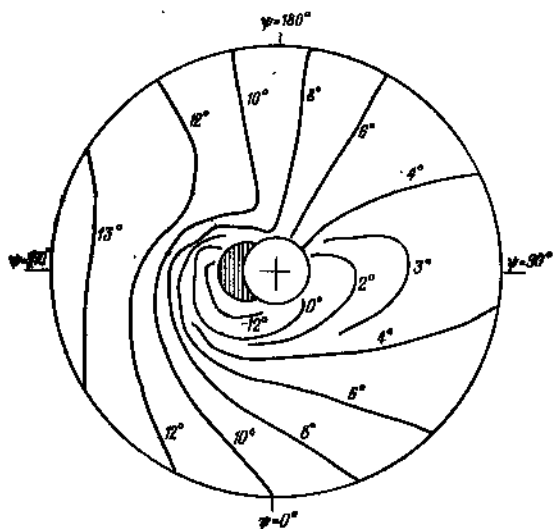


Рис. 5.21. Распределение углов атаки по диску при $\mu = 0,25$, $C_T/\sigma = 0,12$, $j/A = 0,015$ и $\theta_{кр} = 0^\circ$.
 Распределение индуктивных скоростей равномерное.

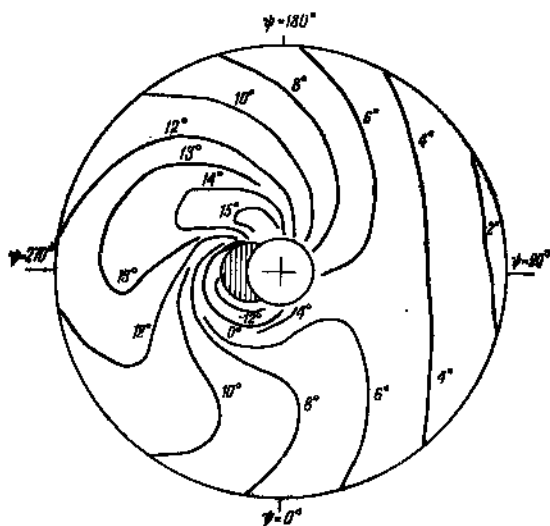


Рис. 5.22. Распределение углов атаки по диску при $\mu = 0,25$, $C_T/\sigma = 0,12$, $j/A = 0$ и $\theta_{кр} = -8^\circ$.
 Распределение индуктивных скоростей равномерное.

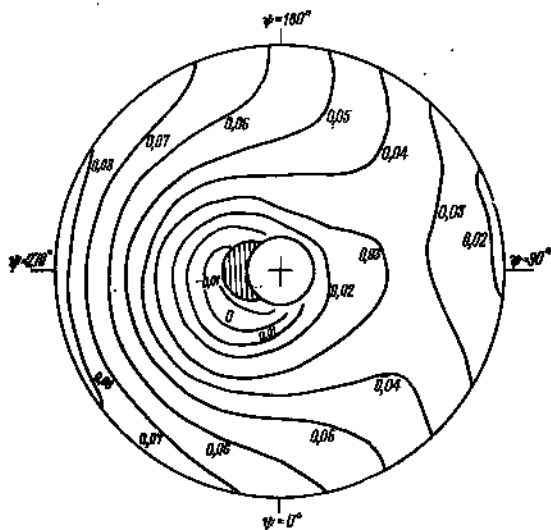


Рис. 5.23. Распределение относительной циркуляции $\Gamma/(ac\Omega R)$ присоединенного вихря лопасти по диску при $\mu = 0,25$, $C_T/\sigma = 0,12$, $f/A = 0,015$ и $\theta_{кр} = -8^\circ$.

Распределение индуктивных скоростей равномерное.

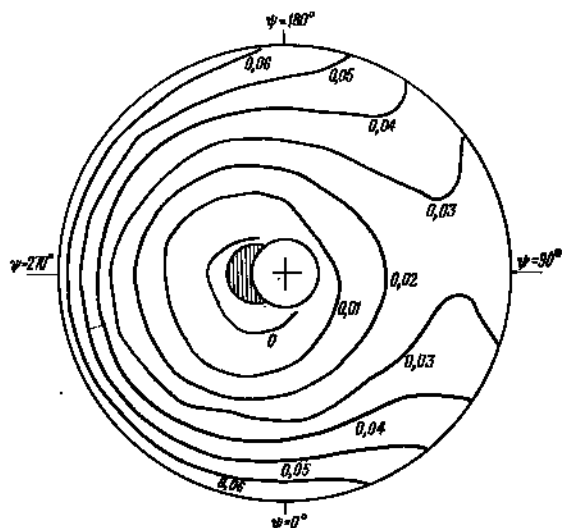


Рис. 5.24. Распределение относительной подъемной силы $L/[\rho ac(\Omega R)^2]$ сечения лопасти по диску при $\mu = 0,25$, $C_T/\sigma = 0,12$, $f/A = 0,015$ и $\theta_{кр} = -8^\circ$. Распределение индуктивных скоростей равномерное.

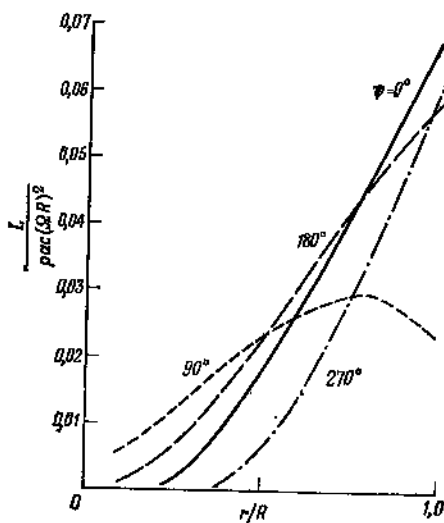


Рис. 5.25. Распределение относительной подъемной силы сечения лопасти по радиусу при $\mu = 0,25$, $C_T/\sigma = 0,12$, $f/A = 0,015$ и $\theta_{кр} = -8^\circ$. Распределение индуктивных скоростей равномерное.

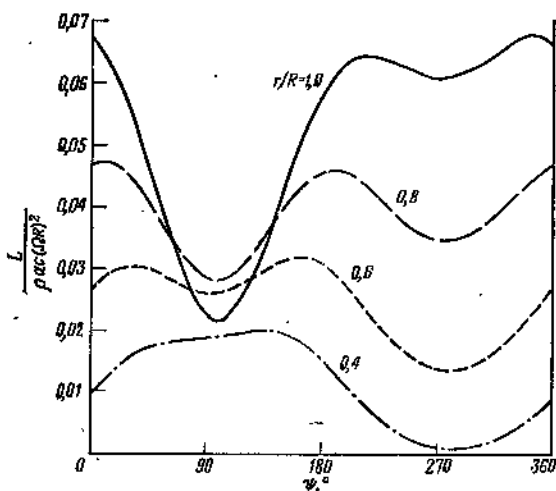


Рис. 5.26. Распределение относительной подъемной силы сечения лопасти по азимуту при $\mu = 0,25$, $C_T/\sigma = 0,12$, $f/A = 0,015$ и $\theta_{кр} = -8^\circ$. Распределение индуктивных скоростей равномерное.

На рис. 5.23 показано распределение циркуляции $\Gamma/(ac\Omega R) = (1/2)\mu_T\alpha$ присоединенных вихрей в сечениях, а на рис. 5.24 — распределение подъемных сил $L/[\rho ac(\Omega R)^2] = (1/2)\mu_T^2\alpha$ сечений при одинаковых значениях параметров. Наконец, на рис. 5.25 и 5.26 представлены распределения подъемной силы сечения по радиусу и по азимуту. В концевой части наступающей лопасти наблюдается уменьшение подъемной силы, что необходимо для поддержания равновесия при малой подъемной силе отступающей лопасти.

5.7. ОБЗОР ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ

Основы теории несущего винта при полете вперед изложены выше. В последующих разделах рассмотрено несколько обобщений этой теории. Однако прежде чем перейти к обобщениям, дадим обзор предположений, которые были сделаны до сих пор.

Для расчета нагрузок лопасти была использована теория несущей линии. Рассматривались маховое движение только абсолютно жесткой лопасти и управление только общим и циклическим шагами. Качание и установочное движение лопасти (помимо определяемого управлением), а также ее изгиб в плоскости взмаха в расчет не принимались. Был рассмотрен шарнирный винт без отбоя ГШ, пружин в шарнирах и без связи между углами взмаха и установки. Зона обратного обтекания не учитывалась, все углы (кроме азимута) считались малыми. При определении аэродинамических характеристик сечений градиент подъемной силы по углу атаки был принят постоянным, а коэффициент сопротивления — равным его среднему значению. Влияние срыва, сжимаемости воздуха и радиального течения не учитывалось. Распределение индуктивных скоростей по диску было принято равномерным. Рассматривались только лопасти с постоянной хордой и линейной круткой. Неоперенная часть лопасти, концевые потери, высшие гармоники махового движения и вес лопасти не учитывались.

Теория несущей линии представляет собой основу аэродинамики несущего винта, но она не пригодна для концевой части лопасти и тех частей, где к лопасти близко подходит вихрь, а нагрузки этих участков лопасти имеют важное значение. Качание и установочное движение лопасти (помимо определяемого управлением), а также ее изгиб в плоскости взмаха важны с точки зрения вибраций, нагрузок и аэроупругой устойчивости лопасти, но при расчете аэродинамических характеристик винта и характеристик управления ими обычно можно пренебречь. Аналогично высшие гармоники махового движения важны с точки зрения вибраций и нагрузок лопасти, но при указанных расчетах ими также можно пренебречь. Зону обратного обтекания можно не учитывать в интервале $0 \leq \mu \leq 0,5$, соответствующем

диапазону скоростей полета большинства вертолетов. Вследствие пренебрежения эффектами срыва и сжимаемости теория становится непригодной на экстремальных режимах полета (большие μ или C_T/σ). Предположение о равномерном распределении скоростей протекания удовлетворительно для расчета аэродинамических характеристик при больших скоростях полета, но приводит к значительным ошибкам в величинах коэффициентов махового движения, особенно угла β_{1s} . Учет неравномерности протекания важен также для расчета нагрузок и вибраций винта. Постоянная хорда и линейная крутка типичны для лопастей несущего винта. Концевые потери существенно влияют на аэродинамические характеристики винта и на маховое движение.

В теории несущего винта применительно к полету вперед от большинства сделанных предположений следует отказаться. Хотя выведенные выше формулы отражают основные особенности характеристик винта, принятая схема слишком упрощена и поэтому дает неточные результаты. Остальные разделы этой главы посвящены обобщению изложенной теории несущего винта на случай полета вперед путем отказа от некоторых упрощающих допущений.

5.8. КОНЦЕВЫЕ ПОТЕРИ И ВЛИЯНИЕ НЕОПЕРЕННОЙ ЧАСТИ ЛОПАСТИ

Постепенное уменьшение подъемной силы сечений до нуля на конце лопасти можно учесть с помощью коэффициента концевых потерь B , предполагая, что сечения при $r > BR$ имеют сопротивление, но не создают подъемной силы. Кроме того, лопасть имеет неоперенную часть, т. е. несущие сечения начинаются не при $r = 0$, а при $r = r_0$. С учетом концевых потерь и неоперенной части выражение для коэффициента силы тяги винта принимает вид

$$C_T = \frac{\sigma a}{2} \int_{r_0}^B [(\theta_0 + \theta_{кр} r)(r^2 + \mu^2/2) - \lambda_{ППУ} r] dr =$$

$$= \frac{\sigma a}{2} \left\{ \frac{\theta_0}{3} [B^3 - r_0^3 + 3(B - r_0)\mu^2/2] + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_{кр}}{4} [B^4 - r_0^4 + (B^2 - r_0^2)\mu^2] - \frac{1}{2} \lambda_{ППУ} (B^2 - r_0^2) \right\}.$$

Влияние концевых потерь сводится в основном к уменьшению силы тяги при заданном общем шаге приблизительно в B^3 раз. Наличие неоперенной части мало влияет на величину C_T . Концевые потери оказывают сильное влияние на величину момента аэродинамических сил относительно оси ГЦ, так что эти по-

тери нужно учитывать при расчете махового движения (см. разд. 5.24). Кроме того, концевые потери приводят к увеличению индуктивной мощности при заданной силе тяги в B^{-2} раз (см. разд. 4.1.3).

5.9. МОМЕНТ ВЕСА ЛОПАСТИ

Вес лопасти, обычно нормальный к диску винта, создает момент относительно оси ГШ, который противодействует моменту подъемной силы и, следовательно, уменьшает угол конусности. Вес элемента лопасти равен $mg dr$, направлен вниз и имеет плечо r относительно оси ГШ. Поэтому добавочный момент веса равен

$$\int_0^R mgr dr = g \int_0^R mr dr = gS_n,$$

где $S_n = \int_0^R mr dr = M_n r_{ц.м}$ — статический момент лопасти отно-

сительно оси ГШ (M_n — масса лопасти, $r_{ц.м}$ — радиальная координата ее центра масс). Подставим этот добавочный момент в правую часть уравнения махового движения, разделим все члены на I_n и перейдем к безразмерным величинам. В результате получим

$$\ddot{\beta} + \beta = \gamma \int_0^1 r \frac{F_z}{ac} dr - S_n^* \frac{g}{\Omega^2 R},$$

где

$$S_n^* = \frac{RS_n}{I_n} = \left(\int_0^1 mr dr \right) : \left(\int_0^1 mr^2 dr \right) \approx \frac{3}{2}$$

(приближенное равенство становится точным для лопасти с равномерно распределенной массой). Величина безразмерного ускорения силы тяжести $g/(\Omega^2 R)$ весьма мала, обычно около 0,002 (если концевая скорость постоянна, то указанная величина зависит от R).

Член $S_n^* g$ в правой части постоянен, так что он влияет только на угол конусности. Угол β_0 уменьшается на величину $\Delta\beta_0 = S_n^* g/(\Omega^2 R)$, которая обычно составляет от 0,1 до 0,2°, т. е. пренебрежимо мала для большинства приложений.

Безразмерную константу $g/(\Omega^2 R)$ можно рассматривать как отношение гравитационных сил, действующих на лопасть, к центробежным. Малая величина этой константы означает, что определяющее влияние на характеристики винта оказывают центробежные силы, а вес лопасти, как правило, влияет слабо.

5.10. ЛИНЕЙНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНДУКТИВНЫХ СКОРОСТЕЙ

В качестве первого приближения к неравномерному распределению индуктивных скоростей на диске винта при полете вертолета вперед рассмотрим линейное распределение

$$\lambda_l = \lambda_0 (1 + k_x r \cos \psi + k_y r \sin \psi).$$

В этом распределении λ_0 обозначает среднюю безразмерную индуктивную скорость. Коэффициенты k_x и k_y являются функциями μ , так как они должны обращаться в нуль на режиме висения. При больших скоростях полета $k_x \approx 1$, а коэффициент k_y несколько меньше по абсолютной величине и отрицателен. В разд. 4.2.2 было получено несколько приближенных формул для этих коэффициентов. Линейное распределение можно рассматривать как сумму первых членов разложения в ряд произвольной индуктивной скорости $\lambda_l(r, \psi)$. Члены низшего порядка в этом разложении существенны для аэродинамических характеристик винта и махового движения лопастей, а члены высшего порядка (которые могут быть велики на некоторых режимах полета) — для нагрузок и вибраций лопасти. До сих пор мы рассматривали равномерное распределение индуктивных скоростей. Теперь нужно найти те изменения в аэродинамических нагрузках несущего винта и в маховом движении, которые обусловлены добавочной индуктивной скоростью

$$\Delta \lambda = \lambda_0 (k_x r \cos \psi + k_y r \sin \psi) = \lambda_x r \cos \psi + \lambda_y r \sin \psi.$$

Здесь λ_x определяет продольное, а λ_y — поперечное изменения индуктивной скорости на диске.

Добавочный коэффициент силы тяги определяется выражением

$$\Delta C_T = \frac{\sigma a}{2} \int_0^1 (-\Delta \lambda u_T) dr = \frac{\sigma a}{2} \int_0^1 (-\lambda_y / 2) \mu r dr = -\frac{\sigma a}{8} \lambda_y \mu.$$

Следовательно,

$$C_T = \frac{\sigma a}{2} \left[\frac{1}{3} \theta_{0.75} \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2 \right) - \frac{1}{8} \theta_{кр} \mu^2 - \frac{1}{2} \left(\bar{\lambda}_{шиу} + \frac{\mu}{2} \lambda_y \right) \right].$$

где $\bar{\lambda}$ — средний коэффициент протекания. Таким образом, изменение коэффициента подъемной силы при заданном общем шаге будет порядка μ^2 . Добавочные коэффициенты продольной и по-

перечной сил равны

$$\Delta(C_H)_{\text{ПКЛ}} = \frac{\sigma a}{2} \left[\lambda_x \left(\frac{\mu}{16} \theta_{1c} + \frac{\beta_0}{6} \right) + \lambda_y \left(\frac{1}{6} \theta_{0.75} + \frac{3\mu}{16} \theta_{1s} - \frac{1}{2} \bar{\lambda}_{\text{ПКЛ}} \right) \right],$$

$$\Delta(C_Y)_{\text{ПКЛ}} = \frac{\sigma a}{2} \left[-\lambda_x \left(\frac{1}{6} \theta_{0.75} + \frac{\mu}{16} \theta_{1s} - \frac{1}{2} \bar{\lambda}_{\text{ПКЛ}} \right) - \lambda_y \left(\frac{\mu}{16} \theta_{1c} - \frac{1}{6} \beta_0 \right) \right].$$

Добавочный момент относительно оси ГШ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \Delta M_F &= \int_0^1 (-\Delta\lambda)(r + \mu \sin \psi)(r/2) dr = \\ &= -(\lambda_x \cos \psi + \lambda_y \sin \psi) \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} \mu \sin \psi \right), \end{aligned}$$

так что уравнения коэффициентов махового движения принимают вид

$$\gamma \left[\frac{1}{8} \theta_{0.8} (1 + \mu^2) - \frac{1}{60} \mu^2 \theta_{\text{кр}} - \frac{1}{6} (\bar{\lambda}_{\text{ППУ}} + \frac{1}{2} \mu \lambda_y) \right] = \beta_0,$$

$$\frac{1}{8} (\theta_{1c} - \beta_{1s}) \left(1 + \frac{1}{2} \mu^2 \right) - \frac{1}{6} \mu \beta_0 - \frac{1}{8} \lambda_x = 0,$$

$$\frac{1}{8} (\theta_{1s} + \beta_{1c}) \left(1 - \frac{1}{2} \mu^2 \right) + \frac{1}{3} \mu \theta_{0.75} - \frac{1}{4} \mu \bar{\lambda}_{\text{ППУ}} - \frac{1}{8} \lambda_y = 0.$$

Отсюда находим углы наклона ПКЛ:

$$\beta_{1s} - \theta_{1c} = -[(4/3)\mu\beta_0 + \lambda_x]/(1 + \mu^2/2),$$

$$\beta_{1c} + \theta_{1s} = \{-(8/3)\mu[\theta_{0.75} - (3/4)\bar{\lambda}_{\text{ППУ}}] + \lambda_y\}/(1 - \mu^2/2).$$

Изменение угла конусности, как и коэффициента силы тяги, будет порядка μ^2 . Это изменение, обусловленное тем, что поперечное уменьшение (при $\lambda_y < 0$) индуктивной скорости приводит к уменьшению среднего значения $\lambda_{\text{ит}}$, невелико. Однако изменение индуктивной скорости существенно влияет на углы наклона ПКЛ. Угол атаки сечения изменяется в продольном и поперечном направлениях соответственно коэффициентам λ_x и λ_y , что вызывает поперечное и продольное изменения угла взмаха. Угол β_{1c} (а значит, и угол θ_{1c}) изменяются мало, но не настолько, чтобы этим можно было пренебречь, а изменения углов β_{1s} и θ_{1s} значительны. Таким образом, неравномерность распределения индуктивной скорости сильно влияет на первые гармоники махового движения и циклический шаг лопастей. Это одна из основных причин расхождения результатов расчета махового движения с экспериментальными данными.

Наконец, добавочный коэффициент индуктивной мощности, обусловленный неравномерностью протекания через диск, определяется выражением

$$\Delta C_{P_i} = \int \Delta \lambda dC_T = \sigma a \int_0^1 \Delta \lambda \frac{F_z}{ac} dr.$$

Здесь распределение индуктивной скорости $\lambda_i(r, \psi)$ считается произвольным. Для расчета ΔC_{P_i} разложим $\Delta \lambda$ по азимуту в ряд Фурье, а по радиусу — в ряд по ортогональным формам изгибных колебаний лопасти:

$$\Delta \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda_{nc}^l \cos n\psi + \lambda_{ns}^l \sin n\psi) \eta_l(r).$$

Здесь функция η_l — форма изгибных колебаний лопасти в плоскости взмаха по i -му тону, которому соответствует собственная частота ν_l (в случае шарнирного винта без отбоя ГШ $\eta_l = r$ и $\nu_l = 1$). В разд. 9.2.2 будет выведено дифференциальное уравнение форм изгибных колебаний лопасти

$$I_i^* (\ddot{q}_i + \nu_i^2 q_i) = \gamma \int_0^1 \eta_l \frac{F_z}{ac} dr,$$

где I_i^* — обобщенная масса для i -го тона. Последние два равенства позволяют выолнить интегрирование в выражении ΔC_{P_i} по радиусу и по азимуту аналитически:

$$\begin{aligned} \Delta C_{P_i} &= \sigma a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda_{nc}^l \cos n\psi + \lambda_{ns}^l \sin n\psi) \int_0^1 \eta_l \frac{F_z}{ac} dr d\psi = \\ &= \frac{\sigma a}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} (\lambda_{nc}^l \cos n\psi + \lambda_{ns}^l \sin n\psi) \frac{I_i^*}{\gamma} (\ddot{q}_i + \nu_i^2 q_i) d\psi = \\ &= \frac{\sigma a}{2\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} I_i^* (\nu_i^2 - n^2) (\lambda_{nc}^l q_{nc}^l + \lambda_{ns}^l q_{ns}^l). \end{aligned}$$

Здесь q_{nc}^l и q_{ns}^l — коэффициенты Фурье формы установившихся вынужденных изгибных колебаний по i -му тону. Интегрирование в выражении $C_{P_i} = \int \lambda_i dC_T$ в общем случае проще выполнить численно. Заметим, однако, что при линейном распределении индуктивных скоростей в разложении будут присутствовать только члены с номером $n = 1$, и если при этом рассматривать первый тон колебаний лопасти шарнирного винта без отбоя ГШ (так что $\nu_1 = 1$), то сразу получим $\Delta C_{P_i} = 0$.

5.11. ВЫСШИЕ ГАРМОНИКИ МАХОВОГО ДВИЖЕНИЯ

Найдем вторые гармоники угла взмаха, т. е. коэффициенты β_{2c} и β_{2s} . На высшие гармоники махового движения сильное влияние оказывают неравномерность протекания через диск и изгибные колебания лопасти. Выводимые далее формулы отражают лишь основные особенности высших гармоник. Если по-прежнему считать, что β_{2c} и β_{2s} намного меньше, чем β_{1c} и β_{1s} , то полученные выше формулы коэффициентов махового движения остаются в силе. Систему алгебраических уравнений для β_{2c} и β_{2s} находим, применяя к дифференциальному уравнению махового движения операторы

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \cos 2\psi \, d\psi \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \sin 2\psi \, d\psi.$$

Пренебрежем влиянием вторых гармоник на нулевую и первые. Тогда нужно решить не систему пяти уравнений относительно всех пяти коэффициентов, а только два дополнительных уравнения относительно β_{2c} и β_{2s} . Применяя операторы к инерционным членам уравнения, получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\ddot{\beta} + \beta) \cos 2\psi \, d\psi = -3\beta_{2c}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\ddot{\beta} + \beta) \sin 2\psi \, d\psi = -3\beta_{2s}.$$

Так как вторые гармоники моментов относительно оси ГШ имеют частоту, которая выше резонансной, вынужденные колебания определяются в основном инерцией лопасти. В общем случае применение соответствующих операторов к левой части уравнения махового движения дает выражения $(1-n^2)\beta_{nc}$ и $(1-n^2)\beta_{ns}$. Поэтому амплитуды высших гармоник махового движения, возбуждаемых аэродинамическими моментами относительно оси ГШ, быстро убывают с ростом номера (приблизительно как $1/n^2$). Если рассматривать изгибные колебания лопасти по тонам с номером выше 1-го, то опять-таки возможны высшие гармоники махового движения с большой амплитудой, так как моменты действуют с частотой, близкой к резонансной.

Если применить операторы и к аэродинамическим членам уравнения махового движения, то уравнения относительно β_{2c} и β_{2s} запишутся в виде

$$\begin{aligned} \gamma(-\mu^2\theta_0/8 - \mu\beta_{1s}/6 - \mu^2\theta_{\kappa p}/12 - \beta_{2s}/4 - \mu\beta_{1c}/6 + \mu\lambda_y/12) &= -3\beta_{2c}, \\ \gamma(\mu\theta_{1c}/6 + \beta_{2c}/4 - \mu\beta_{1s}/6 - \mu^2\beta_0/8 - \mu\lambda_x/12) &= -3\beta_{2s}. \end{aligned}$$

Здесь принято линейное распределение индуктивной скорости. Решение этой системы будет следующим:

$$\beta_{2c} = \frac{\gamma\mu/24}{1 + (\gamma/12)^2} \left\{ \left[\mu\theta_{0,67} + \frac{4}{3}(\beta_{1c} + \theta_{1s}) - \frac{2}{3}\lambda_y \right] + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{12} \left[\mu\beta_0 + \frac{4}{3}(\beta_{1s} - \theta_{1c}) + \frac{2}{3}\lambda_x \right] \right\}, \\ \beta_{2s} = \frac{\gamma\mu/24}{1 + (\gamma/12)^2} \left\{ -\frac{\gamma}{12} \left[\mu\theta_{0,67} + \frac{4}{3}(\beta_{1c} + \theta_{1s}) - \frac{2}{3}\lambda_y \right] + \right. \\ \left. + \mu\beta_0 + \frac{4}{3}(\beta_{1s} - \theta_{1c}) + \frac{2}{3}\lambda_x \right\}.$$

Видно, что величины β_{2c} и β_{2s} имеют порядок по крайней мере μ по сравнению с коэффициентами первых гармоник махового движения. Типичные значения этих коэффициентов составляют десятые доли градуса, т. е. они действительно малы, как и предполагалось. В общем случае величины β_{nc} и β_{ns} будут порядка μ^n/n^2 .

Высшие гармоники махового движения лопасти возникают в основном вследствие неравномерности распределения индуктивных скоростей. Здесь был рассмотрен только частный случай — линейное распределение. В общем случае высшие гармоники махового движения имеют значительно большие амплитуды, чем получено выше. Кроме того, для лучшего согласования расчетов высших гармоник с экспериментом нужно учесть изгибные колебания лопасти. Высшие гармоники махового движения обычно слабо сказываются на аэродинамических характеристиках несущего винта и характеристиках управления, но они играют главную роль в вибрациях вертолета и нагрузках лопасти.

Рассмотрим кратко влияние высших гармоник угла установки на маховое движение. Пусть винт работает на режиме висения. Тогда связь между гармониками углов взмаха и установки разных номеров отсутствует. При полете вперед такая связь обусловлена периодическим обтеканием лопасти. На висении же n -я гармоника угла установки порождает только n -ю гармонику угла взмаха. Уравнение махового движения на режиме висения имеет вид

$$\ddot{\beta} + \beta = (\gamma/8)(-\dot{\beta} + \theta).$$

Гармоника $\theta = \bar{\theta} \cos[n(\psi + \psi_0)]$ угла установки порождает гармонику $\beta = \bar{\beta} \cos[n(\psi + \psi_0) - \Delta\psi]$ угла взмаха. Из уравнения махового движения находим амплитуду и сдвиг по фазе этих вынужденных колебаний:

$$\bar{\beta}/\bar{\theta} = (\gamma/8)[(n\gamma/8)^2 + (n^2 - 1)^2]^{-1/2}, \Delta\psi = 90^\circ + \text{arctg}[8(n^2 - 1)/(n\gamma)].$$

Для первой гармоники, как и следовало ожидать, $\bar{\beta}/\bar{\theta} = 1$ и $\Delta\psi = 90^\circ$. Для гармоник с большими номерами $\bar{\beta}/\bar{\theta} \approx \gamma/(8n^2)$,

т. е. амплитуды убывают (так как инерция лопасти играет в вынужденных колебаниях доминирующую роль), а сдвиг по фазе $\Delta\psi$ приближается к 180° . Таким образом, эффективность управления винтом посредством изменения первых гармоник угла установки (циклического шага) объясняется тем, что они вызывают резонанс в маховом движении.

5.12. ПРОФИЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ И РАДИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ

В разд. 5.3 и 5.4 были выведены формулы, позволяющие рассчитать профильные части сил несущего винта, аэродинамического крутящего момента и мощности:

$$C_{H_0} = \int_0^1 \sigma \left(\frac{F_x}{c} \sin \psi + \frac{F_r}{c} \cos \psi \right) dr,$$

$$C_{Y_0} = \int_0^1 \sigma \left(-\frac{F_x}{c} \cos \psi + \frac{F_r}{c} \sin \psi \right) dr,$$

$$C_{Q_0} = \int_0^1 \sigma r \frac{F_x}{c} dr, \quad C_{P_0} = C_{Q_0} + \mu C_{H_0} = \int_0^1 \sigma \left(u_T \frac{F_x}{c} + u_R \frac{F_r}{c} \right) dr.$$

Эти выражения нужно еще осреднить по азимуту. Здесь F_x и F_r — нормальная и радиальная составляющие профильного сопротивления сечения. Особый интерес представляет коэффициент профильной мощности C_{P_0} . Заметим, что слагаемые $u_T F_x$ и $u_R F_r$ выражают затраты мощности в сечении, обусловленные нормальной и радиальной силами сопротивления. Для упрощенной схемы винта соответствующие коэффициенты уже были найдены. Теперь мы рассмотрим влияние зоны обратного обтекания, радиального течения и радиальной силы сопротивления. Во всех рассмотренных здесь случаях $C_{Y_0} = 0$ вследствие постоянства коэффициента сопротивления сечений.

Радиальное течение (со скоростью $u_R = \mu \cos \psi$) вдоль лопасти порождает радиальную составляющую обусловленного вязкостью сопротивления в сечениях лопасти. Нормальную и радиальную силы сопротивления нужно выразить через аэродинамические характеристики сечений, так как других способов, по-видимому, практически нет. Рассмотрим нагрузку крыла с бесконечным размахом и хордой c , установленного под углом скольжения Λ к скорости V невозмущенного потока. На таком бесконечном крыле нагрузка должна быть одинаковой во всех сечениях, но она будет отличаться от нагрузки нескользящего крыла. Продольные (направленные вдоль размаха) течение и градиент давления на скользящем крыле должны влиять на

пограничный слой, а значит, и на сопротивление. Продольное течение сильно влияет на срывные характеристики крыла. Нагрузку скользящего крыла можно выразить либо через аэродинамические характеристики сечения, нормального к оси крыла (нормального сечения), либо через характеристики сечения, плоскость которого параллельна скорости невозмущенного потока и составляет угол Λ с нормальной плоскостью («косого» сечения). Длины хорд и углы атаки косого (обозначены индексом y) и нормального сечений связаны соотношениями $c_y = c/\cos \Lambda$ и $\alpha_y = \alpha \cos \Lambda$. Подъемную силу и сопротивление косого сечения обозначим через L_y и D_y . Предположим, что полное сопротивление D_y косого сечения направлено по скорости невозмущенного потока. На самом деле сопротивление будет наклонено к нормальной плоскости на угол, превышающий Λ , вследствие продольного течения в пограничном слое, но указанное допущение здесь вполне приемлемо. Разлагая сопротивление на составляющие, нормальную и параллельную оси крыла, получим, что в нормальном сечении действуют следующие силы: $L = L_y$, $D = D_y \cos \Lambda$ и $F_r = D_y \sin \Lambda = D \operatorname{tg} \Lambda$. В косом сечении скорость невозмущенного потока больше, чем в нормальном, так что скоростные напоры связаны соотношением $q_y = q/\cos^2 \Lambda$. Поэтому для аэродинамических коэффициентов имеем соотношения $c_l(\alpha) = c_{ly}(\alpha_y)/\cos^2 \Lambda$ и $c_d(\alpha) = \xi_{dy}(\alpha_y)/\cos \Lambda$. Так как увеличение длины хорды косого сечения компенсируется соответствующим уменьшением его ширины, нагрузки действуют на ту же элементарную площадь. Поэтому различие в аэродинамических коэффициентах нормального и косого сечений обусловлено только различием в величинах скоростного напора.

Используем теперь следующую гипотезу об эквивалентности косого и нормального сечений: для косого сечения зависимость $c_{dy}(\alpha_y)$ совпадает с зависимостью коэффициента сопротивления от угла атаки для профиля в двумерном потоке, а зависимость $c_l(\alpha)$ для нормального сечения не изменяется при изменении угла скольжения. Предположение о коэффициенте подъемной силы основано на следующем факте: в системе координат, перемещающейся вдоль размаха со скоростью $V \sin \Lambda$, скользящее крыло эквивалентно нескользющему крылу, обтекаемому невозмущенным потоком со скоростью $V \cos \Lambda$, если не учитывать изменений в пограничном слое. В соответствии с этой гипотезой при досрывном обтекании подъемная сила как нормального, так и косого сечений пропорциональна углу атаки, но градиенты подъемной силы различны: $c_l(\alpha) = \alpha$ и $c_{ly}(\alpha_y) = a_y \alpha_y$. Но мы уже знаем, что $c_l(\alpha) = c_{ly}(\alpha_y)/\cos^2 \Lambda$ и $\alpha_y = \alpha \cos \Lambda$. Поэтому из гипотезы об эквивалентности сечений следует, что для скользящего крыла $c_{ly}(\alpha_y) = c_{l, 2D}(\alpha_y \cos \Lambda)$, где индекс $2D$ означает характеристики профиля в двумерном потоке. (Отсюда градиент подъемной силы по углу атаки для сечения скользящего крыла

равен $\alpha_y = \alpha \cos \Lambda$.) Что же касается коэффициента сопротивления косо́го сечения, то по гипотезе об эквивалентности просто $c_{ay}(\alpha_y) = c_{a, 2D}(\alpha_y)$. Таким образом, гипотеза об эквивалентности сечений позволяет рассчитать силы, действующие на скользящее крыло, исходя из аэродинамических коэффициентов профилей в двумерном потоке. Правда, при этом нужно учитывать небольшое уменьшение относительной толщины косо́го сечения по сравнению с нормальным. Гипотеза многократно подтверждалась в экспериментах со скользящими крыльями. Однако использование характеристик профилей не всегда допустимо. В частности, при больших углах атаки или очень больших углах скольжения радиальное течение настолько изменяет всю картину обтекания, что гипотеза об эквивалентности сечений становится неприемлемой.

Характеристики нормального сечения скользящего крыла описываются выражениями $c_l(\alpha) = c_{ly}(\alpha_y)/\cos^2 \Lambda = c_{l, 2D}(\alpha \cos^2 \Lambda)/\cos^2 \Lambda$ и $c_d(\alpha) = c_{dy}(\alpha_y)/\cos \Lambda = c_{d, 2D}(\alpha \cos \Lambda)/\cos \Lambda$. При малых углах атаки радиальное течение не влияет на подъемную силу, а сопротивление возрастает в $(\cos \Lambda)^{-1}$ раз, тем самым несколько компенсируя уменьшение эффективного угла атаки. Так как длина хорды у косо́го сечения больше, чем у нормального, время нарастания пограничного слоя также больше, что вызывает увеличение сопротивления. При больших углах атаки эффективный угол атаки сечения уменьшается пропорционально $(\cos \Lambda)^{-1}$ для сопротивления и $(\cos \Lambda)^{-2}$ для подъемной силы. В результате падение подъемной силы вследствие срыва и рост сопротивления вследствие сжимаемости воздуха затягиваются на большие углы атаки. В практических расчетах несущего винта оправданно пренебрегают влиянием радиального течения на подъемную силу. Радиальное течение увеличивает сопротивление нормального сечения и создает радиальное сопротивление, причем обе эти силы увеличивают профильную мощность. Подводя итог, напишем формулы для подъемной силы, сопротивления и радиальной силы, действующих на нормальное сечение лопасти:

$$c_l(\alpha) = c_{l, 2D}(\alpha \cos^2 \Lambda)/\cos^2 \Lambda,$$

$$c_d(\alpha) = c_{d, 2D}(\alpha \cos \Lambda)/\cos \Lambda,$$

$$F_r = D \operatorname{tg} \Lambda = (u_R/u_T) D,$$

где $\cos \Lambda = u_T/(u_T^2 + u_R^2)^{1/2}$. Эти формулы основаны на предположении о том, что результирующее сопротивление косо́го сечения направлено по скорости невозмущенного потока, и на гипотезе об эквивалентности косых и нормальных сечений.

Нормальное и радиальное сопротивления, которые нужны для расчета профильной мощности, представим теперь в виде $F_x = D \cos \varphi \approx D$ и $F_r = D \operatorname{tg} \Lambda = (u_R/u_T) D$, где $D =$

$= (1/2) u_T |u_T| c c_d$ (плотность воздуха в это выражение не входит, так как здесь подразумевается безразмерная сила), а коэффициент сопротивления — в виде $c_d = c_{d, 2D} (\alpha \cos \Lambda) / \cos \Lambda$, причем $\cos \Lambda = |u_T| / (u_T^2 + u_R^2)^{1/2}$. Абсолютные величины u_T введены для того, чтобы учесть влияние зоны обратного обтекания. Так как сила D по определению положительна, когда направлена против вращения несущего винта, она должна менять знак в зоне обратного обтекания. Полагая, как обычно, $u_T = r + \mu \sin \psi$ и $u_R = \mu \cos \psi$, получим выражения для профильных частей продольной силы, аэродинамического крутящего момента и мощности:

$$C_{H_0} = \int_0^1 \sigma (r \sin \psi + \mu) \frac{D}{c u_T} dr,$$

$$C_{Q_0} = \int_0^1 \sigma r u_T \frac{D}{c u_T} dr,$$

$$C_{P_0} = \int_0^1 \sigma (u_T^2 + u_R^2) \frac{D}{c u_T} dr,$$

где

$$D/(c u_T) = \frac{1}{2} \sqrt{u_T^2 + u_R^2} c_d (\alpha \cos \Lambda),$$

а квадрат результирующей скорости обтекания со скольжением равен $u_T^2 + u_R^2 = r^2 + \mu^2 + 2r\mu \sin \psi$. Если заданы распределение углов атаки по диску винта и соответствующие зависимости коэффициента сопротивления сечения от угла атаки, то эти выражения можно численно проинтегрировать. Чтобы продолжить далее аналитическое исследование, будем считать коэффициент сопротивления независимым от угла атаки, т. е. $c_{d, 2D} (\alpha \cos \Lambda) \approx c_{d_0}$, а хорду лопастей — постоянной.

Полезно исследовать влияние зоны обратного обтекания, радиального сопротивления и скольжения по отдельности. Исключив радиальное сопротивление F_r , получим следующие формулы для аэродинамических коэффициентов винта:

$$C_{H_0} = \int_0^1 \sigma u_T \sin \psi \frac{D}{c u_T} dr, \quad C_{Q_0} = \int_0^1 \sigma r u_T \frac{D}{c u_T} dr,$$

$$C_{P_0} = \int_0^1 \sigma u_T^2 \frac{D}{c u_T} dr.$$

Если пренебречь увеличением коэффициента сопротивления вследствие скольжения, то $D/(c u_T) = (1/2) c_{d_0} |u_T|$, а если еще

пренебречь обратным обтеканием, то $D/(c u_T) = c_{d_0} u_T / 2$. В результате этих трех аппроксимаций снова получим схему винта, которая была рассмотрена в разд. 5.3 и 5.4, с формулами (после осреднения по азимуту)

$$C_{H_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} 2\mu, \quad C_{Q_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} (1 + \mu^2), \quad C_{P_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} (1 + 3\mu^2)$$

Если теперь учесть радиальное сопротивление, то

$$C_{H_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} 3\mu, \quad C_{Q_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} (1 + \mu^2), \quad C_{P_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} (1 + 4\mu^2).$$

Таким образом, радиальное сопротивление на 50% увеличивает продольную силу, а значит, возрастает и профильная мощность при полете вперед. Если учитывать только зону обратного обтекания (что часто встречается в литературе), то получим формулы

$$C_{H_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} (2\mu + \mu^3/2),$$

$$C_{Q_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} (1 + \mu^2 - \mu^4/8),$$

$$C_{P_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} (1 + 3\mu^2 + 3\mu^4/8).$$

В зоне обратного обтекания нужно в подынтегральных выражениях просто подставить $|u_T|$ вместо u_T , что можно трактовать следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \psi) |u_T| dr d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f u_T dr d\psi - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\mu \sin \psi} f u_T dr d\psi.$$

Первый интеграл дает именно тот результат, который получают, пренебрегая зоной обратного обтекания. Если учитывать и радиальное сопротивление, и зону обратного обтекания, то

$$C_{H_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} (3\mu + 3\mu^3/4),$$

$$C_{Q_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} (1 + \mu^2 - \mu^4/8),$$

$$C_{P_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} (1 + 4\mu^2 + 5\mu^4/8).$$

Таким образом, обратное обтекание имеет второстепенное значение по сравнению с радиальным сопротивлением, что объясняется малой величиной скоростного напора в зоне обратного обтекания.

Наконец, рассмотрим выражения для профильных частей аэродинамических коэффициентов несущего винта, в которых

учтено влияние на c_d радиального сопротивления, зоны обратного обтекания и скольжения:

$$C_{H_0} = \int_0^1 (\sigma c_{d_0}/2) (r \sin \psi + \mu) (u_T^2 + u_R^2)^{1/2} dr,$$

$$C_{Q_0} = \int_0^1 (\sigma c_{d_0}/2) r u_T (u_T^2 + u_R^2)^{1/2} dr,$$

$$C_{P_0} = \int_0^1 (\sigma c_{d_0}/2) (u_T^2 + u_R^2)^{3/2} dr.$$

Введение в подынтегральные выражения дополнительного множителя $(\cos \Lambda)^{-1}$, характеризующего увеличение коэффициента сопротивления вследствие скольжения, делает невозможным аналитическое интегрирование. Результаты численного интегрирования можно аппроксимировать выражениями:

$$C_{H_0} = (\sigma c_{d_0}/8) (3\mu + 1,98\mu^{2,7}),$$

$$C_{Q_0} = (\sigma c_{d_0}/8) (1 + 1,5\mu^2 - 0,37\mu^{3,7}),$$

$$C_{P_0} = (\sigma c_{d_0}/8) (1 + 4,5\mu^2 + 1,61\mu^{3,7}).$$

Погрешность аппроксимации интегралов составляет около 1% при $0 \leq \mu \leq 1$ (это не означает, конечно, что результаты расчетов по приведенным формулам будут отличаться от экспериментальных данных не более чем на 1%). Часто используют приближенную формулу

$$C_{P_0} = (\sigma c_{d_0}/8) (1 + 4,6\mu^2),$$

которая дает погрешность около 1% до $\mu = 0,3$ и погрешность около 5% до $\mu = 0,5$. Множитель $(1 + 4,6\mu^2)$, характеризующий увеличение профильной мощности со скоростью полета, образован следующими слагаемыми: вклад сопротивления нормального сечения через аэродинамический момент составляет $1 + \mu^2$ и через продольную силу $2\mu^2$, вклад радиального сопротивления через продольную силу, скольжение, увеличение коэффициента сопротивления и обратное обтекание составляет соответственно μ^2 , $0,45\mu^2$ и $0,15\mu^2$. На рис. 5.27 коэффициент профильной мощности представлен в виде функции характеристики режима работы винта, причем данные численного интегрирования сопоставлены с результатами, которые получают из последней приближенной формулы. Приведены также график коэффициента профильной мощности без учета зоны обратного обтекания и радиального течения и график коэффициента профильной части аэродинамического момента. Про-

фильная мощность значительно возрастает при умеренных μ и очень сильно — при больших μ . Однако при очень больших скоростях полета необходимо также учитывать влияние срыва и сжимаемости на величину C_{P_0} .

Глауэрт [G.85], рассматривая баланс энергии, получил формулу

$$C_{P_0} = \int_0^1 (\sigma c_{d_0}/2) (u_T^2 + u_T^2)^{3/2} dr,$$

а по теории элемента лопасти без учета зоны обратного обтекания и радиального течения — формулу

$$C_{P_0} = \int_0^1 (\sigma c_{d_0}/2) u_T^3 dr = (\sigma c_{d_0}/8) (1 + 3\mu^2).$$

Чтобы рассчитать C_{P_0} точнее, Глауэрт нашел среднее значение величин этого коэффициента на азимутах 0, 90, 180 и 270° (где интегрирование по радиусу можно выполнить аналитически).

Приравнивая это среднее значение правой части выражения $C_{P_0} = (\sigma c_{d_0}/8) (1 + n\mu^2)$, он пришел к уравнению

$$1 + n\mu^2 \approx 1/2 + 3\mu^2 + \mu^4/2 + (2 + 5\mu^2) \sqrt{1 + \mu^2}/2 + (3/4)\mu^4 \ln [(\sqrt{1 + \mu^2} + 1)/\mu].$$

Если в этом уравнении ограничиться членами порядка не выше μ^2 , то получим $n = 9/2$. Глауэрт использовал данное уравнение для расчета n при нескольких значениях μ . Беннет [B.53] вывел формулу для C_{P_0} , разлагая интеграл в ряд по степеням μ :

$$C_{P_0} = \frac{\sigma c_{d_0}}{8} \left(1 + \frac{9}{2} \mu^2 - \frac{3}{4} \mu^4 \ln \mu + \frac{3}{16} \mu^6 - \frac{3}{128} \mu^8 + \dots \right).$$

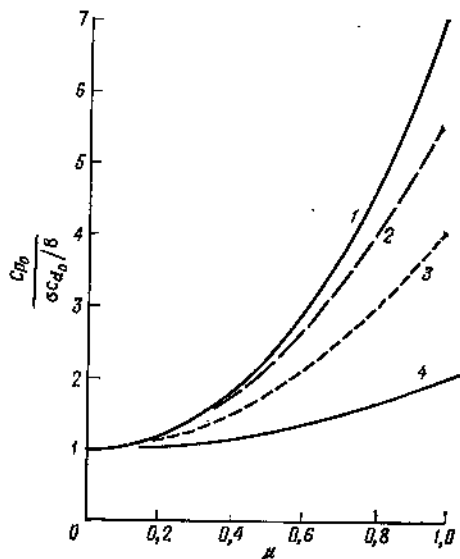


Рис. 5.27. Изменение профильной мощности при полете вперед.

1 — расчет численным интегрированием; 2 — расчет по формуле $C_{P_0} = (\sigma c_{d_0}/8) (1 + 4,5\mu^2)$; 3 — расчет без учета зоны обратного обтекания и радиального течения; 4 — коэффициент C_{Q_0} профильной части аэродинамического крутящего момента.

В приведенной ниже таблице сопоставлены данные Глауэрта, Беннета и результаты численного интегрирования в виде значений n в выражении $C_{P_0} = (\sigma c_{d0}/8)(1 + n\mu^2)$. Видно, что результаты Глауэрта точнее. Нет ничего неожиданного в большой погрешности результатов Беннета при $\mu > 0,5$, так как его разложение пригодно лишь при малых μ . Тем не менее раз-

Таблица

Зависимость n от μ по различным методам расчета

μ	0	0,3	0,4	0,5	0,6	0,75	1,0
Метод расчета							
Численное интегрирование	4,50	4,69	4,83	4,99	5,18	5,49	6,11
По Глауэрту	4,50	4,73	4,87	5,03	5,22	5,53	6,13
По Беннету	4,50	4,58	4,61	4,64	4,66	4,67	4,67

ложение Беннета ясно показывает происхождение часто используемой приближенной формулы $C_{P_0} = (\sigma c_{d0}/8)(1 + 4,6\mu^2)$. Сам Беннет предлагал брать $n = 4,65$. Влиянию радиального течения на профильную мощность посвящены также работы [Н.46, Н.47, Р.4]¹⁾.

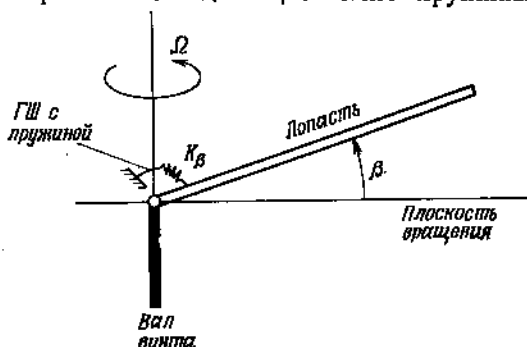
5.13. МАХОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРУЖИНЫ В ШАРНИРЕ

Рассмотрим шарнирный несущий винт, ГШ которого не имеют отбоя, но содержат пружины, создающие восстанавливающий момент на лопасти (рис. 5.28). Такая пружина может быть использована для повышения эффективности управления несущим винтом, так как при наличии пружины маховое движение не только наклоняет вектор силы тяги, но и непосредственно создает момент на втулке. Поскольку у бесшарнирного винта лопасти имеют упругие элементы в комлевых частях, анализ работы винта с пружинами в ГШ дает представление и о работе бесшарнирного винта. Предположим, что движение лопасти по-прежнему сводится к ее колебаниям как твердого тела вокруг оси ГШ, так что отклонение сечения от плоскости отсчета определяется координатой $z = r\beta$. Если пружина очень жесткая, то по ограниченности движения комлевой части шарнирно-подвешенная лопасть близка к консольно-заделанной, что вызывает значительный изгиб лопасти по форме основного тона изгибных колебаний. Однако жесткость пружин,

¹⁾ См. также работу Л. С. Павлова [254]. — Прим. перев.

устанавливаемых в ГШ, должна быть мала по сравнению с жесткостью подпружинивания, создаваемого центробежными силами. Поэтому предположение о колебаниях лопасти как твердого тела приемлемо. Если это предположение справедливо, то полученные выше выражения для сил и мощности несущего винта остаются прежними. Однако, наличие пружины

Рис. 5.28. Маховое движение лопасти при наличии пружины в ГШ.



изменяет маховое движение, так как появляется дополнительный момент относительно оси ГШ. Вследствие того что создаваемый пружиной момент пропорционален углу отклонения лопасти от вала несущего винта, наиболее подходящей плоскостью отсчета в рассматриваемом случае будет плоскость вращения.

При выводе уравнения махового движения для данного случая нужно только добавить момент относительно оси ГШ, обусловленный пружиной в шарнире. Этот момент равен $K_{\beta}(\beta - \beta_{\text{констр}})$, где K_{β} — жесткость пружины, а $\beta_{\text{констр}}$ — конструктивный угол конусности. При наличии пружины в шарнире угол конусности обуславливает стационарный момент в корне лопасти, но при $\beta_0 = \beta_{\text{констр}}$ шарнирный момент обращается в нуль. Уравнение махового движения будет следующим:

$$I_x(\ddot{\beta} + \Omega^2\beta) + K_{\beta}(\beta - \beta_{\text{констр}}) = \int_0^R r F_z dr,$$

или

$$\ddot{\beta} + \nu^2\beta = (\nu^2 - 1)\beta_{\text{констр}} + \gamma \int_0^1 r \frac{F_z}{ac} dr,$$

где через

$$\nu^2 = 1 + K_{\beta}/(I_x\Omega^2)$$

обозначен квадрат безразмерной собственной частоты махового движения во вращающейся системе координат. Для пружин, используемых на практике, величина ν лишь ненамного превосходит 1. При $\nu > 1$ первые гармоники аэродинамических

сил уже не действуют точно в резонанс с собственными колебаниями лопасти вокруг оси ГШ. Поэтому амплитуда вынужденных колебаний получается меньше резонансной, а запаздывание — меньше 90° по азимуту, т. е. пружина уменьшает запаздывание. Относ ГШ или консольная заделка лопасти также увеличивает собственную частоту махового движения. Рассмотрение шарнирного винта с пружинами в ГШ позволяет изучить влияние собственной частоты махового движения «в чистом виде», так как наличие пружин никаких других изменений не вводит. Ниже будет рассмотрена схема произвольного несущего винта с частотой ν махового движения, причем лопасть аппроксимируется абсолютно жестким телом.

Наличие пружины не изменяет моментов аэродинамических сил относительно оси ГШ, но вычисление коэффициентов Фурье от суммы моментов инерционных, центробежных и упругих сил дает теперь

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\bar{\beta} + \nu^2 \beta - (\nu^2 - 1) \beta_{\text{констр}}] d\psi = \nu^2 \beta_0 - (\nu^2 - 1) \beta_{\text{констр}},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\bar{\beta} + \nu^2 \beta - (\nu^2 - 1) \beta_{\text{констр}}] \cos \psi d\psi = (\nu^2 - 1) \beta_{1c},$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\bar{\beta} + \nu^2 \beta - (\nu^2 - 1) \beta_{\text{констр}}] \sin \psi d\psi = (\nu^2 - 1) \beta_{1s}.$$

Следовательно, уравнения относительно коэффициентов махового движения примут вид

$$(\nu^2 - 1) \beta_{\text{констр}} + \gamma [(1 + \mu^2) \theta_{0,80}/8 - \mu^2 \theta_{кр}/60 - \lambda_{ппу}/6] = \nu^2 \beta_0,$$

$$\gamma [(1 + \mu^2/2) (\theta_{1c} - \beta_{1s})/8 - \mu \beta_0/6] = (\nu^2 - 1) \beta_{1c},$$

$$\gamma [(1 - \mu^2/2) (\theta_{1s} + \beta_{1c})/8 + \mu \theta_{0,75}/3 - \mu \lambda_{ппу}/4] = (\nu^2 - 1) \beta_{1s}.$$

Отсюда находим угол конусности

$$\beta_0 = \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} \beta_{\text{констр}} + \frac{\gamma}{\nu^2} \left[\frac{1}{8} (1 + \mu^2) \theta_{0,80} - \frac{1}{60} \mu^2 \theta_{кр} - \frac{1}{6} \lambda_{ппу} \right].$$

Действие пружины уменьшает угол конусности. Заметим, что это решение можно выразить через угол конусности в отсутствие пружины:

$$\beta_0 = \frac{1}{\nu^2} [\beta_{нд} + (\nu^2 - 1) \beta_{\text{констр}}],$$

где $\beta_{нд}$ — угол конусности при $\nu = 1$. Конструктивный угол конусности должен уменьшать стационарные моменты в комле лопасти. Средняя величина момента, создаваемого пружиной

относительно оси ГШ, равна

$$(\nu^2 - 1)(\beta_0 - \beta_{\text{констр}}) = \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2} (\beta_{\text{ид}} - \beta_{\text{констр}}).$$

Видим, что при $\nu > 1$ и $\beta_{\text{констр}} \neq \beta_{\text{ид}}$ эта средняя величина отличается от нуля. Если же конструктивный угол конусности задать равным $\beta_{\text{ид}}$, то угол $\beta_0 = \beta_{\text{ид}}$ не будет зависеть от собственной частоты махового движения. Подходящим выбором конструктивного угла конусности можно уменьшить нагрузки лопасти, но сама идеальная величина конструктивного угла конусности зависит от нагрузки винта. Таким образом, выбранный конструктивный угол конусности оптимален только для одного режима полета.

Рассмотрим теперь наклон плоскости концов лопастей. Для режима висения последние два уравнения написанной выше системы принимают вид

$$\begin{aligned} \beta_{1s} + [8(\nu^2 - 1)/\gamma] \beta_{1c} &= \theta_{1c}, \\ \beta_{1c} - [8(\nu^2 - 1)/\gamma] \beta_{1s} &= -\theta_{1s}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим

$$\beta_{1s} = (\theta_{1c} + p\theta_{1s})/(1 + p^2), \quad \beta_{1c} = (-\theta_{1s} + p\theta_{1c})/(1 + p^2).$$

Параметр $p = 8(\nu^2 - 1)/\gamma$ характеризует отношение восстанавливающего момента пружины к демпфирующему моменту аэродинамических сил. Так как моменты инерционных и центробежных сил взаимно компенсируются, характер вынужденных колебаний определяют действие пружины и аэродинамическое демпфирование. Вследствие того что $\nu > 1$, изменяется маховое движение: возникают зависимости β_{1s} от θ_{1s} и β_{1c} от θ_{1c} . Представим первую гармонику махового движения и циклический шаг соответственно в виде $\bar{\beta} \cos(\psi + \psi_0 - \Delta\psi)$ и $\theta \cos(\psi + \psi_0)$. Тогда амплитуда вынужденных колебаний и их запаздывание по фазе определяются формулами

$$\bar{\beta}/\bar{\theta} = (1 + p^2)^{-1/2}, \quad \Delta\psi = 90^\circ - \text{arctg } p.$$

Увеличение собственной частоты махового движения, в результате чего частота возбуждающих сил получается ниже резонансной, слегка уменьшает амплитуду колебаний лопасти, вызванных циклическим шагом, и значительно уменьшает их запаздывание по фазе. Например, если $\nu = 1,15$ и $\gamma = 8$, то амплитуда уменьшается всего на 5%, а запаздывание по фазе составляет 72° (вместо 90° при $\nu = 1$). Это изменение фазы создает связь между поперечным и продольным наклонами ПКЛ, вызванными наклоном ППУ, который задан управлением. Что касается управления вертолетом, то эту связь можно ликвидировать, вводя сдвиг по фазе между положениями ПУ и ППУ.

Другими словами, систему управления можно сконструировать так, что продольное перемещение ручки управления вызовет только продольный наклон ПКЛ. Для режимов горизонтального полета из системы уравнений относительно коэффициентов махового движения находим коэффициенты циклического шага, требуемого для балансировки вертолета:

$$\theta_{1c} = \beta_{1s} + [\rho\beta_{1c} + (4/3)\mu\beta_0]/(1 + \mu^2/2),$$

$$\theta_{1s} = -\beta_{1c} + [\rho\beta_{1s} - (8/3)(\theta_{0.75} - 3\lambda_{\text{ПКЛ}}/4)]/(1 + 3\mu^2/2).$$

Углы β_{1c} и β_{1s} наклона ПКЛ относительно ПВ определяются условиями равновесия сил и моментов, действующих на вертолет. Вторые слагаемые написанных выражений характеризуют сдвиг по фазе, возникающий при $v > 1$. Отметим, что на сдвиг по фазе влияет скорость полета, но это влияние на коэффициенты циклического шага различно. Следовательно, устройство для компенсации связи между продольным и поперечным наклонами ПКЛ должно, в идеале, обеспечивать изменение фазы со скоростью полета (приблизительно от 5% на режиме висения до 15% на режиме максимальной скорости), причем это изменение должно быть различным для коэффициентов циклического шага. Однако влияние скорости полета характеризуется слагаемыми порядка μ^2 . Поэтому можно выбрать в системе управления одно значение фазы, которое будет удовлетворительным практически для всего диапазона скоростей вертолета.

Вертолетом управляют, создавая моменты относительно его центра масс с помощью несущего винта. У шарнирного винта моменты с лопастей на втулку не передаются, так что моменты для управления вертолетом можно создать только наклоном вектора силы тяги. При наличии пружин в шарнирах наклон ПКЛ также создает момент на втулке. Действительно, момент на втулке, обусловленный взмахом одной лопасти, во вращающейся системе координат описывается выражением

$$M = K_{\beta}(\beta - \beta_{\text{констр}}) = (v^2 - 1)I_n\Omega^2(\beta - \beta_{\text{констр}}).$$

Моменты тангажа и крена на втулке получаются разложением этого момента по осям невращающейся системы координат, умножением полученных выражений на число лопастей и осреднением по азимуту, т. е.

$$M_y = -\frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \cos \psi d\psi, \quad M_x = \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} M \sin \psi d\psi$$

(см. также разд. 5.3). Переходя к безразмерным величинам, найдем коэффициенты C_{M_y} и C_{M_x} моментов тангажа и крена:

$$\frac{2C_{M_y}}{\sigma a} = -\frac{v^2 - 1}{\gamma} \beta_{1c}, \quad \frac{2C_{M_x}}{\sigma a} = \frac{v^2 - 1}{\gamma} \beta_{1s}.$$

Выражения для сил, действующих на винт в плоскости вращения, можно записать в виде $H_{пв} = H_{пкл} - T\beta_{1c}$ и $Y_{пв} = Y_{пкл} - T\beta_{1s}$. Пренебрегая силами, действующими в плоскости концов лопастей, получим выражения для моментов относительно центра масс вертолета, который расположен ниже центра втулки на расстоянии h от него: $M_x = -hY_{пв} = hT\beta_{1s}$ и $M_y = hH_{пв} = -hT\beta_{1c}$. Если сложить моменты, обусловленные наклоном силы тяги и действием пружины, то выражения для коэффициентов результирующих моментов относительно центра масс вертолета, обусловленных наклоном ПКЛ, примут вид

$$\begin{pmatrix} -2C_{M_y}/(\sigma a) \\ 2C_{M_x}/(\sigma a) \end{pmatrix} = \left(\frac{v^2 - 1}{v} + h \frac{2C_T}{\sigma a} \right) \begin{pmatrix} \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{pmatrix}.$$

Способность несущего винта создавать моменты намного увеличивается при $v > 1$. У шарнирного винта, как правило, половина момента обусловлена относом шарниров, а вторая половина — наклоном силы тяги. У бесшарнирного винта момент, непосредственно возникающий на втулке, может в $2 \div 4$ раза превосходить момент, создаваемый путем наклона силы тяги. Кроме того, момент на втулке не зависит от коэффициента перегрузки вертолета.

5.14. ОТНОС ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ШАРНИРОВ

Рассмотрим теперь несущий винт, у которого ось ГШ отнесены от оси вращения на расстояние eR (рис. 5.29). Относ ГШ упрощает конструкцию винта (по сравнению с винтом без отнosa) и улучшает характеристики управления вертолетом, делая собственную частоту махового движения больше 1Ω . Обычно у шарнирных винтов $e = 0,03 \div 0,05$. Ниже влияние отнosa будет рассмотрено совместно с влиянием пружины. Радиальную координату r сечения будем по-прежнему отсчитывать от центра вращения. Примем, что движение лопасти состоит из ее поворота в ГШ как твердого тела на угол β и изгиба по форме $\eta(r)$, так что отклонение сечения от плоскости отсчета равно $z = \beta\eta$.

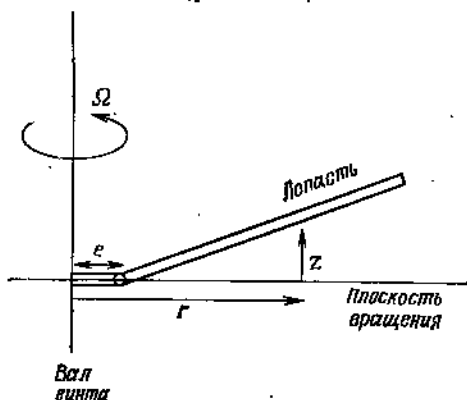


Рис. 5.29. Маховое движение лопасти при наличии отнosa ГШ.

Повороту лопасти как твердого тела вокруг оси ГШ, отнесенной от центра вращения на безразмерное расстояние e , соответствует изгиб по форме

$$\eta = \begin{cases} k(r - e) & \text{при } r > e, \\ 0 & \text{при } r \leq e, \end{cases}$$

где k — константа, определяемая нормализацией функции η . Проведем нормализацию так, чтобы эта функция была равна 1 на конце лопасти, т. е. $\eta(1) = 1$. Тогда $k = (1 - e)^{-1}$ и $\eta = (r - e)/(1 - e)$. В отсутствие отбоя эта формула сводится к равенству $\eta = r$. При такой нормализации можно интерпретировать β как угол между плоскостью диска и отрезком, соединяющим центр вращения с концом лопасти. Нормализация η к единице на конце лопасти выбрана потому, что она легко обобщается на формы изгиба по высшим тонам. Другой выбор функции η состоит в том, чтобы положить $\eta = r - e$. Тогда β действительно будет углом поворота лопасти вокруг оси ГШ. Те величины в формулах, которые имеют точный физический смысл (например, отклонение $z = \beta\eta$ сечения от плоскости диска), должны, конечно, не зависеть от выбранной нормализации формы изгиба.

Величина нормальной составляющей скорости на лопасти с произвольной формой изгиба при взмахе принимает вид

$$u_p = \lambda + \dot{z} + u_R(dz/dr) = \lambda + \eta\dot{\beta} + \eta\dot{\beta}\mu \cos \psi.$$

Других изменений в выведенных выше формулах нет. Поэтому получаем следующее выражение для коэффициента силы тяги:

$$\begin{aligned} C_T &= \sigma a \int_0^1 (1/2)(u_T^2 \theta - u_p u_T) dr = \\ &= \frac{\sigma a}{2} \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2 \right) \theta_{0,76} - \frac{1}{8} \mu^2 \theta_{кр} - \frac{1}{2} (\lambda - \mu \theta_{ls}) - \frac{1}{2} \frac{e}{1-e} \mu \beta_{ls} \right]. \end{aligned}$$

Видно, что влияние отбоя ГШ на C_T весьма мало. Аналогичные формулы можно получить для C_H и C_Y . Напомним, что выражение для мощности несущего винта было выведено без ограничений на форму изгиба. Основное влияние отбоя ГШ оказывает на маховое движение лопасти.

Рассмотрим снова равновесие моментов относительно оси ГШ. На сечение лопасти действуют следующие погонные силы: 1) инерционная сила $m\ddot{z} = m\eta\ddot{\beta}$ с плечом $r - e$; 2) центробежная сила $m\Omega^2 r$ с плечом $z = \beta\eta$; 3) аэродинамическая сила F_z с плечом $r - e$. Кроме того, как и в предыдущем разделе, будем считать, что на лопасть действует пружина с моментом $K_\beta(\beta - \beta_{констр})$. Пусть теперь $\eta = k(r - e)$, где k — произволь-

ная константа. Интегрируя по радиусу лопасти, получим следующее условие равновесия моментов относительно оси ГШ:

$$\int_{eR}^R \eta(r-e)m\ddot{\beta} dr + \int_{eR}^R \eta r m \beta \Omega^2 dr + K_{\beta}(\beta - \beta_{\text{констр}}) = \int_{eR}^R (r-e)F_z dr.$$

Умножим это равенство на $k = \eta(1)/(1-e)$ и перейдем к безразмерным величинам. Тогда

$$\int_e^1 m\eta^2 \ddot{\beta} dr + k \int_e^1 m\eta r \beta dr + (K_{\beta} k / \Omega^2)(\beta - \beta_{\text{констр}}) = \int_e^1 \eta F_z dr.$$

Полагая $I_x = \int_e^1 \eta^2 m dr$ и замечая, что

$$k \int_e^1 m\eta r dr = \int_e^1 m\eta^2 dr + ke \int_e^1 m\eta dr = I_x + \frac{e}{1-e} \eta(1) \int_e^1 m\eta dr,$$

получим уравнение махового движения в виде

$$\ddot{\beta} + v^2 \beta = \frac{K_{\beta} \eta(1)}{I_x \Omega^2 (1-e)} \beta_{\text{констр}} + \gamma \int_e^1 \eta \frac{F_z}{ac} dr.$$

Массовая характеристика лопасти по-прежнему определена равенством $\gamma = \rho ac R^4 / I_x$, но нужно иметь в виду, что теперь момент инерции I_x лопасти зависит по определению от формы изгиба.

Прежнее определение $I_x = \int_0^1 m r^2 dr$ можно было бы со-

хранить, но тогда пришлось бы ввести в левую часть уравнения махового движения нормализующий коэффициент $I_{\beta}^* =$

$= \int_e^1 m \eta^2 dr / I_x$. Такой подход предпочтителен, если рассмат-

ривается большее число степеней свободы, здесь же проще всего использовать указанное выше определение I_x через обобщенные массы машущей лопасти.

Собственная частота махового движения лопасти при наличии отбоя ГШ и пружины вычисляется по формуле

$$v^2 = 1 + \frac{e\eta(1)}{1-e} \int_e^1 m\eta dr / \int_e^1 m\eta^2 dr + \frac{K_{\beta}}{I_x \Omega^2 (1-e)}.$$

Первое слагаемое в правой части обусловлено центробежными восстанавливающими силами, второе — отбоям ГШ (а также центробежными силами), а третье — действием пружины. При

отсутствии пружины и равномерном распределении масс

$$v^2 = 1 + \frac{3e}{2(1-e)}.$$

В общем случае квадрат собственной частоты махового движения можно представить в виде $v^2 = 1 + er_{ц.м}M/I$, где M — масса лопасти, I — момент инерции относительно оси ГШ и $r_{ц.м}$ — радиальная координата центра масс относительно оси ГШ. Таким образом, относ ГШ увеличивает собственную частоту, делая ее больше 1. Однако для значений отнoса, типичных для несущих винтов, это увеличение мало (обычно $v = 1,02 \div 1,04$). Маховое движение лопастей при $v > 1$ было исследовано в предыдущем разделе. Относ ГШ также вызывает небольшие изменения моментов аэродинамических сил относительно оси ГШ вследствие изменения формы изгиба лопасти.

Рассмотрим теперь аэродинамические силы. Снова вводя аэродинамические коэффициенты по формуле

$$M_{ГШ} = \int_e^1 \eta \frac{F_x}{ac} dr = M_\theta \theta_{упр} + M_{\kappa p} \theta_{\kappa p} + M_\lambda \lambda + M_\beta \dot{\beta} + M_{\beta\beta},$$

получим

$$M_\theta = c_2/8 + (c_1/3)\mu \sin \psi + (c_0/4)\mu^2 \sin^2 \psi,$$

$$M_{\kappa p} = c_3/10 + (c_2/4)\mu \sin \psi + (c_1/6)\mu^2 \sin^2 \psi,$$

$$M_\lambda = -[c_1/6 + (c_0/4)\mu \sin \psi],$$

$$M_\beta = -[d_1/8 + (d_0/6)\mu \sin \psi],$$

$$M_{\beta\beta} = -[f_1/6 + (f_0/4)\mu \sin \psi] \mu \cos \psi,$$

где $c_n = (n+2) \int_e^1 \eta r^n dr$, $d_n = (n+3) \int_e^1 \eta^2 r^n dr$ и $f_n = (n+2) \times \int_e^1 \eta' \eta^n dr$. Если $\eta = (r-e)/(1-e)$, то для этих констант получаем следующие выражения:

$$c_0 = 1 - e,$$

$$d_0 = 1 - e,$$

$$c_1 = 1 - (e + e^2)/2,$$

$$d_1 = 1 - (2e + e^2)/3,$$

$$c_2 = 1 - (e + e^2 + e^3)/3,$$

$$f_0 = 1,$$

$$c_3 = 1 - (e + e^2 + e^3 + e^4)/4,$$

$$f_1 = 1 + e/2.$$

На самом деле константы c_n , d_n и f_n нужно вычислять, интегрируя от r_0 до B , так как неоперенная часть лопасти и особенно концевые потери оказывают большее влияние, чем относ ГШ. Коэффициенты махового движения можно теперь найти

из уравнений

$$\beta_0 = \frac{\gamma}{v^2} \left\{ \frac{1}{8} (c_2 + c_0 \mu^2) \theta_{0,80} + \frac{1}{10} \left[c_3 - c_2 + \left(\frac{5}{6} c_1 - c_0 \right) \mu^2 \right] \theta_{кр} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} c_1 \lambda_{ппу} + \frac{1}{12} (d_0 - f_1) \mu \beta_{1c} \right\} + \frac{K_\beta \beta_{констр}}{v^2 I_x \Omega^2 (1 - e)}, \\ (c_2 + \frac{1}{2} c_0 \mu^2) \theta_{1c} = (d_1 + \frac{1}{2} f_0 \mu^2) \beta_{1s} + \frac{v^2 - 1}{\gamma/8} \beta_{1c} + \frac{4}{3} f_1 \mu \beta_0, \\ (c_2 - \frac{1}{2} c_0 \mu^2) \theta_{1s} = - (d_1 - \frac{1}{2} f_0 \mu^2) \beta_{1c} + \frac{v^2 - 1}{\gamma/8} \beta_{1s} - \\ - \frac{8}{3} \mu \left[c_1 \theta_{0,75} + \frac{3}{4} (c_2 - c_1) \theta_{кр} - \frac{3}{4} c_0 \lambda_{ппу} \right].$$

Таким образом, относ ГШ мало изменяет константы, фигурирующие в выражениях для аэродинамических сил. Правда, нужно еще учесть коэффициент конечных потерь. Влияние относ на маховое движение состоит главным образом в том, что возникает связь между продольным и поперечным управлением, так как $v > 1$. Для режима висения сдвиг по фазе между циклическим шагом и вызванным им маховым движением вычисляется по формуле

$$\Delta\psi = - \arctg [8(v^2 - 1)/\gamma] \approx - 12e/\gamma.$$

Отсюда видно, что этот сдвиг мал.

Наконец, рассмотрим моменты на втулке несущего винта с относом ГШ. Моменты на втулке ($r = 0$) создают следующие погонные силы: 1) инерционные силы $m\eta\ddot{\beta}$ с плечом r ; 2) центробежные силы $m\Omega^2 r$ с плечом $\eta\beta$; 3) аэродинамические силы F_z с плечом r . Таким образом, силы, действующие в плоскости взмаха на одну лопасть, создают момент

$$M = - (\ddot{\beta} + \beta) \int_e^1 m\eta r dr + \int_e^1 F_z r dr.$$

Подставляя сюда выражение для $\ddot{\beta}$ из уравнения махового движения, получим

$$M = - \left[\frac{K_\beta}{I_x \Omega^2 (1 - e)} \beta_{констр} + \frac{1}{I_x} \int_e^1 \eta F_z dz + \right. \\ \left. + (1 - v^2) \beta \right] \int_e^1 m\eta r dr + \int_e^1 F_z r dr.$$

Член, содержащий конструктивный угол конусности, постоянен и потому не дает слагаемых момента крена или тангажа на

втулке. Полагая $r = (1 - e)\eta + e$, заметим, что

$$\begin{aligned}
 - \int_e^1 \eta F_z dr \int_e^1 m \eta r dr + \int_e^1 m \eta^2 dr \int_e^1 F_z r dr = \\
 = e \left[- \int_e^1 F_z \eta dr \int_e^1 m \eta dr + \int_e^1 m \eta^2 dr \int_e^1 F_z dr \right].
 \end{aligned}$$

Множитель в скобках равен нулю, если масса лопасти распределена равномерно, а подъемная сила распределена пропорционально форме изгиба, т. е. если $F_z \sim (r - e)$. В общем случае множитель не равен нулю, но является величиной второго порядка малости, так что им можно пренебречь. Тогда формула для момента на втулке сводится к

$$M = I_{\text{л}}(v^2 - 1)\beta.$$

Отсюда найдем коэффициенты моментов крена и тангажа всего винта:

$$\left(\begin{array}{c} -2C_{M_y}/(\sigma a) \\ 2C_{M_x}/(\sigma a) \end{array} \right) = \frac{v^2 - 1}{v} \left(\begin{array}{c} \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{array} \right).$$

Эти выражения — точно такие же, как в случае, когда имеются только пружины в шарнирах, а отброса нет. Более общие выражения будут выведены в гл. 9. Относ ГШ существенно сказывается на величине моментов на втулке, хотя все прочие поправки к основным формулам незначительны. У вертолетов с шарнирным винтом приблизительно половина момента относительно центра масс обусловлена наклоном силы тяги, а другая половина — моментом, возникающим непосредственно на втулке.

5.15. БЕСШАРНИРНЫЙ ВИНТ

У бесшарнирного винта, не имеющего ГШ и ВШ, лопасти консольно прикрепляются к втулке. Преимущество такого винта заключается в простоте конструкции его втулки и в лучших характеристиках управляемости. Основной тон изгибных колебаний лопасти бесшарнирного винта относительно плоскости диска весьма сходен с маховым движением абсолютно жесткой лопасти шарнирного винта, так как восстанавливающее действие центробежных сил преобладает над действием упругости конструкции. Собственная частота основного тона изгибных колебаний в плоскости взмаха незначительно превышает 1, хотя она все же значительно больше собственной частоты махового движения лопасти шарнирного винта с отбросом ГШ. У бесшарнирного винта v обычно составляет $1,10 \div 1,15$.

В предыдущем разделе было выведено уравнение махового движения лопасти при произвольной форме изгибных колеба-

ний:

$$\ddot{\beta} + v^2\beta = \gamma \int_0^1 \eta \frac{F_z}{ac} dr.$$

Если выбрать подходящую величину собственной частоты v , то это уравнение можно использовать и для лопасти бесшарнирного винта. Мы видели, что частота играет основную роль, а форма изгиба — второстепенную. Поэтому лопасть бесшарнирного винта можно схематизировать как шарнирно подвешенную лопасть, используя как можно более точную величину собственной частоты и какую-нибудь простую аппроксимацию формы изгибных колебаний. Такой способ должен дать приемлемые результаты, так как достаточно определить правильно лишь интегралы от формы изгиба. Собственную частоту махового движения можно либо задать произвольно, либо получить в результате исследования свободных колебаний лопасти. Приемлема аппроксимация формы изгибных колебаний, соответствующая повороту лопасти как твердого тела вокруг оси отнесенного ГШ, т. е. $\eta = (r - e)/(1 - e)$. Величину отнoса e можно выбрать, полагая наклон этой формы равным наклону действительной формы изгиба в каком-либо сечении, например при $r = 0,75R$. Тогда $e = 1 - 1/\eta'$ (0,75). Типичные значения такого эффективного отнoса для бесшарнирных винтов близки к 0,10.

К указанной приближенной схеме следует относиться с осторожностью, т. е. не слишком полагаться на результаты, пока нет уверенности в том, что исходные предположения выполняются. Но в общем эта схема позволяет правильно определить основные особенности работы бесшарнирного несущего винта, которые зависят главным образом от собственной частоты v махового движения. Если учитывать другие степени свободы лопасти (качание или крутильные колебания), то часто приходится использовать более близкие к реальности схемы движения лопасти, в которых фигурируют точные формы колебаний.

Расчетным схемам бесшарнирного несущего винта посвящены работы [A.12, W.104, P.32, Y.16, W.10, W.11, B.127, H.138] (см. также гл. 9 и литературу по аэроупругости вертолета и качанию лопасти в связи с ее маховым движением).

5.16. КАРДАНЫЙ ВИНТ И ВИНТ ТИПА КАЧАЛКИ

Карданный несущий винт имеет три или большее число лопастей, которые прикреплены к втулке без ГШ и ОШ (т. е. консольно), а втулка соединена с валом винта посредством универсального шарнира (кардана). Благодаря кардану втул-

ка имеет относительно вала две степени свободы, выражающиеся в углах продольного и поперечного наклонов β_{1c} и β_{1s} , которые соответствуют углам наклона ПКЛ при маховом движении лопастей шарнирного винта по первым гармоникам. Движение втулки относительно вала может быть стеснено пружинами. Нулевая гармоника махового движения не вызывает наклона втулки, так как моментов крена и тангажа на винте не возникает. В этом отношении карданный винт сходен с бесшарнирным. Высшие гармоники махового движения (с коэффициентами β_{2c} , β_{2s} и т. д.) также не изменяют наклона втулки.

Момент $M^{(m)}$ в плоскости взмаха, создаваемый m -й лопастью карданного винта, удовлетворяет уравнению (см. разд. 5.14)

$$\frac{M^{(m)}}{I_d \Omega^2} = -(\ddot{\beta} + \beta) + \gamma \int_0^1 r \frac{F_z}{ac} dr.$$

Здесь полагается $\eta = r$, что соответствует движению винта на кардане как твердого тела. Продольный и поперечный наклоны втулки определяются из условий равновесия моментов, действующих на винт в целом. Просуммируем моменты тангажа всех N лопастей, прибавим момент, создаваемый пружиной, и осредним сумму по азимуту. Тогда

$$\frac{M_{\text{пруж}}}{I_d \Omega^2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m=1}^N \frac{M^{(m)}}{I_d \Omega^2} \cos \psi_m \right] d\psi = 0,$$

где $\psi_m = \psi + m(2\pi/N)$ — азимут m -й лопасти. На установившемся режиме, когда периодические движения всех лопастей одинаковы, суммирование по N лопастям с последующим осреднением по ψ эквивалентно умножению на N среднего значения для одной лопасти, т. е.

$$M_{\text{пруж}}/(I_d \Omega^2) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [N \cos \psi M/(I_d \Omega^2)] d\psi = 0.$$

Пружина, ограничивающая продольный наклон втулки, создает момент

$$M_{\text{пруж}} = -K_\beta \beta_{1c} = -(K_\beta/\pi) \int_0^{2\pi} \beta \cos \psi d\psi.$$

Таким образом, уравнение движения будет следующим:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [-2K_\beta \beta/(N I_d \Omega^2) + M/(I_d \Omega^2)] \cos \psi d\psi = 0.$$

Аналогично, суммируя моменты крена, получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [-2K_\beta \beta / (N I_x \Omega^2) + M / (I_x \Omega^2)] \sin \psi \, d\psi = 0.$$

Такие же уравнения получаются в результате применения операторов $(1/\pi) \int_0^{2\pi} (\dots) \cos \psi \, d\psi$ и $(1/\pi) \int_0^{2\pi} (\dots) \sin \psi \, d\psi$ к уравнению махового движения лопасти шарнирного винта, т. е. уравнения относительно углов наклона карданного винта и относительно коэффициентов β_{1c} и β_{1s} махового движения эквивалентной лопасти, описываемого уравнением

$$\ddot{\beta} + v^2 \beta = \gamma \int_0^l r \frac{F_z}{ac} \, dr,$$

совпадают. Следовательно, и решения уравнений должны совпадать. Квадрат собственной частоты махового движения в данном случае определяется выражением

$$v^2 = 1 + 2K_\beta / (N I_x \Omega^2).$$

Если пружины нет, то $v = 1$, как у шарнирного винта без отбоя ГШ. Заметим, что кардан можно снабдить пружиной, которая не вращается вместе с ним и потому не вызывает непрерывное движение с частотой 1. Кроме того, продольное и поперечное движения могут быть ограничены пружинами разной жесткости. Нулевая, вторая и высшие гармоники махового движения лопасти карданного винта здесь такие же, как у бесшарнирного винта. Поэтому решение снова можно получить, рассматривая эквивалентную лопасть и принимая собственную частоту, соответствующую консольно закрепленной лопасти.

Несущий винт с качающейся втулкой (винт типа качалки) имеет две лопасти, прикрепленные к втулке без ГШ и ОШ и образующие единую конструкцию. Втулка соединена с валом винта одним горизонтальным шарниром. Маховое движение лопастей напоминает движение качалки. Его преимущество состоит в очень простой конструкции втулки. Как у карданного винта, нулевая гармоника махового движения лопастей не создает момента относительно оси шарнира, а лопасти закреплены по существу консольно. Чтобы определить установившееся движение винта с качающейся втулкой в общем случае, нужно рассмотреть условие равновесия моментов, действующих на винт в целом. Так как обе лопасти должны совершать одно и то же периодическое движение, момент $M^{(m)}$, создаваемый относительно оси шарнира m -й лопастью ($m = 1, 2$), является периодической функцией угла ψ_m , т. е.

$$M^{(m)} = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (M_{nc} \cos n\psi_m + M_{ns} \sin n\psi_m),$$

где $\psi_1 = \psi + \pi$, $\psi_2 = \psi$. Это выражение можно записать в виде

$$M^{(m)} = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{mn} (M_{nc} \cos n\psi + M_{ns} \sin n\psi).$$

Тогда суммарный момент относительно оси шарнира равен

$$\begin{aligned} M &= M^{(2)} - M^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] (M_{nc} \cos n\psi + M_{ns} \sin n\psi) = \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} [M_{2k+1,c} \cos (2k+1)\psi + M_{2k+1,s} \sin (2k+1)\psi]. \end{aligned}$$

Таким образом, все четные (включая нулевые) гармоники моментов относительно оси шарнира, создаваемых обеими лопастями, взаимно уничтожаются. Только нечетные гармоники, в частности первые (определяющие углы наклона ПКЛ), дают момент на втулке и, следовательно, вызывают маховое движение лопастей.

Нечетные гармоники махового движения винта с качающейся втулкой обусловлены моментами относительно оси шарнира, представляющими собой разность моментов, создаваемых лопастями (эта разность равна удвоенному моменту одной лопасти), и моментом, создаваемым пружиной, если она есть. Поэтому уравнение махового движения приобретает вид

$$-\frac{K_{\beta}\beta}{I_n\Omega^2} + 2 \left[-(\ddot{\beta} + \beta) + \gamma \int_0^l r \frac{F_z}{ac} dr \right] = 0,$$

или

$$\ddot{\beta} + \nu^2\beta = \gamma \int_0^l r \frac{F_z}{ac} dr,$$

причем квадрат собственной частоты махового движения определяется выражением

$$\nu^2 = 1 + K_{\beta}/(2I_n\Omega^2).$$

Обычно винты типа качалки не имеют пружины на втулке, так что $\nu = 1$. Следовательно, изменение углов наклона ПКЛ у винта с качающейся втулкой происходит так же, как у шарнирного винта без отнoса ГШ.

Подведем итог сказанному о карданном винте и винте с качающейся втулкой. С точки зрения гармоник махового движения, которые создают результирующий момент на втулке (включая те, которые вызывают наклон ПКЛ), винт работает как шарнирный несущий винт без отнoса ГШ ($\eta = r$, $\nu = 1$). Если же рассматривать те гармоники (включая нулевую), которым соответствуют моменты, замыкающиеся на втулке, то винт работает как бесшарнирный несущий винт с очень жесткими на изгиб лопа-

стями. По этим соображениям результаты, полученные для шарнирного винта, пригодны также для карданного винта и винта с качающейся втулкой.

5.17. КОМПЕНСАЦИЯ ВЗМАХА

Компенсатором (регулятором) взмаха называют устройство, которое осуществляет кинематическую обратную связь между углами установки и взмаха, описываемую формулой $\Delta\theta = -K_p\beta$. Если $K_p > 0$, то при взмахе лопасти уменьшается ее

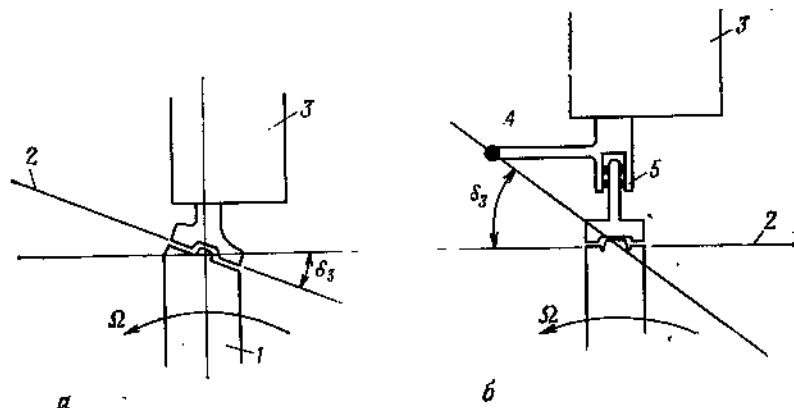


Рис. 5.30. Регулирование взмаха лопасти.

а — посредством конструкции ГШ; б — посредством системы управления. 1 — втулка; 2 — ось ГШ; 3 — лопасть; 4 — поводок лопасти; 5 — подшипник ОШ.

угол установки, а значит, и углы атаки сечений. Происходящее в результате уменьшение подъемной силы приводит к изменению момента относительно оси ГШ, которое противодействует первоначальному маховому движению. Таким образом, при $K_p > 0$ компенсация взмаха создает «аэродинамическую пружину», действующую на машущую лопасть. Компенсацию можно обеспечить чисто механическими средствами. Простейший способ — повернуть ось ГШ, чтобы она проходила не по перпендикуляру к продольной оси лопасти, а составляла с ним угол δ_3 (рис. 5.30, а). При этом поворот лопасти вокруг оси ГШ на угол β вызывает изменение угла установки на величину $-\beta \operatorname{tg} \delta_3$, т. е. коэффициент усиления обратной связи при такой конструкции втулки определяется соотношением $K_p = \operatorname{tg} \delta_3$. Обычно компенсаций взмаха характеризуют величиной угла δ_3 . Заметим, что при $\delta_3 > 0$ обратная связь отрицательна, т. е. угол установки уменьшается, когда угол взмаха возрастает. Эту связь можно также реализовать через систему управления (рис. 5.30, б). Если подшипник ОШ расположен дальше от оси вращения, чем

ГШ (как обычно и бывает), а геометрические оси ГШ и тяги лопасти не пересекаются, то угол установки лопасти будет изменяться при изменении угла установки ¹⁾. При фиксированном положении тарелки автомата перекоса маховое движение можно рассматривать как колебания вокруг оси воображаемого шарнира, соединяющей конец поводка лопасти с центром реального ГШ. Поэтому углом δ_3 будет угол между геометрическими осями воображаемого и реального шарниров. Компенсация взмаха возникает также вследствие наличия угла отставания ζ_0 лопастей, обусловленного аэродинамическим крутящим моментом несущего винта. Если ГШ расположен дальше от оси вращения, чем ВШ, то отставание эквивалентно повороту осей ГШ, т. е. $\delta_3 = \zeta_0$. Аналогичные связи возникают и у бесшарнирных винтов. Если у шарнирного винта связь углов установки и взмаха, а также другие связи определены конструкцией втулки, комля лопасти и системы управления, то у бесшарнирного винта нужно еще учитывать жесткостные и инерционные характеристики лопасти. Часто величина угла δ_3 зависит от угла установки лопасти, так как расположение элементов цепи управления изменяется с изменением общего шага. Поэтому в общем случае нужно рассчитывать коэффициент $K_p = -\partial\theta/\partial\beta$ при заданных величинах общего шага, угла конусности и угла отставания лопастей.

Выше при выводе уравнения махового движения лопасти предполагалось, что угол установки определяется только системой управления, т. е. $\theta = \theta_{упр}$. Однако полученные формулы связывают коэффициенты махового движения с действительным углом установки лопасти. Эти формулы остаются в силе и при компенсации взмаха, но угол установки корневого сечения уже не будет совпадать с углом установки, определяемым управлением. Если под θ по-прежнему подразумевать угол $\theta_{упр}$, то угол установки корневого сечения будет равным теперь $\theta - K_p\beta$. Таким образом, компенсация взмаха изменяет относительное расположение плоскости управления и плоскости постоянных углов установки, но не меняет положения плоскости постоянных углов установки относительно плоскости концов лопастей. Так как компенсация воздействует на маховое движение относительно плоскости вращения, действительный угол установки комлевого сечения определяется соотношением $\theta_{пв} = \theta_{упр} - K_p\beta_{пв}$. В формулах для коэффициентов махового движения в разд. 5.5 $\theta_{пв}$ выражается через $\beta_{пв}$. Возможны два способа исследования влияния, которое оказывает компенсация взмаха. По одному из них можно подставить величину $\theta_{пв} - K_p\beta_{пв}$ вместо $\theta_{пв}$ в дифференциальное уравнение махового движения; решение этого уравнения позволит определить требуемый для управления угол $\theta_{пв}$

¹⁾ Параметр K_p в отечественной литературе называют коэффициентом компенсатора взмаха. — *Прим. перев.*

и укажет другие следствия компенсации взмаха. По другому способу можно непосредственно использовать полученные выше формулы и найти требуемый для управления угол установки в виде $\theta_{пу} = \theta_{пв} + K_p \beta_{пв}$.

Рассмотрим выведенное выше дифференциальное уравнение махового движения лопасти с собственной частотой ν . Заменяя в нем $\theta_{упр}$ величиной $\theta_{упр} - K_p \beta$, получим

$$\ddot{\beta} + \nu^2 \beta = \gamma [M_\theta (\theta_{упр} - K_p \beta) + M_{хр} \theta_{хр} + M_\lambda \lambda + M_\beta \dot{\beta} + M_p \beta].$$

Для режима висения это уравнение сведется к

$$\ddot{\beta} + \frac{\gamma}{8} \dot{\beta} + \left(\nu^2 + \frac{\gamma}{8} K_p \right) \beta = \frac{\gamma}{8} \theta_{упр} + \frac{\gamma}{10} \theta_{хр} - \frac{\gamma}{6} \lambda$$

(при расчете аэродинамических коэффициентов положено $\eta = r$). Таким образом, регулирование взмаха создает аэродинамический восстанавливающий момент, который увеличивает эффективную собственную частоту махового движения:

$$\nu_{эф}^2 = \nu^2 + \frac{\gamma}{8} K_p.$$

Хотя маховое движение, возбуждаемое циклическим шагом, имеет эффективную собственную частоту $\nu_{эф}$, компенсация взмаха не создает на втулке момента, который по-прежнему определяется частотой $\sqrt{\nu^2 - 1}$. Для коэффициентов циклического шага получаем формулы

$$\begin{aligned} \theta_{1c} &= \beta_{1s} + \left[\frac{16(\nu^2 - 1)}{\gamma(2 + \mu^2)} + K_p \right] \beta_{1c} + \frac{8\mu\beta_0}{3(2 + \mu^2)}, \\ \theta_{1s} &= -\beta_{1c} + \left[\frac{16(\nu^2 - 1)}{\gamma(2 + 3\mu^2)} + K_p \right] \beta_{1s} - \\ &\quad \frac{16\mu \left(\theta_{0,75} - \frac{3}{4} \lambda_{ПКЛ} - K_p \beta_0 \right)}{3(2 + 3\mu^2)}. \end{aligned}$$

Для режима висения они сводятся к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \theta_{1c} &= \beta_{1s} + \left[\frac{8}{\gamma}(\nu^2 - 1) + K_p \right] \beta_{1c}, \\ \theta_{1s} &= -\beta_{1c} + \left[\frac{8}{\gamma}(\nu^2 - 1) + K_p \right] \beta_{1s}. \end{aligned}$$

Амплитуда и фаза первой гармоники махового движения, возбуждаемого циклическим шагом, описываются выражениями

$$\begin{aligned} \bar{\beta}/\bar{\theta} &= \left\{ 1 + \left[\frac{8}{\gamma}(\nu^2 - 1) + K_p \right]^2 \right\}^{-1/2} = \left\{ 1 + \left[\frac{8}{\gamma}(\nu_{эф}^2 - 1) \right]^2 \right\}^{-1/2}, \\ \Delta\phi &= 90^\circ - \arctg \left[\frac{8}{\gamma}(\nu^2 - 1) + K_p \right] = 90^\circ - \arctg \left[\frac{8}{\gamma}(\nu_{эф}^2 - 1) \right]. \end{aligned}$$

Для шарнирного винта без отбоя ГШ ($\nu = 1$) получаем

$$\beta/\bar{\theta} = (1 + K_p^2)^{-1/2}, \quad \Delta\psi = 90^\circ - \arctg K_p = 90^\circ - \delta_3.$$

Таким образом, требуемый сдвиг по фазе автомата перекося как раз равен углу δ_3 .

Выясним теперь влияние компенсатора взмаха на ориентацию плоскости управления относительно плоскости постоянных углов установки. Из соотношения $\theta_{\text{ПУ}} = \theta_{\text{ПВ}} + K_p \beta_{\text{ПВ}}$ находим требуемые общий и циклический шаги:

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_{1c} \\ \theta_{1s} \end{pmatrix}_{\text{ПУ}} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_{1c} \\ \theta_{1s} \end{pmatrix}_{\text{ПВ}} + K_p \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{pmatrix}_{\text{ПВ}}.$$

Итак, при заданной силе тяги и $K_p > 0$ общий шаг, определяемый управлением, должен быть увеличен, чтобы противодействовать влиянию угла конусности через компенсатор взмаха, т. е. чтобы величина общего шага в комле лопасти действительно была равна $(\theta_0)_{\text{ПВ}}$. Аналогичным образом из этих соотношений определяется требуемый циклический шаг. Особым является случай винта без циклического управления углом установки, примером которого является рулевой винт. В этом случае режим полета определяет ориентацию ПУ, а не ПКЛ. Если циклический шаг относительно ПУ отсутствует, то из соотношения $\theta_{\text{ПУ}} = \theta_{\text{ПВ}} + K_p \beta_{\text{ПВ}}$ получаем

$$(\theta_{1c})_{\text{ПВ}} + K_p (\beta_{1c})_{\text{ПВ}} = 0, \quad (\theta_{1s})_{\text{ПВ}} + K_p (\beta_{1s})_{\text{ПВ}} = 0.$$

Ориентация ПКЛ относительно ППУ определяется условием равновесия моментов относительно осей ГШ, так что

$$(\beta_{1c})_{\text{ППУ}} = (\beta_{1c})_{\text{ПВ}} + (\theta_{1s})_{\text{ПВ}}, \quad (\beta_{1s})_{\text{ППУ}} = (\beta_{1s})_{\text{ПВ}} - (\theta_{1c})_{\text{ПВ}}.$$

Исключая из этих соотношений $(\theta_{1c})_{\text{ПВ}}$ и $(\theta_{1s})_{\text{ПВ}}$, будем иметь

$$(\beta_{1s})_{\text{ПВ}} = [(\beta_{1s})_{\text{ППУ}} - K_p (\beta_{1c})_{\text{ППУ}}] / (1 + K_p^2),$$

$$(\beta_{1c})_{\text{ПВ}} = [(\beta_{1c})_{\text{ППУ}} + K_p (\beta_{1s})_{\text{ППУ}}] / (1 + K_p^2),$$

или

$$|\beta|_{\text{ПВ}} = |\beta|_{\text{ППУ}} / \sqrt{1 + K_p^2}.$$

Таким образом, компенсатор взмаха позволяет уменьшить амплитуду махового движения относительно вала винта. Заметим, что при отрицательной величине K_p компенсация взмаха столь же эффективна, что и при положительной, так как влияние компенсатора заключается в удалении собственной частоты махового движения от резонансной. Знак обратной связи влияет на фазу вынужденных колебаний. При положительной обратной связи с большими значениями коэффициента усиления ком-

пенсатор взмаха оказывает неблагоприятное влияние на устойчивость махового движения. В случае рулевых винтов для уменьшения амплитуды махового движения относительно вала на переходных и стационарных режимах обычно принимают $\delta_3 = 45^\circ (K_P = 1)$.

5.18. РАВНОВЕСИЕ СИЛ И МОМЕНТОВ И БАЛАНС МОЩНОСТЕЙ НА ВЕРТОЛЕТЕ

Режим работы несущего винта определяется равновесием сил и моментов, действующих на вертолет. В этом разделе будут рассмотрены условия равновесия в продольной и поперечной плоскостях при установившемся полете. Условие равновесия сил в продольной плоскости будет получено для больших углов и

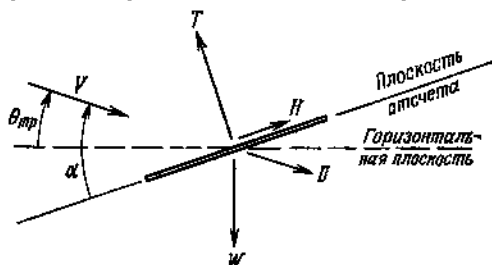


Рис. 5.31. Силы, действующие на вертолет в продольной плоскости.

затем использовано для расчета требуемой мощности. Численно решая систему шести совместных уравнений, можно найти условия равновесия всех сил и моментов, действующих на вертолет. Однако, чтобы установить основные закономерности, достаточно рассмотреть равновесие в продольной и поперечной плоскостях по отдельности.

Силы, действующие на вертолет в вертикальной продольной плоскости, показаны на рис. 5.31 (см. также разд. 5.4). Вертолет имеет скорость V , а траектория его полета наклонена к горизонту на угол $\theta_{тр}$, так что скорость набора высоты или снижения V_v равна $V \sin \theta_{тр}$. Несущий винт создает силу тяги T и продольную силу H , направления которых заданы выбором плоскости отсчета. Последняя составляет угол α со скоростью V набегающего потока (угол атаки α положителен, когда винт наклонен вперед). На вертолет действуют вес W (направлен по вертикали) и сила аэродинамического сопротивления D (направлена по скорости V). Вспомогательные пропульсивные или несущие устройства можно принять в расчет, включив создаваемые ими силы в W и D . Условия равновесия вертикальных и горизонтальных составляющих дают

$$W = T \cos(\alpha - \theta_{тр}) - D \sin \theta_{тр} + H \sin(\alpha - \theta_{тр}),$$

$$D \cos \theta_{тр} + H \cos(\alpha - \theta_{тр}) = T \sin(\alpha - \theta_{тр}).$$

Если углы малы, то получаем отсюда, что $W = T$ и $D + H = T(\alpha - \theta_{\text{TP}})$, т. е. сила тяги равна весу вертолета, а угол атаки определяется соотношением

$$\alpha = \theta_{\text{TP}} + D/W + H/T = \lambda_c/\mu + D/W + C_H/C_T,$$

где $\lambda_c = V_c/(\Omega R) \approx \mu\theta_{\text{TP}}$. Так как $H = H_{\text{ПКЛ}} - \beta_{1c}T$, угол атаки можно еще записать в виде

$$\alpha = \lambda_c/\mu + D/W + (C_H)_{\text{ПКЛ}}/C_T - \beta_{1c},$$

а коэффициент протекания равен

$$\lambda = \lambda_i + \mu\alpha \approx \lambda_i + \lambda_c + \mu D/W + \mu C_H/C_T.$$

Те же самые формулы были получены в разд. 5.4. Если пренебречь слагаемым $H_{\text{ПКЛ}}$, то наклон плоскости концов лопастей будет определяться только сопротивлением и скороподъемностью вертолета: $\alpha_{\text{ПКЛ}} = \theta_{\text{TP}} + D/W$.

Если углы не малы, то после исключения D из условий равновесия получим следующее уравнение вертикальных составляющих:

$$W = \frac{T \cos \alpha}{\cos \theta_{\text{TP}}} \left(1 + \frac{H}{T} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Тогда уравнение горизонтальных составляющих можно записать в виде

$$\frac{D}{T \cos \alpha} + \frac{H}{T} (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta_{\text{TP}}) = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta_{\text{TP}}.$$

или

$$\frac{D}{W \cos \theta_{\text{TP}}} \left(1 + \frac{H}{T} \operatorname{tg} \alpha \right) + \frac{H}{T} (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta_{\text{TP}}) = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta_{\text{TP}}.$$

Решая это уравнение относительно $\operatorname{tg} \alpha$, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \left[\operatorname{tg} \theta_{\text{TP}} + \frac{D}{W \cos \theta_{\text{TP}}} + \frac{H}{T} \right] \left[1 - \frac{H}{T} \left(\operatorname{tg} \theta_{\text{TP}} + \frac{D}{W \cos \theta_{\text{TP}}} \right) \right].$$

Отсюда можно найти коэффициент протекания $\lambda = \mu \operatorname{tg} \alpha + \lambda_i$. Заметим, что формулу для α можно записать в виде

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \theta_{\text{TP}} + \frac{D}{W \cos \theta_{\text{TP}}} \right) + \operatorname{arctg} (H/T) = \alpha|_{H=0} + \operatorname{arctg} (H/T).$$

При малых углах эта формула сводится к полученной выше. В общем наклон несущего винта вперед должен быть таким, чтобы создавалась пропульсивная сила, преодолевающая сопротивление фюзеляжа и самого винта, а также обеспечивался набор высоты.

Условие равновесия сил в поперечной плоскости позволяет найти угол крена φ плоскости отсчета относительно горизонтальной плоскости (рис. 5.32). Направления силы тяги T и поперечной силы Y определены выбором плоскости отсчета. На вертолет

действуют также вес W и поперечная сила Y_F (последнюю может, например, создать рулевой винт). Условие равновесия горизонтальных и вертикальных составляющих дает

$$Y_F + Y \cos \varphi + T \sin \varphi = 0, \quad W = T \cos \varphi - Y \sin \varphi,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = - (Y_F/W + Y/T) / [1 - (Y_F/W)(Y/T)],$$

или $\varphi = -\operatorname{arctg}(Y_F/W) - \operatorname{arctg}(Y/T)$. Диск несущего винта должен быть наклонен влево, чтобы составляющая сила тяги урав-

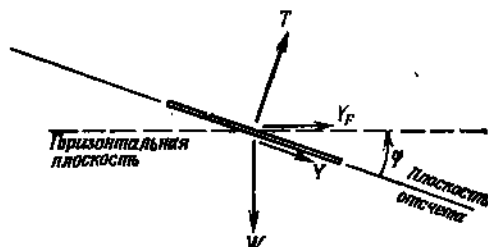


Рис. 5.32. Силы, действующие на вертолет в поперечной плоскости (вид сзади).

новешивала поперечные силы фюзеляжи и винта. При малых углах имеем $\varphi = -Y_F/W - C_Y/C_T$, или (вследствие того, что $Y = Y_{\text{ПКЛ}} - \beta_{1s}T$)

$$\varphi = \beta_{1s} - Y_F/W - (C_Y)_{\text{ПКЛ}}/C_T.$$

Рассмотрим теперь условие равновесия моментов тангажа, действующих на вертолет (рис. 5.33). Это условие позволяет

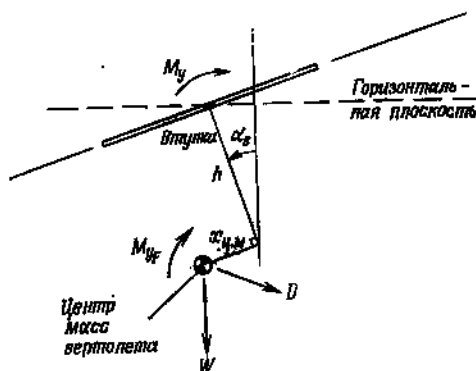


Рис. 5.33. Моменты, действующие на вертолет в продольной плоскости.

определить угол α_b между валом несущего винта и вертикалью. Моменты будем искать относительно центра втулки винта, так что силы, действующие на винт, в формулы не войдут, и выбор плоскости отсчета не имеет значения. Однако создаваемый винтом момент M_y относительно втулки нужно учитывать. Относительно центра масс вертолета действуют моменты веса W , со-

противления D и аэродинамический момент тангажа M_{yF} . Положение центра масс вертолета фиксировано в системе координат, связанной с плоскостью вращения: он находится под ПВ на расстоянии h от нее и впереди вала винта на расстоянии $x_{ц.м}$ от него. В предположении малости углов условие равновесия моментов относительно центра втулки имеет вид

$$M_y + M_{yF} + W(h\alpha_a - x_{ц.м}) - hD = 0.$$

Отсюда находим

$$\alpha_a = \alpha_{ПВ} - \theta_{TP} = \frac{x_{ц.м}}{h} + \frac{D}{W} + \frac{1}{Wh}(M_y + M_{yF}).$$

Заметим, что угол наклона вала относительно вертикали (равный углу наклона ПВ относительно горизонтальной плоскости) можно выразить также через угол наклона ПВ по отношению к скорости полета и угол наклона траектории полета (т. е. угол между скоростью полета и горизонтальной плоскостью). Момент на втулке, создаваемый несущим винтом, выразим теперь через наклон ПКЛ относительно ПВ:

$$\frac{M_y}{Wh} = \frac{C_{My}}{hC_T} = - \frac{\sigma a (v^2 - 1)}{2C_T h \gamma} (\beta_{lc})_{ПВ}.$$

Далее, вспомним, что по условию равновесия сил в продольной плоскости справедливо соотношение

$$\alpha_{ПВ} - \theta_{TP} - D/W = H_{ПВ}/T = H_{ПКЛ}/T - (\beta_{lc})_{ПВ}.$$

Исключая из условий равновесия сил и моментов трехчлен $\alpha_{ПВ} - \theta_{TP} - D/W$, получим

$$(\beta_{lc})_{ПВ} = \frac{(C_H)_{ПКЛ}/C_T + M_{yF}/(hW) - x_{ц.м}/h}{1 + \frac{\sigma a (v^2 - 1)}{2C_T h \gamma}}.$$

Отсюда находим угол наклона вала:

$$\alpha_a = \frac{x_{ц.м}/h - M_{yF}/(hW) + \frac{\sigma a (v^2 - 1)}{2C_T h \gamma} \frac{(C_H)_{ПКЛ}}{C_T}}{1 + \frac{\sigma a (v^2 - 1)}{2C_T h \gamma}} + \frac{D}{W}.$$

Таким образом, углы наклона вала и ПКЛ относительно вала определяются условием равновесия моментов, действующих на вертолет. Зная $(\beta_{lc})_{ПВ}$, по формулам коэффициентов махового движения можно найти требуемую величину коэффициента $(\theta_{lc})_{ПВ}$. Смещение центра масс вперед относительно вала тре-

бует, чтобы винт был отклонен назад, а фюзеляж наклонен вперед, так что центр масс остается под втулкой, а сила тяги сохраняет вертикальное направление. Видим также, что при $v > 1$ требуемый наклон винта для заданного отбоя центра масс значительно уменьшается, а значит, уменьшается и амплитуда циклического шага.

Аналогично условие равновесия моментов крена позволяет найти угол крена φ_v вала (рис. 5.34). На вертолет действует момент M_x , создаваемый на втулке несущим винтом, моменты веса W и поперечной силы Y_F , а также аэродинамический момент

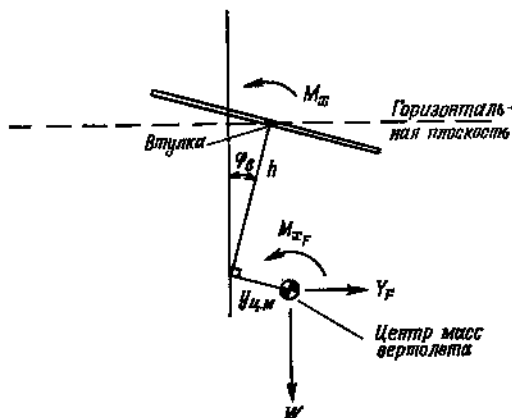


Рис. 5.34. Моменты, действующие на вертолет в поперечной плоскости.

крена M_{x_F} . Центр масс вертолета смещен вправо от вала винта на расстояние $y_{ц.м.}$. Условие равновесия моментов относительно центра втулки при малых углах имеет вид

$$M_x + M_{x_F} + W(h\varphi_v - y_{ц.м.}) + Y_F h = 0,$$

или

$$\varphi_v = \varphi_{ПВ} = \frac{y_{ц.м.}}{h} - \frac{Y_F}{W} - \frac{M_{x_F}}{Wh} - \frac{M_x}{Wh}.$$

Момент на втулке, создаваемый несущим винтом, запишем в виде

$$\frac{M_x}{Wh} = \frac{C_{M_x}}{hC_T} = \frac{\sigma\alpha(v^2 - 1)}{2C_T h v} (\beta_{1s})_{ПВ},$$

а из условия равновесия сил в поперечной плоскости имеем

$$\varphi_{ПВ} + \frac{Y_F}{W} = -\frac{Y_{ПВ}}{T} = -\frac{Y_{ПКЛ}}{T} + (\beta_{1s})_{ПВ}.$$

Из этих уравнений находим

$$(\beta_{1s})_{ПВ} = \frac{y_{п. м}/h - M_{x_F}/(Wh) + (C_T)_{ПКЛ}/C_T}{1 + \frac{\sigma a (v^2 - 1)}{2C_T h \gamma}},$$

$$\varphi_{в} = \frac{\frac{y_{п. м}}{h} - \frac{M_{x_F}}{Wh} - \frac{\sigma a (v^2 - 1)}{2C_T h \gamma} \frac{(C_T)_{ПКЛ}}{C_T}}{1 + \frac{\sigma a (v^2 - 1)}{2C_T h \gamma}} - \frac{Y_F}{W}.$$

Зная угол $(\beta_{1s})_{ПВ}$ наклона ПКЛ вбок, можно по формулам коэффициентов махового движения найти требуемую величину коэффициента $(\theta_{1c})_{ПВ}$ циклического шага.

Наконец, рассмотрим требуемую мощность. В разд. 5.4 было получено выражение

$$C_P = \int \lambda dC_T - \mu C_H + C_{P_0},$$

причем предположение о малости углов не использовалось. Чтобы детально записать соотношение баланса мощностей, требуется выражение для коэффициента протекания $\lambda = \lambda_i + \mu \operatorname{tg} \alpha$. Используем полученные выше условия равновесия сил в продольной плоскости:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \theta_{TP} + \frac{D}{T \cos \alpha} + \frac{H}{T} (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \theta_{TP}),$$

$$W \cos \theta_{TP} = T \cos \alpha \left(1 + \frac{H}{T} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Отсюда находим выражение для двучлена $\operatorname{tg} \alpha - H/T$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha - H/T &= [1 + (H/T) \operatorname{tg} \alpha] \operatorname{tg} \theta_{TP} + D/(T \cos \alpha) = \\ &= [W \cos \theta_{TP}/(T \cos \alpha)] \operatorname{tg} \theta_{TP} + D/(T \cos \alpha) = \\ &= (D + W \sin \theta_{TP})/(T \cos \alpha). \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициент мощности несущего винта определяется формулой

$$\begin{aligned} C_P &= \int \lambda_i dC_T + C_{P_0} + \mu C_T (\operatorname{tg} \alpha - H/T) = \\ &= \int \lambda_i dC_T + C_{P_0} + [TV \cos \alpha / (\rho A (\Omega R)^3)] (D + W \sin \theta_{TP}) / (T \cos \alpha) = \\ &= \int \lambda_i dC_T + C_{P_0} + DV / [\rho A (\Omega R)^3] + V_c W / [\rho A (\Omega R)^3] = \\ &= C_{P_i} + C_{P_0} + C_{P_{вп}} + C_{P_c}. \end{aligned}$$

Таким образом, без всяких предположений относительно величин углов определены затраты мощности на преодоление вредного сопротивления $P_{вп} = DV = (1/2) \rho V^3 f$ и затрачиваемая на набор высоты мощность $P_c = V_c W$.

5.19. КАЧАНИЕ ЛОПАСТИ

Кроме махового движения лопасть несущего винта совершает еще движение в плоскости диска, называемое качанием. Шарнирный винт имеет вертикальные шарниры, так что качание — это колебание лопасти как твердого тела вокруг вертикальной оси, близкой к оси винта. Качание обычно сложнее исследовать, чем маховое движение. Последнее создает в плоскости диска инерционные силы, которые связывают качание с маховым движением. Кроме того, у слабо нагруженных винтов силы, действующие на лопасть в плоскости диска, малы по

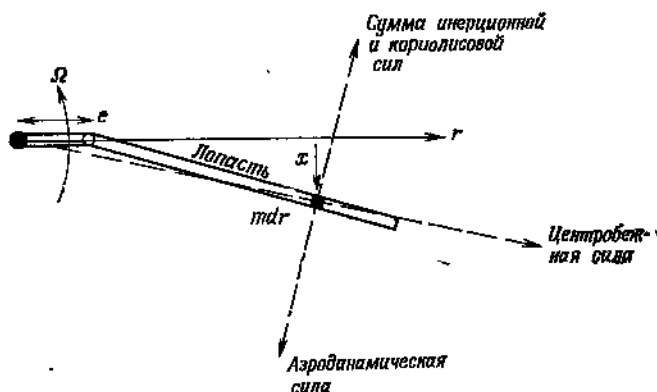


Рис. 5.35. Силы, создающие моменты относительно оси ВШ.

сравнению с силами, действующими в плоскости взмаха. Поэтому движение, определяемое равновесием моментов относительно оси ВШ, нужно исследовать более тщательно. В данном разделе дано лишь введение в динамику качания; более подробно она рассмотрена в гл. 9 и 12.

Рассмотрим движение лопасти в плоскости диска для винта, у которого ось ВШ отнесена на расстояние eR от оси вала (рис. 5.35). Если в ВШ нет пружины, то относ не может быть нулевым, так как иначе нельзя было бы сообщить винту крутящий момент. Поворот лопасти как твердого тела вокруг оси ВШ характеризуется углом качания ξ , который считают положительным, когда лопасть отклоняется противоположно направлению вращения. Если форма изгиба лопасти в плоскости диска задана функцией $\eta = (r - e)/(1 - e)$, то ее сечение отклоняется от радиальной прямой на $x = \eta\xi$. Будем считать, что ВШ снабжен пружиной с жесткостью K_ξ . Определим погонные силы, действующие на сечение, расположенное на радиусе r , и их плечи относительно оси ВШ, находящейся на радиусе $r = e$. Эти силы следующие: 1) инерционная сила $m\ddot{x} = m\eta\xi$ с плечом $r - e$,

направленная противоположно качанию; 2) центробежная сила $m\Omega^2 r$, направленная по радиусу от оси вращения и имеющая, следовательно, плечо $x(e/r) = \eta \zeta (e/r)$; 3) аэродинамическая сила F_x с плечом $r - e$, совпадающая по направлению с силой сопротивления сечения; 4) кориолисова сила $2\Omega \dot{z} z' m = 2m\Omega r \dot{\beta}$ с плечом $r - e$, направление которой совпадает с направлением инерционной силы. Заметим, что центробежная сила не создает момента относительно оси ВШ, если относ ВШ отсутствует. Кориолисова сила пропорциональна произведению частоты вращения Ω винта на радиальную скорость $\dot{z} z'$ сечения, направленную к оси вращения. Эту радиальную скорость можно рассматривать как составляющую скорости взмаха $\dot{z} = r\dot{\beta}$, лежащую в плоскости диска и возникающую при взмахе лопасти на угол $z' = \beta$. При $\dot{\beta} > 0$ кориолисова сила направлена в сторону вращения лопасти.

Условие равновесия всех моментов относительно оси ВШ, включая момент $K_\zeta \zeta$, создаваемый пружиной, дает уравнение качания:

$$\int_{eR}^R [(m\eta \zeta)(r - e) + m\Omega^2 r (e/r) \eta \zeta + 2\Omega r m \dot{\beta} (r - e)] dr + K_\zeta \zeta = \\ = \int_{eR}^R F_x (r - e) dr.$$

После почленного деления на $1 - e$ и перехода к безразмерным величинам уравнение принимает вид

$$I_\lambda \ddot{\zeta} + \left(e \int_e^1 m \eta dr + K_\zeta / \Omega^2 \right) \zeta / (1 - e) + 2I_\lambda \dot{\beta} \dot{\zeta} = \int_e^1 \eta F_x dr,$$

где $I_\lambda = \int_e^1 m \eta^2 dr$. Если массовую характеристику лопасти представить в виде $\gamma = \rho a c R^4 / I_\lambda$, то дифференциальное уравнение качания лопасти можно записать следующим образом:

$$\ddot{\zeta} + \nu_\zeta^2 \dot{\zeta} + 2\dot{\beta} \dot{\zeta} = \gamma \int_e^1 \eta \frac{F_x}{ac} dr.$$

Качание описывается тем же уравнением, что и колебания системы масса — пружина, возбуждаемые аэродинамическими силами в плоскости диска (профильным и индуктивным сопротивлениями) и кориолисовой силой, которая обусловлена маховым движением лопасти. Аэродинамические силы демпфируют качание, но значительно менее эффективно, чем движение в плоскости взмаха. Однако шарнирные винты имеют механические

демпферы ВШ. Квадрат собственной частоты качания определяется выражением

$$v_{\zeta}^2 = \left(e \int_e^1 m \eta dr \right) / \left[(1 - e) \int_e^1 m \eta^2 dr \right] + K_{\zeta} / [(1 - e) I_{\pi} \Omega^2].$$

Числитель дроби, обусловленный восстанавливающим действием центробежной силы на качание, равен нулю, если относ ВШ отсутствует. Если масса лопасти распределена равномерно и пружины в шарнире нет, то формула принимает простой вид

$$v_{\zeta}^2 = \frac{3e}{2(1 - e)}.$$

Для шарнирного винта типичны значения $v_{\zeta} = 0,2 \div 0,3$. У бесшарнирных винтов (или шарнирных с пружиной в ВШ) собственная частота качания может быть больше. Во избежание чрезмерной нагрузки лопасти величина v_{ζ} не должна быть очень близка к 1. Поэтому бесшарнирные винты естественным образом разделяют на два класса: винты с малой жесткостью в плоскости вращения, для которых $v_{\zeta} < 1$ (типичные значения $0,65 \div 0,80$), и винты с большой жесткостью в плоскости вращения, для которых $v_{\zeta} > 1$ (типичные значения $1,4 \div 1,6$). Карданные винты и винты с качающейся втулкой попадают во второй класс. Винтам первого класса свойственна механическая неустойчивость, называемая *земным резонансом* (см. гл. 12), которая возникает, если собственная частота или демпфирование качания слишком малы. По этой причине шарнирные винты и даже бесшарнирные винты первого класса должны иметь механические демпферы.

Кориолисова сила является величиной второго порядка малости, но она оказывается важным фактором в качании лопасти, так как все силы, действующие на лопасть в плоскости диска, малы. Именно нагрузки лопасти, создаваемые кориолисовыми силами при маховом движении, вызывают необходимость введения ВШ в конструкцию шарнирных винтов. При исследованиях качания на переходных режимах (включая аэроупругую устойчивость) кориолисов член в уравнении качания линеаризируют, считая отклонения махового движения от балансировочных значений малыми, т. е. $\beta\dot{\beta} \approx \beta_{0\text{в.л.}}\dot{\beta} + \dot{\beta}_{0\text{в.л.}}\beta$. На висении или при полете вперед, когда используются только средние балансировочные значения, это выражение принимает вид $\beta\dot{\beta} \approx \beta_0\dot{\beta}$. Таким образом, кориолисова сила обусловлена в основном радиальной составляющей скорости лопасти при взмахе на балансировочный угол β_0 . На установившемся режиме полета кориолисова сила является вынуждающей силой, и ее влияние можно оценить по амплитудам нулевой и первой гармоник махового

движения:

$$\begin{aligned} \beta\dot{\beta} &= (\beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi)(-\beta_{1c} \sin \psi + \beta_{1s} \cos \psi) = \\ &= \beta_0 \beta_{1s} \cos \psi - \beta_0 \beta_{1c} \sin \psi + \beta_{1c} \beta_{1s} \cos 2\psi + (1/2)(\beta_{1s}^2 - \beta_{1c}^2) \sin 2\psi. \end{aligned}$$

В случае установившегося режима полета качание имеет периодический характер и потому может быть представлено рядом Фурье. Так как средние значения инерционной и кориолисовой

сил равны нулю, а среднее значение интеграла $\int_0^1 r [F_x/(ac)] dr$

равно $C_Q/\sigma a$ (здесь C_Q — коэффициент аэродинамического крутящего момента), угол отставания лопасти выражается формулой

$$\xi_0 = (\nu/\nu_c^2) (C_Q/\sigma a).$$

Типичное значение этого угла составляет несколько градусов, изменяясь от небольшой отрицательной величины на авторотации до, возможно, 10° на режиме максимальной мощности.

Коэффициенты первых гармоник качания, обусловленные аэродинамическими и кориолисовыми силами, определяются выражениями

$$\xi_{1c} = -[(\nu C_Q/\sigma a)_{1c} - 2\beta_0 \beta_{1s}]/(1 - \nu_c^2),$$

$$\xi_{1s} = -[(\nu C_Q/\sigma a)_{1s} + 2\beta_0 \beta_{1c}]/(1 - \nu_c^2).$$

Если собственная частота качания близка к 1, то амплитуда первой гармоники велика, а значит, велики и нагрузки лопасти в плоскости диска. Демпфирование, которое определяет амплитуду вынужденных колебаний при $\nu_c = 1$, в случае качания мало и потому не меняет этого вывода. (У шарнирных винтов, снабженных механическими демпферами, качание лопасти сильно задемпфировано и имеет низкую собственную частоту.) Таким образом, собственную частоту качания для винтов с малой жесткостью в плоскости вращения приходится выбирать компромиссно, удовлетворяя требованиям малой нагрузки лопасти (низкая частота качания) и устойчивости к земному резонансу (высокая частота качания). Приведенные выше выражения для ξ_{1c} и ξ_{1s} не вполне правильны, так как на самом деле в первую гармонику момента аэродинамических сил относительно оси ВШ должны входить зависящие от махового движения члены, которые взаимно сокращаются с некоторыми членами выражения момента кориолисовых сил.

Коэффициенты вторых гармоник качания, обусловленных только кориолисовыми силами, равны

$$\xi_{2c} = \frac{2\beta_{1c}\beta_{1s}}{4 - \nu_c^2}, \quad \xi_{2s} = \frac{\beta_{1s}^2 - \beta_{1c}^2}{4 - \nu_c^2}.$$

или

$$|\zeta_2| = \sqrt{\zeta_{2c}^2 + \zeta_{2s}^2} = \frac{\beta_{1c}^2 + \beta_{1s}^2}{4 - v_c^2} = \frac{|\beta_1|^2}{4 - v_c^2}.$$

Таким образом, кориолисовы силы возбуждают вторую гармонику качания, амплитуда которой пропорциональна квадрату амплитуды первой гармоники махового движения.

5.20. ЗОНА ОБРАТНОГО ОБТЕКАНИЯ

Зона обратного обтекания представляет собой круг диаметра μ , расположенный на диске несущего винта на стороне отступающей лопасти. При малых μ влияние зоны обратного обтекания несущественно, так как она занимает небольшую часть

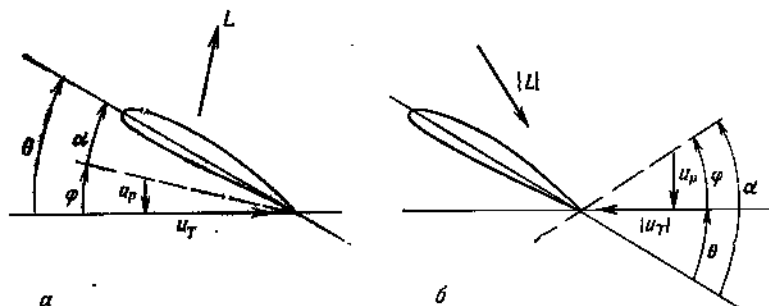


Рис. 5.36. Картины прямого (а) и обратного (б) обтеканий сечения лопасти.

области, в которой скоростные напоры малы. Поэтому до $\mu \approx 0,5$ влиянием зоны обратного обтекания можно пренебречь. При $\mu > 0,5$ зона обратного обтекания занимает значительную часть диска, и ее следует учитывать в расчете аэродинамических сил, действующих на лопасть. Здесь будет изложена простейшая схема работы лопасти в зоне обратного обтекания. По крайней мере вблизи границы этой зоны имеют место срыв потока и существенное радиальное течение, вследствие чего может потребоваться менее приближенная схема.

На рис. 5.36 сопоставлены картины прямого и обратного обтеканий сечения лопасти. Напомним, что в разд. 5.2 мы получили, пренебрегая возможностью срыва и считая углы малыми, следующее выражение для нормальной аэродинамической силы:

$$F_z(ac) \approx L(ac) \approx (1/2)u_T^2 \alpha = (1/2)u_T(\theta u_T - u_p).$$

Однако в этом выражении не учитывается и зона обратного обтекания. Входящие сюда величины отсчитываются в следующих направлениях: F_z и L — вверх, θ — соответственно подъему носка

сечения вверх, u_p — вниз и u_T — от передней кромки к задней. Как видно на рис. 5.36, в зоне обратного обтекания угол атаки вычисляется по формуле

$$\alpha = \theta + \varphi = \theta + u_p / u_T = \theta - u_p / u_T,$$

т. е. так же, как при прямом обтекании. Однако в зоне обратного обтекания положительному α соответствует отрицательная (направленная вниз) подъемная сила:

$$L/(ac) = -(1/2) u_T^2 \alpha = (1/2) |u_T| u_T \alpha.$$

Следовательно, как при прямом, так и при обратном обтекании справедлива формула

$$F_z/(ac) \approx L/(ac) \approx (1/2) |u_T| u_T \alpha = (1/2) |u_T| (\theta u_T - u_p).$$

Поскольку обратное обтекание не влияет на моменты инерционной и центробежной сил относительно оси ГШ, единственной причиной изменения махового движения будет изменение момента аэродинамических сил. С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} M_{ГШ} &= \int_0^1 r [F_z/(ac)] dr = \int_0^1 (1/2) |u_T| (\theta u_T - u_p) r dr = \\ &= M_{\theta} \theta_{упр} + M_{\theta p} \theta_{кр} + M_{\lambda} \lambda + M_{\beta} \beta + M_{\beta \beta}. \end{aligned}$$

При обратном обтекании изменяется знак подынтегрального выражения, т. е. для расчета аэродинамических коэффициентов

нужно вычислять интегралы вида $\int_0^1 f(r, \psi) \text{sign}(u_T) dr$. Величина такого интеграла зависит от азимута. При $\mu < 1$ необходимо только по-разному вычислять интегралы на левой и правой сторонах диска:

$$\int_0^1 f(r, \psi) \text{sign}(u_T) dr = \begin{cases} \int_0^1 f dr & \text{при } 0^\circ < \psi < 180^\circ, \\ \int_0^1 f dr - 2 \int_0^{\mu \sin \psi} f dr & \text{при } 180^\circ < \psi < 360^\circ. \end{cases}$$

Таким образом, на стороне наступающей лопасти аэродинамические коэффициенты совпадают с полученными раньше, а на стороне отступающей лопасти требуется учесть изменение знака подынтегрального выражения в зоне обратного обтекания. Если $\mu > 1$, то в диапазоне $3\pi/2 - \arccos(1/\mu) < \psi < 3\pi/2 + \arccos(1/\mu)$ обратное обтекание лопасти имеет место по всему

размаху, так что

$$\int_0^1 f(r, \psi) \operatorname{sign}(u_r) dr = - \int_0^1 f dr.$$

Вычисляя интегралы при $\mu < 1$, получим следующие выражения для аэродинамических коэффициентов (первое выражение соответствует стороне наступающей лопасти, а второе — отступающей лопасти):

$$M_\theta = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \mu \sin \psi + \frac{1}{4} (\mu \sin \psi)^2, \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \mu \sin \psi + \frac{1}{4} (\mu \sin \psi)^2 - \frac{1}{12} (\mu \sin \psi)^4, \end{cases}$$

$$M_{кр} = \begin{cases} \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \mu \sin \psi + \frac{1}{6} (\mu \sin \psi)^2, \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \mu \sin \psi + \frac{1}{6} (\mu \sin \psi)^2 + \frac{1}{30} (\mu \sin \psi)^5, \end{cases}$$

$$M_\lambda = \begin{cases} -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \mu \sin \psi, \\ -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} \mu \sin \psi + \frac{1}{6} (\mu \sin \psi)^3, \end{cases}$$

$$M_\beta = \begin{cases} -\frac{1}{8} - \frac{1}{6} \mu \sin \psi, \\ -\frac{1}{8} - \frac{1}{6} \mu \sin \psi - \frac{1}{12} (\mu \sin \psi)^4, \end{cases}$$

$$M_\alpha = \begin{cases} -\mu \cos \psi \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \mu \sin \psi \right), \\ -\mu \cos \psi \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \mu \sin \psi - \frac{1}{6} (\mu \sin \psi)^3 \right]. \end{cases}$$

На рис. 5.37 показано, как изменяется коэффициент M_β демпфирования махового движения при нескольких значениях μ . Демпфирование махового движения всегда положительно ($M_\beta < 0$). На режиме висения этот коэффициент постоянен ($M_\beta = -0,125$), при $\mu > 0$ он больше на стороне наступающей лопасти и меньше на стороне отступающей лопасти. При $\mu > 0,794$ демпфирование достигает минимального уровня ($M_\beta = -0,0258$) на стороне отступающей лопасти и имеет локальный максимум при $\psi = 270^\circ$. На рис. 5.38 показано изменение коэффициента M_θ управления углом установки. На висении $M_\theta = 0,125$, при $\mu > 0$ этот коэффициент больше на стороне наступающей лопасти и меньше на отступающей. При $\mu > 0,641$ M_θ отрицателен на стороне отступающей лопасти. Изменение коэффициента $M_{кр}$ градиента крутки напоминает изменение M_θ ,

а величины M_λ и $M_\beta/(\mu \cos \psi)$ изменяются аналогично M_β . Однако если демпфирование махового движения всегда положительно (даже при $\mu > 1$), то коэффициент M_β аэродинамической

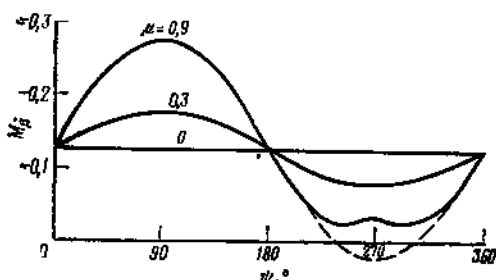


Рис. 5.37. Изменение коэффициента M_β демпфирования махового движения.

— с учетом обратного обтекания; --- без учета обратного обтекания.

восстанавливающей силы вследствие множителя $\mu \cos \psi$ отрицателен в передней части диска.

Для решения уравнения махового движения удобно представить аэродинамические коэффициенты рядами Фурье. Вследст-

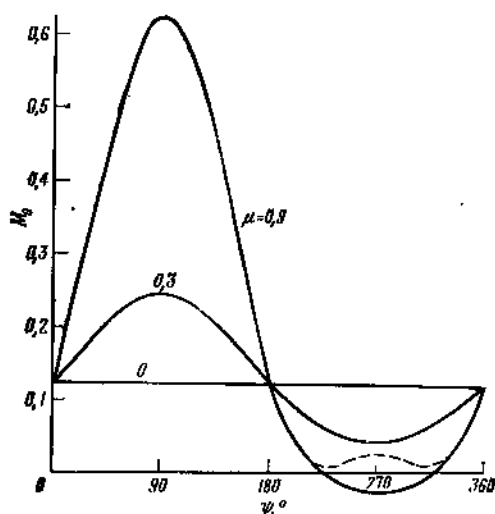


Рис. 5.38. Изменение коэффициента M_θ управления углом установки.

— с учетом обратного обтекания; --- без учета обратного обтекания.

вие симметрии течения половина членов рядов обращается в нуль. При этом имеем

$$M_\theta = M_\theta^0 + M_\theta^{1s} \sin \psi + M_\theta^{2c} \cos 2\psi + M_\theta^{3s} \sin 3\psi + \dots$$

и аналогично для $M_{кр}$, M_β и M_λ . Далее,

$$M_\beta = M_\beta^{1c} \cos \psi + M_\beta^{2s} \sin 2\psi + M_\beta^{3c} \cos 3\psi + \dots$$

Тогда для шарнирного винта ($\nu = 1$) получаем следующие уравнения относительно коэффициентов махового движения:

$$\theta_0 M_\theta^0 + \theta_{1s} M_\theta^{1s} / 2 + \beta_{1c} (M_\beta^{1c} - M_\beta^{1s}) / 2 + \theta_{кр} M_{кр}^0 + \lambda M_\lambda^0 = \beta_0 / \gamma,$$

$$\theta_{1c} (M_\theta^0 + M_\theta^{2c} / 2) + \beta_{1s} (2M_\beta^0 + M_\beta^{2c} + M_\beta^{2s}) / 2 + \beta_0 M_\beta^{1c} = 0,$$

$$\theta_0 M_\theta^{1s} + \theta_{кр} M_{кр}^{1s} + \theta_{1s} (M_\theta^0 - M_\theta^{2c} / 2) + \beta_{1c} (-2M_\beta^0 + M_\beta^{2c} + M_\beta^{2s}) / 2 + \lambda M_\lambda^{1s} = 0.$$

Если характеристика режима работы винта настолько велика, что требуется учитывать зону обратного обтекания, то необходимо учитывать и вторые гармоники махового движения. Однако решение при этом лучше искать численно. С учетом соотношений $\lambda = \lambda_{ППУ} + \mu \theta_{1s} = \lambda_{ПКЛ} - \mu \beta_{1c}$ решение получается в виде

$$\beta_0 = \gamma [\theta_0 M_\theta^0 + \theta_{кр} M_{кр}^0 + \theta_{1s} (M_\theta^{1s} / 2 + \mu M_\lambda^0) + \beta_{1s} (M_\beta^{1c} - M_\beta^{1s}) / 2 + \lambda_{ППУ} M_\lambda^0],$$

$$\beta_{1s} = \frac{-\beta_0 M_\beta^{1c} - \theta_{1c} (M_\theta^0 + M_\theta^{2c} / 2)}{M_\beta^0 + (M_\beta^{2c} + M_\beta^{2s}) / 2},$$

$$\beta_{1c} = \frac{\theta_{1s} M_\theta^{1s} + \theta_{кр} M_{кр}^{1s} + \theta_{1s} (M_\theta^0 - M_\theta^{2c} / 2 + \mu M_\lambda^{1s}) + \lambda_{ППУ} M_\lambda^{1s}}{M_\beta^0 - (M_\beta^{2c} + M_\beta^{2s}) / 2} = \frac{\theta_0 M_\theta^{1s} + \theta_{кр} M_{кр}^{1s} + \theta_{1s} (M_\theta^0 - M_\theta^{2c} / 2) + \lambda_{ПКЛ} M_\lambda^{1s}}{M_\beta^0 - (M_\beta^{2c} + M_\beta^{2s}) / 2 + \mu M_\lambda^{1s}}.$$

Подставляя выражения для соответствующих коэффициентов Фурье, окончательно находим

$$\beta_0 = \gamma \left[\frac{1}{8} \left(1 + \mu^2 - \frac{1}{8} \mu^4 \right) \theta_{0,80} - \frac{1}{60} \left(\mu^2 - \frac{9}{8} \mu^4 \right) \theta_{кр} - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{2}{3\pi} \mu^3 \right) \lambda_{ППУ} - \frac{1}{15\pi} \mu^4 (\beta_{1c} + \theta_{1s}) \right],$$

$$\beta_{1s} - \theta_{1c} = \frac{\frac{4}{3} \mu \left(1 + \frac{4}{15\pi} \mu^3 \right) \beta_0}{1 + \frac{1}{2} \mu^2 - \frac{1}{24} \mu^4},$$

$$\beta_{1c} + \theta_{1s} =$$

$$= \frac{\frac{8}{3} \mu \left[\left(1 + \frac{4}{15\pi} \mu^3 \right) \theta_{0,75} - \frac{23}{75\pi} \theta_{кр} \mu^3 - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{4} \mu^2 \right) \lambda_{ППУ} \right]}{1 - \frac{1}{2} \mu^2 + \frac{7}{24} \mu^4}$$

$$= \frac{\frac{8}{3} \mu \left[\left(1 + \frac{4}{15\pi} \mu^3 \right) \theta_{0,75} - \frac{23}{75\pi} \mu^2 \theta_{кр} - \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{4} \mu^2 \right) \lambda_{ПКЛ} \right]}{1 + \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{5}{24} \mu^4}.$$

Таким образом, учет зоны обратного обтекания приводит к появлению в формулах членов порядка μ^4 . При $\mu > 0,5$ наряду с зоной обратного обтекания необходимо учитывать срыв потока и сжимаемость воздуха. Кроме того, становятся важными и другие степени свободы лопасти. Например, при $\mu > 0,7$ подъемная сила, которая в зоне обратного обтекания проходит через точку трех четвертей хорды, значительно изменяет угол установки, а значит, и нагрузку лопасти. Поэтому при больших значениях характеристики режима работы винта нагрузку лопасти и ее движение нужно находить численно, чтобы получить более точные результаты.

Наконец, для коэффициента силы тяги с учетом влияния зоны обратного обтекания получаем следующее выражение:

$$C_T = \sigma a \int_0^1 (1/2) |u_T| (\theta u_T - u_p) dr = \\ = (\sigma a/2) [(1/3 + \mu^2/2 - 4\mu^3/(9\pi))\theta_0 + (1/4 + \mu^2/4 - \\ - \mu^4/32)\theta_{кр} - (1/2 + \mu^2/4)\lambda_{ппу} - (\mu^3/8)(\beta_{1c})_{ппу}].$$

Влияние зоны обратного обтекания приводит к появлению членов высшего порядка по μ , но слагаемое $\mu^2\lambda_{ппу}$ имеет, как оказалось, существенное значение даже при весьма малых μ .

Более подробное обсуждение влияния зоны обратного обтекания, особенно на маховое движение, можно найти в работах [Р.45, S.129, S.130].

5.21. СЖИМАЕМОСТЬ ВОЗДУХА

Сжимаемость воздуха приводит к изменению сил, действующих на лопасть, и таким путем влияет на аэродинамические характеристики несущего винта и движение лопастей. Особенно важно в этом отношении увеличение градиента подъемной силы с числом Маха и резкое возрастание сопротивления и продольного момента при превышении числом Маха определенного критического значения. Если лопасть работает при больших переменных углах атаки (например, отступающая лопасть тяжело нагруженного винта), то влияние сжимаемости имеет важное значение даже при малых числах Маха. С точки зрения аэродинамических характеристик винта влияние сжимаемости проявляется главным образом в том, что коэффициент C_{P_0} профильной мощности быстро возрастает, когда конечное число Маха превосходит критическое (число Маха, при котором начинается дивергенция сопротивления). Это критическое число зависит от угла атаки и возрастает вследствие трехмерности обтекания концевой части лопасти. Увеличение градиента подъемной силы мало влияет на величины β_{1c} и β_{1s}/β_0 (которые определяются

только равновесием аэродинамических сил), но вызывает значительное увеличение силы тяги и угла конусности винта при больших концевых скоростях. Единственный практический способ детального учета эффектов сжимаемости — численное определение нагрузок и движения лопастей с использованием экспериментальных зависимостей аэродинамических характеристик профилей от угла атаки и числа Маха. Влияние трехмерности обтекания также следует учитывать, особенно в концевой части лопасти.

При полете вперед число Маха для нормального сечения лопасти, расположенного на радиусе r и азимуте ψ , определяется соотношением

$$M_{r, \psi} = u_T / c_{зв} = M_k (r + \mu \sin \psi),$$

где $M_k = \Omega R / c_{зв}$ — концевое число Маха, $c_{зв}$ — скорость звука. Максимального значения $M_{1,90} = M_k (1 + \mu)$ это число Маха достигает на конце наступающей лопасти. M_k хорошо характеризует влияние сжимаемости в среднем, а $M_{1,90}$ служит мерилom предельных эффектов. Сжимаемость воздуха ограничивает максимальную скорость полета вертолета. Если предыдущую формулу записать в виде $M_{1,90} = (\Omega R + V) / c_{зв}$, то станет ясно, что приближение к числу Маха, критическому для лопасти, налагает ограничения и на скорость полета вертолета, так как чрезмерное уменьшение концевой скорости наталкивается на другие ограничения (см. разд. 7.4).

Влияние увеличения градиента подъемной силы на нагрузки лопастей и их маховое движение можно рассчитать с помощью формулы Прандтля — Глауэрта $a = a_{несж} / \sqrt{1 - M^2}$. Так как число Маха изменяется по диску, градиент подъемной силы также будет переменным. Поэтому множитель Прандтля — Глауэрта $(1 - M^2)^{-1/2}$ должен войти в подынтегральные выражения, так что выполнить интегрирование аналитически уже не удастся. Можно использовать некоторое среднее значение градиента подъемной силы, которое постоянно по диску винта. Например, можно рассчитать a по числу Маха на эффективном радиусе $r_{эфф}$:

$$a = a_{несж} [1 - (r_{эфф} M_k)^2]^{-1/2}.$$

Пейн [Р.36] предложил принимать $r_{эфф} = 0,7$, что дает хорошие результаты при $M_k < 0,7$. Петерс и Ормистон [Р.55] нашли, что при $M_{1,90} < 0,9$ усредненная поправка удовлетворительна, если брать $r_{эфф} = 0,75$. При $M_{1,90} > 0,9$ необходимо учитывать изменение a по радиусу и азимуту.

Гессоу и Крим [G.63] рассчитали влияние концевого числа Маха на маховое движение, силу тяги и мощность несущего винта при полете вперед. Они нашли, что амплитуда махового движения и сила тяги незначительно возрастают вследствие

сжимаемости воздуха. Наиболее существенным оказалось увеличение профильной мощности на стороне наступающей лопасти, когда M_k превышает число Маха, соответствующее дивергенции сопротивления. Приращение ΔC_{P_p} , коэффициента профильной мощности хорошо коррелируется с параметром ΔM_d — разностью между числом Маха, при котором начинается дивергенция сопротивления сечения, и $M_{1,90}$. Эта корреляция приближенно описывается формулой

$$\Delta C_{P_p}/\sigma = 0,007 (\Delta M_d) + 0,052 (\Delta M_d)^2.$$

Сходные эмпирические формулы получены в статьях [N.24, N.23]. В источниках, на которые даны ссылки в разд. 2.8, 5.24 и 6.6, изложены результаты экспериментальных и теоретических исследований, посвященных работе несущего винта при больших концевых числах Маха на режимах висения или полета вперед.

5.22. РУЛЕВОЙ ВИНТ

Рулевой винт вертолета одновинтовой схемы представляет собой воздушный винт малого диаметра, который предназначен для уравновешивания аэродинамического крутящего момента несущего винта и путевого управления. Выполнение обеих функций достигается тем, что сила тяги рулевого винта действует на некотором плече (обычно несколько большем радиуса несущего винта) относительно вала несущего винта. Как правило, рулевой винт является слабо нагруженным винтом с машущими лопастями, так что к нему применима изложенная в этой главе теория. Однако рулевой винт имеет особенности, вследствие которых теория несколько видоизменяется. Во-первых, у него нет управления циклическим шагом, есть только управление общим шагом для изменения величины силы тяги. Во-вторых, угол атаки рулевого винта определяется размещением винта и углом рыскания вертолета, а не условиями равновесия сил, действующих на винт. Сопротивление или пропульсивную силу рулевого винта включают в сопротивление фюзеляжа и уравновешивают посредством несущего винта.

В отсутствие управления циклическим шагом условия равновесия действующих на лопасть моментов относительно оси ГШ определяют маховое движение, а не циклический шаг, требуемый для данного режима работы винта. Рулевые винты обычно имеют компенсатор взмаха, который связывает действительный угол установки лопасти относительно плоскости вращения с маховым движением:

$$(\theta_{1c})_{ПВ} = -K_P (\beta_{1c})_{ПВ} \text{ и } (\theta_{1s})_{ПВ} = -K_P (\beta_{1s})_{ПВ}$$

(типичное значение $\delta_8 = 45^\circ$, т. е. $K_p = 1$). Если ориентация вала фиксирована, то угол атаки $\alpha_{ПВ}$ плоскости вращения известен, а значит, угол атаки ПКЛ зависит от продольного наклона конуса лопастей. Следовательно, коэффициент протекания равен

$$\lambda_{ПКЛ} = \lambda_{ПВ} + \mu (\beta_{1c})_{ПВ} = \lambda_t + \mu [\alpha_{ПВ} + (\beta_{1c})_{ПВ}].$$

Соппротивление рулевого винта, которое преодолевается с помощью несущего винта, описывается соотношением

$$D_{р.в} = H_{ПКЛ} - T\alpha_{ПКЛ} = H_{ПКЛ} - T[\alpha_{ПВ} + (\beta_{1c})_{ПВ}].$$

Дальнейшее обсуждение аэродинамических характеристик рулевого винта и ссылки на литературу см. в гл. 6 и 7.

5.23. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Чтобы получить аналитические выражения для сил и моментов, действующих на несущий винт, а также для коэффициентов махового движения, приходится сделать некоторые упрощения расчетной схемы обтекания винта. К этим упрощениям относятся: пренебрежение эффектами срыва и сжимаемости, замена неравномерного распределения индуктивных скоростей равномерным (или простейшим линейным), пренебрежение вторыми и высшими гармониками махового движения и учет из всех форм изгиба лопастей только основной формы. Получаемое при этих предположениях аналитическое решение дает представление о работе винта и, кроме того, имеет приемлемую точность в широком диапазоне режимов полета. Если вертолет летает на экстремальных режимах (большая скорость полета, большие концевые числа Маха, большой полетный вес и др.), одно или большее число предположений становится уже неприемлемым, и требуется более близкая к реальности расчетная схема. Кроме того, даже на тех режимах, для которых простая схема позволяет надежно рассчитать аэродинамические характеристики и маховое движение, расчет нагрузок лопастей и вибраций следует проводить с использованием усовершенствованной схемы.

Таким образом, для расчета работы несущего винта часто необходима усовершенствованная схема его обтекания, в которой упрощающие предположения о движении лопасти и об аэродинамических силах используются в той степени, в которой это диктуется запросами практики и возможностью решения задачи. В случае более полной схемы необходимо искать решение численно, что практически можно сделать только с помощью быстродействующих цифровых вычислительных машин. В последние годы были разработаны многочисленные программы расчета несущего винта, и в настоящее время их использование при проектировании, испытаниях и оценке характеристик вертолетов

стало обычным делом. Численные решения, бесспорно, сильно расширили современные знания о работе винта и позволили точнее рассчитывать его характеристики. Но верно также и то, что даже при использовании самых совершенных расчетных схем возможности описания работы винта остаются еще во многом ограниченными. Это связано как с большим объемом вычислений, так и с тем, что еще не решен ряд фундаментальных проблем аэродинамики и динамики вертолета. Постановке задачи о расчете винта при численном решении и самому решению посвящены гл. 14 и некоторые работы, обсуждаемые в разд. 5.24.

5.24. ЛИТЕРАТУРА

Эту главу мы завершаем рассмотрением некоторых исследований, составивших основу для расчета сил и моментов, действующих на несущий винт, а также махового движения лопастей при полете вперед. Рассмотрены главным образом аналитические решения. Расчет характеристик винта изложен ниже, в гл. 6. Подробным численным решениям посвящена гл. 14.

Глауэрт [G.85] впервые разработал теорию несущего винта с машущими лопастями при полете вперед, чтобы проверить полезность изобретения, сделанного Сьерва применительно к автожирам. Глауэрт рассматривал винт с машущими лопастями без крутки и сужения, а также без управления циклическим шагом (т. е. не вводил ППУ). По теории элемента лопасти он нашел угол конусности и коэффициенты первой гармоники махового движения, а по импульсной теории — индуктивную скорость. Наиболее серьезное ограничение, сделанное в этой теории, состояло в том, что в формулах сохранялись только члены порядка μ . Были использованы предположения о малости углов и о постоянстве градиента подъемной силы ($c_l = a\alpha$), а коэффициент сопротивления был принят равным его среднему значению. На базе импульсной теории Глауэрт вывел формулу для индуктивной скорости при полете вперед

$$\lambda_i = C_T / (2 \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}),$$

объединив тем самым формулы индуктивной скорости для режимов висения и полета с большой скоростью (см. разд. 4.1.1). Он рассмотрел также линейное распределение индуктивных скоростей вида $v = v_0(1 + k_x r \cos \psi)$ и предложил приближенную формулу $\lambda_i \approx C_T / (2\mu)$ для режимов полета с большой скоростью. Глауэрт получил и выражение для профильной мощности с учетом влияния зоны обратного обтекания и радиального течения:

$$C_P = \int_0^1 \frac{\sigma c_d}{2} (u_T^2 + u_R^2)^{3/2} dr.$$

Это выражение было аппроксимировано формулой $C_{p_0} = \sigma c_{d_0} (1 + \mu^2)/8$, и для нескольких значений μ был найден параметр n (см. разд. 5.12). Формула для коэффициента профильной мощности была выведена из условия сохранения энергии с целью проверки выражения C_Q , полученного по теории элемента лопасти. Так как взаимосвязь этих двух способов в то время не была очевидной, формула теории элемента лопасти была принята в качестве основной самим Глауэртом и теми, кто позднее использовал его работу как основу для дальнейших исследований.

Локк [L.103] обобщил теорию Глауэрта, рассмотрев члены высшего порядка по μ , вторые гармоники махового движения и циклический шаг. Он выдвинул идею о том, что несущий винт, у которого лопасти не машут, но циклически изменяют угол установки (в качестве плоскости отсчета выбрана ПКЛ), эквивалентен винту с машущими лопастями, но без циклического шага (плоскостью отсчета служит ППУ). Локк определил силы, аэродинамический крутящий момент винта и коэффициенты махового движения при обоих выборах плоскости отсчета и установил, что получаемые при этом формулы эквивалентны. Он также показал эквивалентность выражений для аэродинамического крутящего момента винта, следующих из анализа сил или энергий, но пренебрег зоной обратного обтекания и радиальным сопротивлением, получив в результате $C_{p_0} = \sigma c_{d_0} (1 + 3\mu^2)/8$. Локк ввел в теорию параметр $\gamma = \rho a c R^4 / I_a$, характеризующий отношение аэродинамических и инерционных сил, действующих на лопасть. Этот параметр часто называют *числом Локка*¹⁾. (На самом деле в качестве a Локк принял отношение $(dL/d\alpha)/(\rho V^2 c)$, вследствие чего его параметр γ был в 2 раза меньше современного. Этот дополнительный множитель 2 еще встречается время от времени в работах по теории несущего винта.)

Уитли [W.51] обобщил теорию Глауэрта — Локка и оценил надежность теории, сопоставив результаты расчета с экспериментальными данными. Он рассматривал винт без отношения ГШ с машущими лопастями, имеющими линейную крутку и постоянную хорду, учитывал концевые потери (посредством коэффициента B), вторую гармонику махового движения и зону обратного обтекания, а распределение индуктивных скоростей считал линейным (изменение направления действия силы тяги и сопротивления в зоне обратного обтекания было принято в расчет подстановкой $|u_T|$ вместо u_T в выражениях элементарных сил). Уитли считал углы малыми, градиент подъемной силы постоянным ($c_l = a\alpha$), коэффициент сопротивления равным его

¹⁾ В отечественной литературе параметр $\gamma = \rho a c R^4 / 2I_a$ называют *массовой характеристикой лопасти*. — *Прим. перев.*

среднему значению, а также пренебрегал членами порядка выше μ^4 и влиянием радиального течения и радиального сопротивления на профильную мощность. Плоскостью отсчета служила ППУ, а параметром — коэффициент протекания через эту плоскость ($\lambda = \lambda_{\text{ППУ}} = \lambda_i + \text{tg } \alpha_{\text{ППУ}}$). В рамках этой расчетной схемы Уитли определил силы, коэффициенты махового движения и аэродинамические характеристики несущего винта при полете вперед. Сравнение рассчитанных характеристик с результатами летных испытаний автожира «Питкэрн» показало, что большинство из них удовлетворительно согласуется с экспериментальными. Хорошо согласуются вплоть до $\mu \approx 0,4 \div 0,5$ величины $\alpha_{\text{ППУ}}$, C_T и Ω (частота вращения винта была вычислена по C_T и полетному весу автожира). Теория правильно оценивала также результирующие силы и мощность несущего винта. Изменение индуктивной скорости в продольном направлении слабо влияло на величины сил. Расчетные коэффициенты махового движения начинали расходиться с экспериментальными также приблизительно при $\mu = 0,4$ или $0,5$. Но в общем расчет махового движения хуже согласовался с экспериментом, чем расчет сил. Особенно расходились значения β_{1s} , которые в типичном случае были на $1,5^\circ$ меньше экспериментальных. Если распределение индуктивных скоростей принять линейным (при $k_x = 0,5$), то расхождение уменьшается до 1° . Хотя эта ошибка относительно велика (значения β_{1s} в испытаниях составляли $3 \div 4^\circ$), она очень мало изменялась в диапазоне $0,1 < \mu < 0,6$. Расчет величин β_{1c} более надежен: теоретические значения могли быть завышены на $0,5^\circ$, но расхождения были, как правило, в пределах разброса экспериментальных данных. По результатам сравнения был сделан вывод, что теория не позволяет надежно рассчитать маховое движение. Так как наибольшая ошибка была в коэффициенте β_{1s} , который обычно меньше β_{1c} , амплитуду махового движения можно определить с весьма малой погрешностью, но погрешность определения фазы будет велика. Расхождение теории с экспериментом обусловлено, вероятно, упрощенным распределением индуктивных скоростей, которое было принято в расчетах. Учет концевых потерь и зоны обратного обтекания также был слишком упрощен, а эффекты срыва и сжимаемости вообще не учитывались.

Зиссинг [S.119] обобщил теорию Уитли, полностью отказавшись от предположения о постоянстве коэффициента профильного сопротивления. При расчете профильной мощности он принял квадратичную зависимость $c_d = \delta_0 + \delta_1\alpha + \delta_2\alpha^2$. Зиссинг также рассмотрел влияние отношения ГШ.

Бейли [B.4] придавал теории Уитли практическую форму, сделав ее удобной для стандартных расчетов. Для этого все расчетные величины были представлены как явные функции общего шага лопастей, их крутки и коэффициента протекания через

ППУ. Коэффициенты в выражениях этих функций зависели только от характеристики режима работы винта, массовой характеристики лопасти и коэффициента концевых потерь. Был рассмотрен несущий винт без отбоя ГШ с линейно закрученными лопастями постоянной хорды. Бейли разделил коэффициент аэродинамического крутящего момента винта на ускоряющее и замедляющее слагаемые, положив $C_Q = (C_Q)_{\text{уск}} + (C_Q)_{\text{зам}}$, где

$$(C_Q)_{\text{уск}} = \frac{\sigma}{2} \int_0^1 c_l |u_T| u_T \varphi r dr, \quad (C_Q)_{\text{зам}} = \frac{\sigma}{2} \int_0^1 c_d |u_T| u_T r dr.$$

Это разделение соответствует принятому в данной главе разделению характеристик на индуктивную и профильную части. Профильная мощность была найдена как отношение профильного сопротивления к подъемной силе винта:

$$C_P = \mu C_T \left(\frac{D}{L} \right)_0 = \frac{\sigma}{2} \int_0^1 |u_T| u_T^2 c_d dr.$$

Бейли обобщил теорию Уитли, используя квадратичную формулу c_d для расчета $(C_Q)_{\text{зам}}$ и $(D/L)_0$. Таким образом было учтено увеличение профильного сопротивления с ростом подъемной силы. Однако Бейли по-прежнему пренебрегал радиальным течением и принимал $c_l = a\alpha$. Он разработал метод определения коэффициентов δ_0 , δ_1 и δ_2 по аэродинамическим характеристикам профиля $(c_l)_{\text{макс}}$, $(c_d)_{\text{мин}}$, $(c_l)_{\text{опт}}$ и $(c_l)_a$ для заданного числа Рейнольдса (см. разд. 7.8). Для профиля NACA23012 при $Re = 2 \cdot 10^6$ было получено выражение $c_d = 0,0087 - 0,0216\alpha + 0,400\alpha^2$, которое хорошо аппроксимирует изменение коэффициента сопротивления до $\alpha \approx 12^\circ$. Это выражение часто используется в расчетах несущего винта даже тогда, когда лопасти имеют другие профили сечений. Бейли также рассмотрел ограничения, налагаемые срывом, в результате которого квадратичная формула c_d становится непригодной. Таким путем были получены выражения для коэффициентов махового движения $(\beta_0/\gamma, \beta_{1c}, \beta_{1s}/\gamma, \beta_{2c}/\mu^2$ и $\beta_{2s}/\mu^2)$, коэффициента силы тяги $2C_T/(\sigma a)$, ускоряющего и замедляющего слагаемых аэродинамического момента $[2(C_Q)_{\text{уск}}/(\sigma a)$ и $2(C_Q)_{\text{зам}}/(\sigma a)]$ и коэффициента профильной мощности $\mu(2C_T/\sigma)(D/L)_0$. Коэффициенты махового движения и силы тяги представлены как линейные функции $\theta_0, \theta_{кр}$ и $\lambda_{ппу}$, а коэффициенты аэродинамического момента и профильной мощности — как квадратичные функции $[(C_Q)_{\text{зам}}$ и $(D/L)_0$ зависят еще от коэффициентов $\delta_0, \delta_1, \delta_2]$. Бейли дал таблицы и формулы коэффициентов при $\theta_0, \theta_{кр}$ и $\lambda_{ппу}$ в выражениях указанных функций (эти таблицы воспроизведены в книге [G.66]). Указанные коэффициенты зависят от μ, B и γ , хотя в выражениях для β_{1c} и β_{1s} они не зависят от μ , а в

остальных выражениях слабо зависят от γ при $\mu < 0,5$. Для определения характеристик вертолета при полете вперед Бейли предложил следующую последовательность расчета (полностью она описана в гл. 6). Мощность определяется энергетическим методом. В качестве первого приближения находят C_P по простой формуле. Тогда равенство $C_P = (C_Q)_{\text{уск}} + (C_Q)_{\text{зам}}$ дает квадратное уравнение относительно $\lambda_{\text{ППУ}}$. (Если задан не общий шаг, а коэффициент силы тяги, то для получения квадратного уравнения нужно вместо θ_0 подставить его выражение через C_T .) Решив квадратное уравнение, по параметру $\lambda_{\text{ППУ}}$ находят новую величину коэффициента профильной мощности. Этот процесс повторяют до тех пор, пока решение не сойдется. Затем по формуле C_T находят общий шаг и вычисляют коэффициенты махового движения. Для автожира условие $C_P = 0$ сразу дает квадратное уравнение относительно $\lambda_{\text{ППУ}}$, и необходимость в итерациях отпадает. Бейли предлагал для представления характеристик вертолета строить графики $(D/L)_0$ в зависимости от C_L/σ по параметрам θ_0 и μ (это эквивалентно графикам C_P в зависимости от C_T/σ). Автор описанной теории занимался автожирами, но такие же графики можно строить при любой величине C_P .

На основе работ Уитли и Бейли можно сделать вывод о том, что концевые потери приводят к значительному уменьшению β_0 и C_T (т. е. величин, непосредственно зависящих от подъемной силы лопастей) и мало влияют на β_{1c} и β_{1s}/β_0 . Кроме того, при $\mu < 0,5$ влияние зоны обратного обтекания очень мало, и его следует учитывать только добавлением в выражение C_T члена $\mu^2\lambda$, который существует даже при малых скоростях полета. Таким образом, если учитывать основную часть влияния концевых потерь и зоны обратного обтекания, то формулы, полученные в разд. 5.3 и 5.5, примут вид

$$\begin{aligned} \frac{2C_T}{\sigma a} &= \frac{\theta_0}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \mu^2\right) B^3 + \frac{\theta_{\text{кр}}}{4} (1 + \mu^2) B^4 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\lambda_{\text{ППУ}} + \frac{\mu}{2} \lambda_y\right) \left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right) B^2, \\ \beta_0 &= \gamma \left[\frac{\theta_0}{8} (1 + \mu^2) B^4 + \frac{\theta_{\text{кр}}}{10} \left(1 + \frac{5}{6} \mu^2\right) B^5 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} \left(\lambda_{\text{ППУ}} + \frac{\mu}{2} \lambda_y\right) B^3 \right] - S_a^* \frac{g}{\Omega^2 R}, \\ \beta_{1c} &= \left[-\frac{8}{3} \mu \left(\theta_0 + \frac{3}{4} \theta_{\text{кр}} - \frac{3}{4} \lambda_{\text{ППУ}}\right) + \lambda_y \right] / \left(1 - \frac{1}{2} \mu^2\right), \\ \beta_{1s} &= -\left(\frac{4}{3} \mu \beta_0 + \lambda_x\right) / \left(1 + \frac{1}{2} \mu^2\right) \end{aligned}$$

(здесь β_{1c} и β_{1s} — коэффициенты махового движения относительно ППУ). При $\mu \leq 0,5$ эти формулы дают примерно ту же

ошибку, что и результаты Бейли, а при $\mu > 0,5$ все равно необходимо, как правило, использовать более обстоятельные численные решения. Соответствующие формулы для коэффициентов вторых гармоник махового движения таковы:

$$\beta_{2c} = -\frac{\gamma\mu B}{144 + \gamma^2 B^8} \left[\mu\theta_0 \left(\frac{46}{3} + \frac{7}{144} \gamma^2 B^8 \right) B + \right. \\ \left. + \mu\theta_{кр} \left(12 + \frac{7}{180} \gamma^2 B^8 \right) B^2 - \mu\lambda_{ппу} \left(16 + \frac{7}{108} \lambda^2 B^8 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \gamma B^6 \lambda_x - 4B^2 \lambda_y \right].$$

$$\beta_{2s} = \frac{\gamma\mu B^3}{144 + \gamma^2 B^8} \left[\gamma\mu \left(\frac{25}{36} \theta_0 B^3 + \frac{8}{15} \theta_{кр} B^4 - \frac{5}{9} \lambda_{ппу} B^2 \right) - \right. \\ \left. - 4\lambda_x - \frac{1}{3} \gamma B^4 \lambda_y \right].$$

При расчете профильной мощности Бейли учитывал зависимость сопротивления сечения от угла атаки, но пренебрегал радиальными силами сопротивления. Возникающая в результате ошибка при малых скоростях может быть невелика (хотя нельзя получить правильное распределение углов атаки, задавая равномерное или линейное распределение индуктивной скорости), но при больших μ величина C_p оказывается заниженной.

Кастлс и Нью [С.42] обобщили теорию Уитли — Бейли, отказавшись от предположения о малости углов установки и притекания. Аэродинамические коэффициенты сечения они представили в виде $c_l = a \sin \alpha$ и $c_d = \delta_0 + \delta_1 \sin \alpha + \delta_2 \cos \alpha$. Это представление удобно тем, что $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ можно разложить следующим образом:

$$\sin \alpha = \sin(\theta - \varphi) = \sin \theta \cos \varphi - \sin \varphi \cos \theta, \\ \cos \alpha = \cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi.$$

Так как θ известно, $\sin \theta$ и $\cos \theta$ можно найти точно, а при больших углах притекания $\sin \varphi = u_p / (u_T^2 + u_p^2)^{1/2}$ и $\cos \varphi = u_T / (u_T^2 + u_p^2)^{1/2}$. Авторы рассматривали шарнирный винт, лопасти которого имеют неоперенную часть, произвольную крутку и произвольное распределение хорд. Влияние концевых потерь, срыва, сжимаемости и зоны обратного обтекания не учитывалось. Распределение индуктивных скоростей было принято линейным, а угол взмаха β — малым. Кастлс и Нью получили выражения для сил и моментов на втулке ($C_T, C_H, C_Y, C_Q, C_{M_x}$ и C_{M_y}) и трех коэффициентов махового движения (β_0, β_{1c} и β_{1s}).

Гессоу и Крим [G.61] также распространили теорию Уитли — Бейли на большие углы θ и φ . Они рассмотрели винт, имеющей нулевой относ. ГШ и линейно закрученные лопасти

с постоянной хордой. Пренебрегая сопротивлением при расчете нормальной силы, они получили $F_z \approx L \cos \varphi$. Предполагалось, что угол атаки $\alpha = \theta - \varphi$ должен быть мал, даже если углы установки и притекания велики. Опыт показывает, что при полете вертолета с большой скоростью в зоне обратного обтекания обычно возникает срыв. Поэтому авторы рассмотрели случай, когда в этой зоне лопасти обтекаются со срывом, и схематизировали условия срыва постоянными значениями c_l и c_d . Для моторного полета они полагали $c_l = 1,2$ и $c_d = 1,1$, а для авторотации $c_l = 0,5$ и $c_d = 0,1$. При этих предположениях Гессоу и Крим получили формулы для C_T , C_{Q_1} , C_{Q_0} , C_{P_0} и коэффициентов махового движения (до второй гармоник). Расчет по этим формулам в общем хорошо согласуется с численным решением, но при больших μ или C_T/σ результаты значительно расходятся.

Тэпскотт и Гессоу [Т.27] по формулам работы [G.61] построили графики коэффициентов махового движения (β_0 , β_{1c} , β_{1s} , β_{2c} и β_{2s}). По формулам той же работы были построены [G.67] графики характеристик в случае прямоугольной в плане лопасти с линейной круткой ($\theta_{кр} = 0, -8$ и -16°) в диапазоне $0,05 \leq \mu \leq 0,50$. Более подробно вычисление характеристик рассмотрено в гл. 6.

Гессоу и Крим [G.62] вывели уравнения махового движения на переходном режиме и предложили метод численного решения этих уравнений. Авторы рассматривали шарнирный винт с относом ГШ, а также винт с качающейся втулкой. Аэродинамические характеристики сечений были заданы в общем виде $c_l = c_l(\alpha, M)$ и $c_d = c_d(\alpha, M)$, а углы взмаха, притекания и установки не считались малыми. Уравнение махового движения выведено из условия равновесия моментов аэродинамических, инерционных, центробежных сил и веса. Численное решение было получено методом Рунге—Кутты с использованием ЦВМ. Работа [G.62] проводилась с целью исследования динамической устойчивости махового движения (при возмущении движения на переходном режиме) и аэродинамических характеристик несущего винта (при возмущении установившегося периодического решения). Численное решение позволяет исследовать аэродинамические характеристики сечений в общем виде с учетом влияния срыва, сжимаемости и зоны обратного обтекания (если имеются соответствующие характеристики сечений).

Гессоу [G.57] выполнил дальнейшее преобразование уравнений для численного определения аэродинамических характеристик несущих винтов применительно к использованию ЦВМ. Он заново вывел выражения для силы тяги, профильного сопротивления, мощности, момента тангажа и крена, касательной силы в комлевой части лопасти и коэффициентов махового движения. Был рассмотрен шарнирный винт с относом ГШ, у ло-

пастей которого крутка, а также распределения хорд и масс произвольны. Аэродинамические характеристики сечений лопасти были заданы в общей форме, предположения о малости углов установки и притекания не делалось, но угол взмаха считался малым. Гессоу учитывал угловые скорости тангажа и крена вертолета, но пренебрегал влиянием радиального течения. Уравнение махового движения сначала решалось относительно гармоник угла взмаха лопасти, а затем вычислялись аэродинамические силы и моменты относительно оси ГШ. Программа предусматривала расчет момента аэродинамических сил на протяжении оборота от $\psi = 0$ до $\psi = 360^\circ$. Затем производился гармонический анализ этого момента, и по гармоникам момента вновь определялись гармоники угла взмаха. Этот процесс повторялся до тех пор, пока решение не сходилось. Такой метод в противоположность методу простого численного интегрирования уравнений движения позволяет прямым путем получить установившееся периодическое решение. Более полное описание метода дано в разд. 14.2.

Тэннер [Т.13] разработал метод расчета характеристик на основе теории работы [G.62]. Сделаны следующие предположения: каждое сечение лопасти обтекается двумерным стационарным потоком, распределение индуктивных скоростей равномерное, влиянием радиального течения можно пренебречь, лопасть совершает только маховое движение как твердое тело вокруг оси отнесенного ГШ. Предположения о малости углов не делалось. Влияние срыва и сжимаемости учитывалось в аэродинамических характеристиках сечений. Уравнение махового движения численно интегрируется до тех пор, пока не будет получено установившееся периодическое решение. После этого интегрированием элементарных сил, действующих на лопасть, определяются силы и мощность несущего винта. Этим методом были получены [Т.14, Т.15] графики и таблицы аэродинамических характеристик несущих винтов для заданных величин характеристики режима работы винта ($0,25 \leq \mu \leq 1,40$), крутки ($\theta_{кр} = 0, -4$ и -8°) и конечного числа Маха ($0,7 \leq M_{1,90} \leq 0,9$). Более подробно результаты Тэннера рассмотрены в гл. 6.

Харрис [Н.48] оценил надежность расчетов махового движения, особенно коэффициента β_{1s} , при малых μ . По классической теории, предполагающей равномерное распределение индуктивных скоростей, коэффициент β_{1s} отрицателен, а его абсолютная величина мала и монотонно возрастает с увеличением μ . По экспериментальным же данным при малых скоростях полета ПКЛ значительно наклоняется вбок, причем наклон максимален при $\mu \approx 0,1$. В примере, рассмотренном Харрисом, эксперимент дает максимальный наклон $\beta_{1s} = -3,4^\circ$ при $\mu = 0,08$, а по классической теории $\beta_{1s} = -0,4^\circ$. Увеличение поперечного наклона ПКЛ связано с изменением индуктивной скорости на

диске винта в продольном направлении. Так как изменение индуктивной скорости в поперечном направлении влияет на коэффициент β_{1c} не столь существенно, теория, основанная на равномерном распределении индуктивных скоростей, позволяет вполне надежно рассчитать продольный наклон ПКЛ. Теоретические зависимости махового движения от общего шага и угла

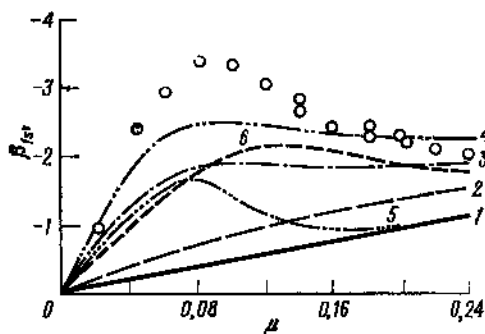


Рис. 5.39. Сопоставление экспериментальных величин поперечного наклона конуса лопастей с величинами, рассчитанными при $C_T/\sigma = 0,08$, $\alpha_{ПКЛ} = 1^\circ$ и различных распределениях индуктивных скоростей [Н.48].

1—равномерное распределение; 2—линейное распределение при $k_x = 2\mu$; 3—линейное распределение при $k_x = \text{tg}(\chi/2)$; 4—по вихревой теории для равномерно нагруженного диска; 5—по вихревой теории для неравномерно нагруженного диска; 6—распределение, индуцируемое следом заданной формы; ○—экспериментальные точки. Рисунок воспроизведен с разрешения Ф. Харриса и Американского вертолетного общества.

$k_x = \text{tg}(\chi/2)$ [С.78], 4) по вихревой теории для равномерно нагруженного диска [С.35], 5) по вихревой теории для неравномерно нагруженного диска [Н.84] и, наконец, 6) по теории, в которой распределение индуктивных скоростей было найдено численно по схеме следа, состоящего из дискретных вихрей заранее заданной формы (результаты вихревой теории винта рассмотрены в гл. 4). На рис. 5.39 видно, что учет неравномерности распределения индуктивных скоростей действительно приводит к более правильной оценке β_{1c} как по величине, так и по характеру изменения в зависимости от μ , но все-таки поперечный наклон ПКЛ получается существенно заниженным. Это наводит на мысль, что теория несущего винта не позволяет пока надежно рассчитать даже первые гармоники неравномерного распределения индуктивной скорости, которые определяют наклон ПКЛ. Харрис высказал предположение, что основной причиной остающихся расхождений является использование схемы

наклона вала винта также вполне надежны. Таким образом, расхождение теоретических и экспериментальных результатов обусловлено главным образом неравномерностью распределения индуктивных скоростей при полете вперед. Харрис сопоставил величины β_{1c} , полученные в эксперименте при малых μ , $C_T/\sigma = 0,08$ и $\alpha_{ПКЛ} = 1^\circ$, с величинами, рассчитанными по различным теориям: 1) с равномерным распределением индуктивных скоростей, 2) с линейным распределением при $k_x = 2\mu$, 3) с линейным распределением при

следа заранее заданной формы. Индуцируемые следом скорости сильно зависят от положения концевых вихрей, а на режиме малых μ след претерпевает значительные деформации вблизи диска из-за взаимной индукции вихрей. Таким образом, для повышения надежности расчетов потребуется уточнить и сделать более эффективными методы определения формы следа и индуктивных скоростей (дальнейшее обсуждение способов расчета формы следа и неравномерного распределения индуктивных скоростей см. в гл. 13).

Петерс и Ормистон [Р.55] распространили методы расчета установившегося махового движения на бесшарнирные винты и исследовали влияние различных элементов расчетной схемы на получаемое решение. В результате исследования они сделали следующие выводы относительно выбора расчетной схемы при анализе махового движения и нагрузок лопастей. Для надежного расчета n -й гармоники махового движения анализ должен охватывать все гармоники до m -й, где $m = n$ при $0 \leq \mu \leq 0,4$ и $m = n + 1$ при $0,4 \leq \mu < 1,0$. Зону обратного обтекания следует учитывать только при $\mu > 0,6$, неоперенную часть лопасти — только при $\mu > 1,0$, а концевые потери всегда важны. Сжимаемость воздуха имеет существенное значение, но при $M_{1,90} < 0,9$ достаточна простая поправка, получаемая для $r_{эф} = 0,75$. При $M_{1,90} > 0,9$ необходимо учитывать изменение числа Маха по радиусу и азимуту. Схема эквивалентной пружины и отбоя не вполне удовлетворительна при расчете формы изгиба бесшарнирного винта; гораздо предпочтительнее использовать реальные формы упругой консольно закрепленной лопасти. Для надежного расчета нагрузок и движения лопастей нужно учитывать лишь одну форму при $0 < \mu < 0,6$, две формы при $0,6 < \mu < 1,2$ и три формы при $1,2 < \mu < 1,6$. Эти выводы применимы также к шарнирным винтам, так как шарнирно подвешенную лопасть можно рассматривать как предельный случай консольно закрепленной гибкой лопасти.

В качестве дополнительной литературы о работе несущего винта при полете вперед можно рекомендовать: [К.45, М.162, G.86, G.88, S.64, G.90, W.46 — W.48, W.50, W.52 — W.55, B.52, S.34, S.169, W.56 — W.60, B.35, P.70, B.136, B.2, B.3, H.112, K.49, P.85, H.178, S.119, S.120, B.53, P.56, S.62, G.123, M.114, M.115, A.12, G.133, L.79, F.5, M.168, W.104, D.51, C.21, S.170, S.181, S.192, S.193, D.48, P.27 — P.30, P.32, P.35, P.37, A.17, T.28, B.122, C.37, G.63, J.64, J.67, H.61, M.6, M.48, G.64, R.3, Y.16, Y.19, H.181, J.9, P.90, A.42, M.11, S.218, E.5, J.2, N.24, H.46, H.47, M.59, N.23, C.73, M.13, B.127, P.4, Y.4, Y.5, L.2, R.69, C.7, C.8, J.18 — J.20, L.50, D.47, H.138, L.51, I.12, B.152, V.6, V.7, D.65, H.177, B.85, H.82, H.83, K.11, S.83, L.23, B.18, C.9, D.66, I.11, S.82, S.142, S.151, S.161, S.201, T.57]. Интерференции следа несущего винта со стенками аэродинамической трубы и поправкам на влияние

трубы посвящена следующая литература: [G.16, H.75, H.76, H.79, H.80, R.10, R.11, L.102, L.44, L.101, R.12]. Экспериментальные исследования аэродинамических нагрузок несущего винта описываются в работах: [M.108, R.1, R.4, M.101, B.166, D.89, H.17, H.18, H.181, S.19,—S.21, S.15, H.28, D.94, R.5, R.6, R.8, P.93, P.96, B.29, B.94, F.18, B.116, T.68, W.13, B.56, D.4, R.59, V.4, G.106, S.96, S.95, K.52, M. 151, S.87].

Аэродинамический расчет вертолета

Аэродинамический расчет вертолета сводится в основном к определению потребной и располагаемой мощностей в рассматриваемом диапазоне режимов полета. Данные о мощностях могут быть затем преобразованы в такие величины, как скороподъемность, потолок, дальность и максимальная скорость, которые определяют летно-технические характеристики вертолета. Потребную мощность можно представить суммой четырех частей: 1) индуктивной мощности, затрачиваемой на создание силы тяги винта, 2) профильной мощности, необходимой для вращения винта в воздухе, 3) затрат мощности на преодоление вредного сопротивления, т. е. на продвижение вертолета в воздухе, и 4) затрат мощности на набор высоты, т. е. на изменение потенциальной энергии вертолета. На режиме висения для преодоления вредного сопротивления мощность не затрачивается, а индуктивная мощность составляет $60 \div 70\%$ общих затрат. С увеличением скорости полета индуктивная мощность уменьшается, профильная слегка возрастает, а мощность, затрачиваемая на вредное сопротивление, увеличивается вплоть до того, что становится доминирующей при больших скоростях. Таким образом, потребная мощность велика на висении вследствие больших индуктивных затрат при приемлемой нагрузке на диск (хотя винт и малонагруженный), далее она сначала уменьшается с ростом скорости полета в результате уменьшения индуктивной мощности, а затем снова увеличивается, так как при больших скоростях велика мощность, затрачиваемая на преодоление вредного сопротивления. Потребная мощность минимальна приблизительно в середине диапазона скоростей вертолета.

Главной задачей в анализе характеристик вертолета является расчет нагрузок и мощности несущего винта. Методы такого расчета изложены в предшествующих главах. Существует два основных подхода к расчету аэродинамических характеристик несущего винта: метод тяг и метод мощностей. При использовании первого метода интегрируют элементарные силы, действующие в сечениях лопастей, и получают результирующие силы и аэродинамический крутящий момент несущего винта. Для этого нужно знать индуктивные скорости и движение лопастей, по которым находят распределение углов атаки. Затем из условий равновесия сил и моментов определяют балансирующие углы,

а по ним — силы и положение вертолета в пространстве, которые требуются для сохранения заданного режима полета. Другой способ состоит в том, что аэродинамические характеристики винта вычисляют для некоторого диапазона сил тяги и положений вертолета в пространстве, а затем строят серии графиков характеристик. В гл. 5 были выведены выражения силы тяги и крутящего момента винта через элементарные силы лопасти. Метод тяг, даже в его простейшем варианте, сложен, и потому он лучше подходит для численного решения. Он также весьма удобен при использовании наиболее усовершенствованных расчетных схем обтекания винта. С помощью метода тяг можно также построить только графики аэродинамических характеристик несущего винта, а затем использовать их для определения характеристик всего вертолета.

Второй метод расчета характеристик вертолета состоит в том, что потребную мощность выражают через определяемые по отдельности затраты энергии на вертолете. В гл. 5 условие баланса энергии было получено из условия равновесия сил и тем самым показано, что оба метода эквивалентны: получаемые ими результаты совпадают, если совпадают исходные предположения. По нескольким причинам метод мощностей удобнее для выполнения стандартных расчетов характеристик. Во-первых, равновесие сил, действующих на вертолет в продольной плоскости, уже было рассмотрено, так что мощность можно находить сразу, без необходимости определять балансирующие углы. Во-вторых, мощности, затрачиваемые на преодоление вредного сопротивления и на набор высоты, вычисляются по простым и в то же время точным формулам. Индуктивную же и профильную мощности можно определять отдельно, и применение соответствующих приближенных выражений не вызывает затруднений. Если использовать простейшие приближенные выражения, то метод мощностей позволяет рассчитать характеристики быстро и с приемлемой погрешностью, вследствие чего он очень удобен для расчетов на предварительной стадии проектирования. Для более обстоятельного анализа характеристик нужны уточненные формулы индуктивной и профильной мощностей, применение которых снова потребует расчета распределения углов атаки. Таким образом, численные методы тяг и мощностей даже с вычислительной точки зрения эквивалентны, хотя разделение всей требуемой мощности на индуктивную, профильную, мощность на преодоление вредного сопротивления и мощность на набор высоты полезно и при численном решении для интерпретации результатов.

Итак, аэродинамический расчет вертолета выполняют, вообще говоря, тремя способами: 1) методом мощностей с использованием весьма простых выражений для индуктивной и профильной мощностей, 2) с помощью графиков характеристик,

построенных на базе аналитических или численных решений, получаемых обычно методом тяг, и 3) численно с использованием расчетной схемы, выбираемой в зависимости от целей анализа и располагаемых возможностей. Численный анализ с использованием ЦВМ повсеместно вошел в практику расчетов на заключительной стадии проектирования. В настоящей главе приведена сводка методов аэродинамического расчета вертолета на режимах висения и полета вперед. Подробные выводы формул и описания методов расчета даны в различных местах, в частности в гл. 2 и 5, а в гл. 14 изложены численные методы. Затем рассмотрены величины, описывающие летно-технические характеристики вертолета, в том числе требуемую мощность, максимальную скорость, скорость набора высоты и спуска, потолок, дальность и продолжительность полета. Требование, чтобы вертолет имел определенные характеристики, в широком смысле означает способность наиболее эффективным образом выполнить конкретную задачу, а возможность рассчитать эти характеристики нужна не только для определения эксплуатационных возможностей вертолета, но и для исследования круга задач, которые он может выполнить. Глава завершается обсуждением описанных в литературе методов расчета характеристик и полученных результатов.

6.1. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ПОЛЕТЕ

6.1.1. ПОТРЕБНАЯ МОЩНОСТЬ НА РЕЖИМАХ ВИСЕНИЯ И ВЕРТИКАЛЬНОГО ПОЛЕТА

Коэффициент мощности, потребной для вертикального полета, был определен в виде $C_P = C_{P_i} + C_{P_0} + C_{P_c}$, где

$$C_{P_i} = \int_{r_0}^R \lambda_i c_{CT}, \quad C_{P_0} = \int_0^1 (\sigma c_{d_0}/2) r^3 dr, \quad C_{P_c} = \lambda_c C_T$$

соответственно коэффициенты индуктивной и профильной мощностей, а также мощности, затрачиваемой на набор высоты. В размерной форме это соотношение будет следующим:

$$P = P_i + P_0 + P_c = \int_{r_0}^{BR} (V + v) dT + \rho A (\Omega R)^3 C_{P_c}$$

Индуктивная мощность P_i — это рассеиваемая в единицу времени в следе несущего винта энергия, которую винт сообщает воздуху, отбрасывая его вниз. Реакция воздуха является подъемной силой винта. В гл. 2 и 3 с использованием импульсной теории были получены простейшие формулы для индуктивной мощ-

ности. Путем введения эмпирических поправок в формулы для индуктивной скорости на тех режимах обтекания, к которым импульсная теория неприменима, для суммы индуктивной мощности и мощности, затрачиваемой на набор высоты в вертикальном полете, был получен универсальный график зависимости $P/P_v = (V + v)/v_v$ от V/v_v , где $v_v^2 = T/(2\rho A)$ (рис. 3.8). На висении индуктивная скорость определяется соотношением $v = kv_v = k\sqrt{T/(2\rho A)}$, где k — эмпирический коэффициент, учитывающий дополнительные потери мощности (в основном концевые потери и потери, обусловленные неравномерностью протекания); в типичных случаях $k = 1,1 \div 1,2$ (см. разд. 3.1.3.1). Для вертикального полета несколько лучшую оценку индуктивной мощности можно получить по элементно-импульсной теории (см. разд. 2.5).

Профильная мощность P_0 — это энергия, рассеиваемая в единицу времени вследствие сопротивления лопастей при их движении в вязком воздухе. Грубая оценка коэффициента C_{P_0} была получена при использовании среднего по лопасти коэффициента сопротивления: $C_{P_0} = \sigma c_{d_0}/8$. Для более точной оценки этого коэффициента нужно интегрировать элементарные сопротивления по радиусу лопасти, используя реальные распределения углов атаки и чисел Маха по лопасти. Такие расчеты могут быть выполнены на базе элементно-импульсной теории.

Характеристики несущего винта на режиме висения можно представить в виде поляры винта — графика зависимости C_P от C_T . Для построения поляры обычно используют приближенную формулу

$$C_P = kC_T^{3/2}/\sqrt{2} + \sigma c_{d_0}/8$$

или

$$P = kT \sqrt{T/2\rho A} + \rho A (\Omega R)^3 (\sigma c_{d_0}/8)$$

Для построения поляры винта в вертикальном полете используется формула $C_P = (\lambda_i + \lambda_c)C_T + \sigma c_{d_0}/8$, причем при малых скоростях набора высоты или снижения $\lambda_i + \lambda_c \approx \lambda_v + \lambda_c/2$.

Теория элемента лопасти позволяет найти общий шаг. Для лопастей с линейной круткой и постоянной хордой при равномерном протекании справедливо соотношение

$$\theta_{0,75} = 6C_T/\sigma a + (3/2)\lambda.$$

При численном определении характеристик винта общий шаг фактически является параметром, по которому вычисляют C_P и C_T , получая затем поляру.

Эффективность работы несущего винта на висении измеряют коэффициентом совершенства

$$M = T \sqrt{T/2\rho A}/P = C_T^{3/2}/\sqrt{2} C_P.$$

который выражает отношение индуктивной и профильной мощностей. В типичных случаях профильная мощность составляет приблизительно 30% полной, а реальная индуктивная мощность — около 10%, так что $M \approx 0,6$.

6.1.2. НАБОР ВЫСОТЫ И СНИЖЕНИЕ

В разд. 3.3 была получена следующая формула для скорости набора высоты по вертикали при заданном избытке мощности:

$$V = (\Delta P/v_v)(2v_v + \Delta P/T)/(v_v + \Delta P/T).$$

Здесь по-прежнему $v_v^2 = T/2\rho A$, а ΔP — избыток мощности по сравнению с той, которая нужна для висения. Так как эта формула получена по импульсной теории, она применима и при малых скоростях снижения. Если скорость набора высоты или снижения мала, то формула упрощается: $V \approx 2\Delta P/T$. Таким образом, уменьшение индуктивной скорости вследствие увеличения потока сквозь винт при наборе высоты удваивает эффективность использования заданного избытка мощности.

В гл. 3 были рассмотрены способы расчета скорости вертикального спуска при авторотации винта на режиме турбулентного следа с помощью универсальной кривой индуктивной мощности. Авторотация реального винта определяется условием $P = T(V + v) + P_0 = 0$ или $(V + v)/v_v = -P_0/P_v$, откуда и находят скорость V/v_v спуска. В разд. 3.2 была получена приближенная формула, основанная на том, что на режиме турбулентного следа кривая индуктивной мощности аппроксимируется прямой линией, а профильная мощность считается такой же, как на висении. Эта формула имеет вид

$$V/v_v \approx - [1,71 + 0,29(1/M - k)].$$

6.1.3. РАСПОЛАГАЕМАЯ МОЩНОСТЬ

Располагаемая мощность определяется характеристиками силовой установки. Обычно мощность силовой установки снижается с ростом высоты и температуры, а также в какой-то мере зависит от скорости полета. Поэтому при расчете характеристик вертолета важны изменения располагаемой мощности. Следует также учитывать потери мощности в силовой установке и в трансмиссии, включая потери в редукторе и в системе охлаждения двигателя, а также мощность, затрачиваемую на привод вспомогательных агрегатов, таких, как генераторы и насосы гидросистемы. Часто все эти потери выражают посредством общего к. п. д. η , т. е. считают, что общая потребная мощность в $(1/\eta)$ раз больше той, которая требуется для вращения винта:

$$(P_{\text{потр}})_{\text{общ}} = \frac{1}{\eta} (P_{\text{потр}})_{\text{винт}}.$$

При типичных потерях в двигателе и системе привода $\eta = 0,91 \div 0,96$.

Кроме затрат мощности на отдельный несущий винт имеются еще дополнительные потери. Потери на аэродинамическую интерференцию несущих винтов и винта с фюзеляжем составляют значительную часть располагаемой мощности, особенно у вертолетов продольной схемы. У вертолетов одновинтовой схемы нужно учитывать также потери на рулевой винт. Расчет характеристик рулевого винта осложнен тем, что этот винт работает в следе несущего винта и фюзеляжа. Интерференция уменьшает эффективность рулевого винта; особенно увеличиваются его нагрузки и вибрации. При маневрировании по рыскаию рулевой винт может даже попасть в режим вихревого кольца, вследствие чего ухудшается управление и значительно усиливаются вибрации. Характеристики рулевого винта можно рассчитать, учитывая, что его сила тяги задана аэродинамическим моментом несущего винта, т. е. $T_{р.в} = Q/l_{р.в}$, где $l_{р.в}$ — плечо рулевого винта относительно вала несущего винта. Так как потребная мощность рулевого винта составляет малую часть общей мощности, а потери на интерференцию нужно как-то оценить, часто прибегают к весьма приближенным формулам. Потери на интерференцию между частями вертолета и потери на рулевой винт можно также учесть в общем к.п.д. η . При этом нужно рассчитать только затраты мощности на несущий винт, а полная потребная мощность определяется умножением этих затрат на коэффициент $1/\eta$. Если принять в расчет потери в силовой установке и в трансмиссии, а также потери на интерференцию и рулевого винта, то на режиме висения в типичном случае η составляет $0,80 \div 0,87$. При полете вперед η , как правило, больше, поскольку потери на интерференцию и на рулевой винт уменьшаются.

6.2. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРИ ПОЛЕТЕ ВПЕРЕД

6.2.1. ПОТРЕБНАЯ МОЩНОСТЬ ПРИ ПОЛЕТЕ ВПЕРЕД

В гл. 5 коэффициент аэродинамического крутящего момента несущего винта был получен в виде интеграла от лежащих в плоскости диска составляющих элементарных сил лопасти:

$$C_P = C_Q = \int_0^1 (1/2) \sigma r U^2 (c_l \sin \varphi + c_d \cos \varphi) dr,$$

где $U^2 = u_T^2 + u_P^2$ и $\varphi = \text{arctg}(u_P/u_T)$. Слагаемое, содержащее c_l , представляет собой ускоряющий момент, а слагаемое, содержащее c_d , — замедляющий. Отсюда было выведено уравнение ба-

ланса мощностей при полете вертолета вперед

$$C_P = C_{P_i} + C_{P_0} + C_{P_{вр}} + C_{P_c},$$

где коэффициенты индуктивной и профильной мощностей, а также мощностей, затрачиваемых на преодоление вредного сопротивления и набор высоты, вычисляются соответственно по формулам

$$C_{P_i} = \int_{r_0}^R \lambda_i dC_T, \quad C_{P_{вр}} = DV/[\rho A (\Omega R)^3],$$

$$C_{P_0} = C_{Q_0} + \mu C_{H_0}, \quad C_{P_c} = V_c W/[\rho A (\Omega R)^3].$$

Напомним, что при выводе этого уравнения предположение о малости углов не использовано (см. разд. 5.4 и 5.18). При полете вперед в баланс мощностей входит мощность $P_{вр} = DV$, затрачиваемая на преодоление сопротивления D вертолета, движущегося в воздухе.

В гл. 4 было выведено уравнение баланса мощностей $P = T(V \sin \alpha + v) = P_i + P_{вр} + P_c$ для случая полета вперед вертолета с идеальным винтом (без профильных потерь). На рис. 4.4 представлено решение этого уравнения, полученное по элементно-импульсной теории и экспериментальным данным в виде зависимости $P/P_{вр} = (V \sin \alpha + v)/v_{вр}$ от $V \cos \alpha/v_{вр}$ и $V \sin \alpha/v_{вр}$. По импульсной теории индуктивный коэффициент протекания при полете вперед равен

$$\lambda_i = C_T/2 \sqrt{\mu^2 + \lambda^2},$$

где $\lambda = \lambda_i + \mu \operatorname{tg} \alpha$. Для любых скоростей полета, кроме самых малых, выражение λ_i хорошо аппроксимируется формулой $\lambda_i \simeq C_T/2\mu$ (см. разд. 4.1.1). Эта формула очень полезна, так как в ней не фигурирует скорость набора высоты или снижения. Если еще ввести эмпирическую поправку k , то для коэффициента индуктивной мощности при полете вперед получается выражение $C_{P_i} = \lambda_i C_T = k C_T^2/2\mu$, т. е. $P_i = k T^2/2\rho A V$.

Коэффициент профильной мощности несущего винта был определен в разд. 5.12 в виде

$$C_{P_0} = \int_0^1 (\sigma c_{d_0}/2) (u_T^2 + u_R^2)^{3/2} dr.$$

Здесь учтено влияние зоны обратного обтекания, радиального течения и радиальной силы сопротивления. Если использовать средний коэффициент сопротивления сечений, то приходим к приближенной формуле

$$C_{P_0} \simeq \sigma c_{d_0} (1 + 4,6\mu^2)/8,$$

приемлемой при $\mu < 0,5$. При больших скоростях полета или больших нагрузках винта в расчетах профильной мощности необходимо учитывать влияние срыва и сжимаемости воздуха, а для этого требуется численное решение, включающее расчет распределения углов атаки по диску при полете вперед.

Если сопротивление фюзеляжа выразить через площадь эквивалентного сопротивления, т. е. положить $D = (1/2)\rho V^2 f$, то мощность, затрачиваемая на преодоление вредного сопротивления, будет равна $P_{вр} = DV = (1/2)\rho V^3 f$, или

$$C_{P_{вр}} = \frac{1}{2} \left(\frac{V}{\Omega R} \right)^3 \frac{f}{A} \approx \frac{1}{2} \mu^3 (f/A).$$

Если же площадь эквивалентного сопротивления не вводить, то $C_{P_{вр}} \approx \mu (D/W) C_T$.

Мощность, затрачиваемая на набор высоты, определяется соотношением $P_c = V_c W$, где $V_c = V \sin \theta_{тр}$ — скорость набора высоты, W — вес вертолета. Используя коэффициент $\lambda_c = V_c / (\Omega R)$, получаем

$$C_{P_c} = \lambda_c W / \rho A (\Omega R)^3 \approx \lambda_c C_T.$$

Таким образом, метод мощностей дает следующее выражение для коэффициента мощности, потребной при полете вперед:

$$C_P = k C_T^2 / 2\mu + \sigma c_{d_0} (1 + 4,6\mu^2) / 8 + \lambda_c C_T + f \mu^3 / 2A.$$

Отсюда можно найти мощность как функцию полетного веса или скорости полета. При малых скоростях полета коэффициент индуктивной мощности (первое слагаемое) нужно вычислять по формуле $C_{P_i} = k C_T^2 / 2 \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$, которая справедлива и на режиме висения. При больших скоростях полета допустимость пренебрежения влиянием срыва и сжимаемости становится сомнительной. Кроме того, при больших скоростях полета может стать неприемлемым предположение о малости углов, которое было сделано при выводе приближенных формул для мощностей, затрачиваемых на вредное сопротивление и набор высоты (последние два слагаемых). Но тогда приближенные формулы легко заменить точными.

6.2.2. НАБОР ВЫСОТЫ И СНИЖЕНИЕ ПРИ ПОЛЕТЕ ВПЕРЕД

При полете вперед индуктивная мощность по существу не зависит от наклона диска или от скорости набора высоты, так как $C_{P_i} \approx k C_T^2 / 2\mu$. Эта приближенная формула приемлема при $\mu > 0,1$ или при скоростях полета $V \geq 13 \div 18$ м/с. Профильная мощность не претерпевает значительных изменений при наборе высоты или снижении, если считать, что изменения в распределении углов атаки по лопасти невелики. Мощность, расходуемая на вредное сопротивление, также мало меняется при изме-

нении высоты, если пренебречь зависимостью продольной силы от угла атаки. Таким образом, при полете вперед только мощность $P_c = V_c W$ существенно зависит от скорости набора высоты или снижения. Поэтому потребную мощность можно представить в виде

$$P = P_i + P_0 + P_{вр} + P_c \simeq (P_i + P_0 + P_{вр})_{V_c=0} + P_c = P_{гор} + P_c,$$

откуда находим скорость набора высоты

$$V_c = (P - P_{гор})/W = \Delta P/W.$$

Здесь $P_{гор}$ — мощность, требуемая для горизонтального полета при заданных силе тяги и скорости, а ΔP — располагаемый избыток мощности. Следовательно, характеристики набора высоты или снижения при полете вперед можно определить, зная располагаемую мощность и мощность, требуемую для горизонтального полета. При малых скоростях полета необходимо учитывать изменение индуктивной мощности в зависимости от скорости набора высоты (так как в вертикальном полете $V_c \simeq \simeq 2\Delta P/T$).

6.2.3. ВЫРАЖЕНИЕ ПОТРЕБНОЙ МОЩНОСТИ ЧЕРЕЗ D/L

Потребную мощность можно выразить через эквивалентное сопротивление D , определяемое равенством $P = DV$. Следовательно, $D = D_i + D_0 + D_{вр} + D_c$ или, если почленно разделить это выражение на подъемную силу винта,

$$(D/L)_{полн} = (D/L)_i + (D/L)_0 + (D/L)_{вр} + (D/L)_c,$$

где $L = T \cos \alpha$ — подъемная сила винта (при больших углах атаки нужно использовать формулу $L = T \cos \alpha + H \sin \alpha = W \cos \theta_{тр}$, так что отношение D/L не зависит от выбора плоскости отсчета). Отношение сопротивления несущего винта к его подъемной силе определяется равенством

$$(D/L)_{винт} = (D/L)_i + (D/L)_0.$$

Заметим, что отношение эквивалентного сопротивления к подъемной силе можно также записать следующим образом:

$$D/L = P/VL = P/TV \cos \alpha = C_p/\mu C_T.$$

Теперь представим отношения индуктивного, профильного, вредного сопротивлений и сопротивления при наборе высоты к подъемной силе в виде

$$(D/L)_i = C_{P_i}/\mu C_T \simeq k C_T/2\mu^2,$$

$$(D/L)_0 = C_{P_0}/\mu C_T \simeq \sigma c_{d_0} (1 + 4,6\mu^2)/8\mu C_T = 3c_{d_0} (1 + 4,6\mu^2)/4\mu \bar{c}_l,$$

$$(D/L)_{вр} = P_{вр}/VL = D_{вр}/W \cos \theta_{тр},$$

$$(D/L)_c = P_c/VL = VW \sin \theta_{тр}/VW \cos \theta_{тр} = \operatorname{tg} \theta_{тр},$$

причем при расчете профильного сопротивления взят средний коэффициент $\bar{c}_l = 6C_T/\sigma$. Написанные выражения примут простой вид, если коэффициент индуктивной мощности и мощности, затрачиваемой на вредное сопротивление, представить через коэффициент подъемной силы винта, определяемый равенством $C_L = 2L/(\rho V^2 A)$. Тогда

$$(D/L)_i = [T^2/2\rho AV]/LV \simeq L/2\rho AV^2 = C_L/4,$$

$$(D/L)_{вр} = DV/LV = \rho V^2 f/2L = f/AC_L.$$

Первое соотношение выражает просто относительное индуктивное сопротивление круглого крыла с удлинением $\lambda = 4/\pi$ и отношением сопротивления к подъемной силе $D_i/L = C_{D_i}/C_L = C_L/\pi\lambda = C_L/4$. Таким образом, имеем следующее выражение потребной мощности через коэффициент C_L :

$$(D/L)_{полн} = C_L/4 + (D/L)_0 + f/(AC_L) + \text{tg } \theta_{вр}.$$

Зная полетный вес и скорость полета, можно рассчитать C_L . Затем с помощью простой формулы типа приведенной выше (или графиков характеристик винта) можно найти профильные потери $(D/L)_0$, после чего расчет потребной мощности по существу заканчивается. Этот способ расчета характеристик был разработан для автожиров. Так как несущий винт автожира играл роль крыла, в расчетах фигурировал коэффициент C_L подъемной силы винта. Поэтому во многих ранних работах профильная мощность выражалась через $(D/L)_0$. Однако для вертолетов этот способ не очень подходит, так как выражение отношения сопротивления к подъемной силе $D/L = C_P/(\mu C_T)$ на режиме висения обращается в бесконечность.

6.2.4. ПОДЪЕМНАЯ СИЛА И СОПРОТИВЛЕНИЕ НЕСУЩЕГО ВИНТА

Расчетные и экспериментальные характеристики несущего винта часто представляют в виде подъемной силы L и сопротивления X , определяемых как проекции результирующей силы винта на оси скоростной (поточной) системы координат (рис. 6.1). Коэффициенты C_L и C_X этих сил связаны с коэффициентами силы тяги и продольной силы, определяемых относительно какой-либо плоскости отсчета (например, плоскости вращения), соотношениями

$$C_L = C_T \cos \alpha + C_H \sin \alpha, \quad C_X = C_H \cos \alpha - C_T \sin \alpha.$$

Заметим, что здесь $C_L = L/\rho A (\Omega R)^2$, т. е. определения C_L в этом и предыдущем разделах различны. Расчетные и экспериментальные результаты обычно представляют в виде C_L/σ и C_X/σ . Пропульсивная сила (ПС) несущего винта равна силе X , взятой с обратным знаком.

Эквивалентное сопротивление несущего винта определим равенством

$$D_{\text{винт}} = P/V - \text{ПС} = P/V + X.$$

Отношение $(L/D)_{\text{винт}}$ подъемной силы винта к его эквивалентному сопротивлению служит удобной характеристикой эффективности работы винта при больших скоростях. Пропульсивная

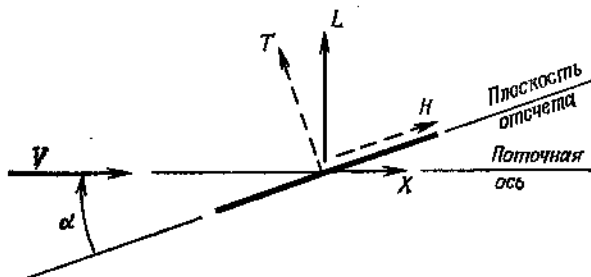


Рис. 6.1. Подъемная сила и сопротивление несущего винта.

сила несущего винта должна быть равна вредному сопротивлению вертолета, т. е. $\text{ПС} = -X = D_{\text{вр}}$. Отсюда отношение определенного здесь эквивалентного сопротивления к подъемной силе равно

$$(D/L)_{\text{винт}} = (P/V - D_{\text{вр}})/L = (D/L)_{\text{полн}} - (D/L)_{\text{вр}}.$$

Эта формула согласуется с данным в предыдущем разделе определением

$$(D/L)_{\text{винт}} = (D/L)_i + (D/L)_0.$$

Использование скоростной системы координат позволяет непосредственно связать параметры, фигурирующие на графиках характеристик винта, с параметрами режима полета. Полетный вес вертолета определяет в этом случае потребную подъемную силу винта, а вредное сопротивление вертолета — пропульсивную силу.

6.2.5. ВЫРАЖЕНИЕ ПОТРЕБНОЙ МОЩНОСТИ ЧЕРЕЗ ОТНОШЕНИЕ P/T

Для вертолетов потребную мощность удобнее выразить через отношение мощности к силе тяги P/T . Основное отличие от представления через отношение эквивалентного сопротивления к подъемной силе $D/L = P/VL$ состоит в том, что выражение для P/T не обращается в бесконечность на режиме висения. Вместо этого выражения возьмем отношение соответствующих коэффициентов $C_P/C_T = P/\Omega RT$, так что

$$C_P/C_T = (C_P/C_T)_i + (C_P/C_T)_0 + (C_P/C_T)_{\text{вр}} + (C_P/C_T)_c.$$

Входящие в правую часть слагаемые вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}(C_P/C_T)_i &= \lambda_i \simeq kC_T/2\mu, \\ (C_P/C_T)_0 &\simeq \sigma c_{d_0} (1 + 4,6\mu^2)/8C_T = 3c_{d_0} (1 + 4,6\mu^2)/4\bar{c}_l, \\ (C_P/C_T)_{\text{вр}} &= D_{\text{вр}}V/\Omega RT = \mu D_{\text{вр}}/W, \\ (C_P/C_T)_c &= V_c W/\Omega RT \simeq \lambda_c.\end{aligned}$$

6.3. ЛЕТНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕРТОЛЕТА

6.3.1. ЛЕТНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА ВИСЕНИИ

Характеристики несущего винта на режиме висения можно представить в виде зависимости C_P от C_T с общим шагом в качестве параметра. График этой зависимости называют *полярной винта* (рис. 6.2). При малых

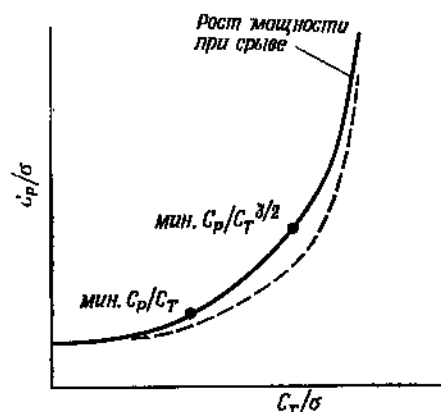


Рис. 6.2. Поляры несущего винта на висении.

— вне влияния земли; - - - - на воздушной подушке.

величинах силы тяги доминирующую роль играет профильная мощность, при умеренных величинах силы тяги C_P растет как $C_T^{3/2}$ вследствие увеличения индуктивной мощности, а при больших силах тяги профильная мощность резко возрастает вследствие срыва потока с лопастей. Максимальному коэффициенту совершенства винта соответствует точка, в которой отношение $C_P/C_T^{3/2}$ минимально; в этой точке поляра касательна к кривой $C_P/C_T^{3/2} = \text{const}$. Не будь срыва, максимум коэффициента совершенства винта достигался бы при очень больших величинах силы тяги, т. е. при очень больших нагрузках на диск, при которых M приближается к 1 вследствие увеличения индуктивной мощности. Однако вследствие влияния срыва на профильную мощность максимум M достигается при величине C_T/σ , немного превосходящей ту, при которой начинается срыв. Минимальным затратам мощности на единицу силы тяги соответствует точка, в которой прямая, проходящая через начало координат, касается поляры.

Потребная мощность на режиме висения возрастает с полетным весом: индуктивная мощность (которая на висении со-

ставляет наибольшую часть полной мощности) изменяется пропорционально $W^{3/2}$. Плотность воздуха уменьшается с увеличением высоты и температуры. В результате этого уменьшается профильная мощность вследствие уменьшения сил сопротивления на лопастях, но возрастает индуктивная мощность из-за увеличения эффективной нагрузки на диск. Если не рассматривать очень малых нагрузок на диск, то рост индуктивной мощности превалирует над уменьшением профильной, так что полная потребляемая мощность возрастает с высотой и температурой. На полюсу несущего винта влияет также близость земли. При малых расстояниях от земли потребляемая мощность при том же полетном весе меньше (рис. 6.2).

6.3.2. МИНИМАЛЬНАЯ УДЕЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ НА ВИСЕНИИ

Рассмотрим теперь нагрузку на диск, при которой несущий винт будет иметь на режиме висения минимальную удельную мощность. Если профильных потерь нет, то минимум достигается при $T/A = 0$, т. е. при нулевой индуктивной мощности. Если учесть профильную мощность, то удельную мощность на висении можно записать в виде

$$P/T = k\sqrt{T/2\rho A} + (\sigma c_{d_0}/8) [\rho A (\Omega R)^3/T],$$

или

$$C_P/C_T = k\sqrt{C_T/2} + \sigma c_{d_0}/8C_T.$$

Считая C_P/C_T функцией C_T [при постоянной концевой скорости это эквивалентно тому, что P/T есть функция $T/\rho A$], найдем, что минимум достигается при

$$C_T = (\sigma c_{d_0}/k)^{2/3}/2.$$

Этому значению C_T соответствует точка, в которой $P_I = 2P_0$, так что

$$C_P/C_T = 3C_{P_0}/C_T = (3/4)(k^2\sigma c_{d_0})^{1/3}.$$

В размерной форме экстремальная нагрузка на диск равна

$$T/A = (1/2)\rho (\Omega R)^2 (\sigma c_{d_0}/k)^{2/3}.$$

При заданном полетном весе эта нагрузка определяет оптимальный радиус несущего винта. С увеличением профильной мощности оптимальная нагрузка на диск возрастает, а значит, радиус винта уменьшается. Экстремальной нагрузке соответствует коэффициент совершенства винта

$$M = T \sqrt{T/2\rho A}/P = \sqrt{2} C_T^{3/2}/C_P = 2/3k.$$

Таким образом, при минимальной удельной мощности коэффициент M постоянен и определяется только величиной эмпириче-

ской поправки k , вводимой в выражение индуктивной мощности. При $k = 1,15$ имеем $M = 0,58$. Обычно вертолеты проектируют на величину M , которая несколько превышает это значение при расчетном полетном весе. Из условия $M = \text{const}$ следует, что основным соотношением между размерами и потребной мощностью будет $P \sim W^{3/2}$. Это оптимальное соотношение определяет нагрузку на диск, которая несколько меньше обычно используемой, так как выбор нагрузки на диск определяется не только величиной удельной мощности, но и другими соображениями. Кривая зависимости P/T (а значит, веса двигателя и топлива) от T/A очень полого вблизи минимума, так что конструктор имеет некоторую свободу в выборе радиуса винта. Вес лопастей и привода обычно убывает с уменьшением радиуса. Поэтому вертолеты проектируют, как правило, так, чтобы нагрузка на диск превышала указанную здесь оптимальную величину. Если учитывать вес по элементам системы, то оптимальная нагрузка на диск сильно зависит от удельного веса двигателя (вес, приходящийся на единицу мощности) и от удельного расхода топлива.

При определении нагрузки на диск, обеспечивающей минимум удельной мощности, концевая скорость и коэффициент заполнения считались постоянными. Если считать постоянной величину C_T/σ , то требуемое заполнение равно

$$\sigma = (c_d/k)^2/8 (C_T/\sigma)^3.$$

Эта величина обычно весьма мала. Тот же результат получится, если искать минимум удельной мощности как функции от C_T/σ , считая σ по-прежнему постоянным. С другой стороны, можно рассмотреть оптимум P/T при заданной нагрузке на диск. В этом случае индуктивная мощность постоянна, а профильная мощность будет минимальной при минимальном значении $\sigma(\Omega R)^3$. Если еще ограничить C_T/σ , то величина $\sigma(\Omega R)^2 = [T/\rho A]/(C_T/\sigma)$ должна быть постоянной, и

$$\sigma(\Omega R)^3 = [\sigma T/\rho A C_T] \Omega R = [\sigma T/\rho A C_T]^{3/2} \sigma^{-1/2}.$$

Эта функция не имеет абсолютного минимума, если не рассмотреть дополнительно вес системы по элементам. Видно, однако, что желательно иметь малую концевую скорость и большой коэффициент заполнения.

6.3.3. МОЩНОСТЬ, ПОТРЕБНАЯ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ПОЛЕТА

На рис. 6.3 приведен схематический график изменения мощности, потребной для горизонтального полета вертолета, в зависимости от скорости его полета. Индуктивная мощность P_i доминирует на висении, но быстро убывает со скоростью. Профильная мощность P_0 слегка возрастает с увеличением скорости. Потери на вредное сопротивление $P_{вп}$ пренебрежимо малы при

малых скоростях, но растут как V^3 и при больших скоростях становятся доминирующими. Поэтому полная потребная мощность велика на висении, достигает минимума в середине диапазона скоростей вертолета и снова возрастает при больших скоростях вследствие роста вредных потерь. При очень больших скоростях срыв и сжимаемость воздуха вызывают также рост профильной мощности. Воздушная подушка значительно уменьшает потребную мощность на режимах висения и очень малых скоростей полета, но при больших скоростях ее влияние невелико. Полетный вес влияет главным образом на индуктивную мощность, пока нагрузка не возрастет настолько, что возникает срыв, который вызывает рост профильной мощности. Для различных летательных аппаратов вредное сопротивление увеличивается с полетным весом, причем f примерно пропорциональна $GW^{2/3}$, так что мощность, затрачиваемая на вредное сопротивление, растет пропорционально размерам вертолета.

Для любого заданного

веса летательного аппарата существует скорость полета, при которой потребная мощность минимальна. Режим минимальной потребной мощности имеет важное значение, так как ему соответствуют наибольшая продолжительность полета, наибольшая скороподъемность и наименьшая скорость снижения. Скорость, при которой мощность минимальна, легко определить по кривой потребной мощности (рис. 6.4). Для аналитической оценки рассмотрим выражение для коэффициента потребной мощности при полете вперед

$$C_p = kC_T^2/2\mu + \sigma c_{d_0}(1 + 4,6\mu^2)/8 + f\mu^3/2A.$$

Так как увеличение профильной мощности невелико, точку минимальной мощности определяют, по существу, изменения индуктивной мощности и мощности, затрачиваемой на вредное сопротивление. Пренебрегая изменением C_p и отыскивая минимум C_p как функции μ , получим экстремальное значение

$$\mu = [kC_T^2/(3f/A)]^{1/4} = \lambda_v [4k/(3f/A)]^{1/4},$$

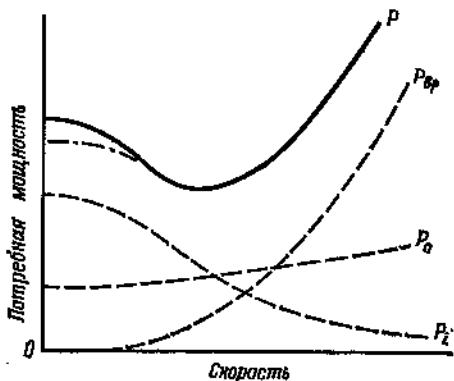


Рис. 6.3. Кривая мощности, потребной вертолету для горизонтального полета на заданной высоте с заданным полетным весом. — вне влияния земли; --- на воздушной подушке.

или

$$V = v_n [4k/(3f/A)]^{1/4},$$

где по-прежнему $v_n^2 = T/2\rho A$. При этом экстремальном значении $P_i = 3P_{вр}$, а типичные значения скорости V составляют $31 \div 36$ м/с. Скорость, соответствующая минимальной мощ-

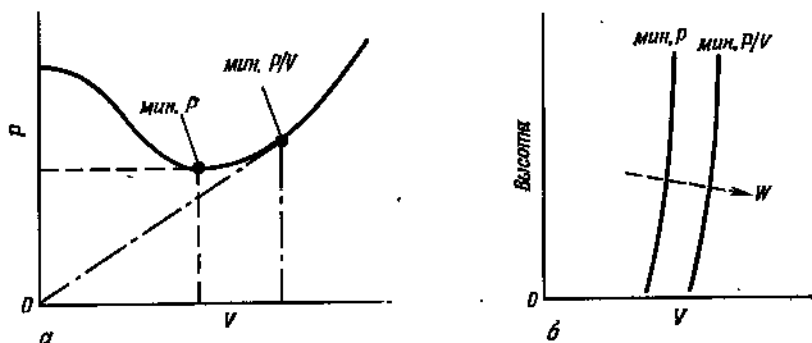


Рис. 6.4. Скорости, соответствующие минимальным значениям P и P/V .

a—определение V по кривой потребляемой мощности; *б*—изменение скорости с высотой и полетным весом.

ности, возрастает с высотой и полетным весом, так как она пропорциональна v_n (рис. 6.4).

Представляет также интерес скорость, соответствующая минимуму отношения P/V . При этой скорости достигаются наибольшая дальность и наилучший угол снижения. Точку минимума P/V легко найти на кривой потребляемой мощности—это точка, в которой касательная к кривой проходит через начало координат (рис. 6.4).

6.3.4. НАБОР ВЫСОТЫ И СНИЖЕНИЕ

Скорость набора высоты по вертикали можно рассчитать по заданному избытку мощности, используя формулы разд. 6.1.2. При малых скоростях полета, типичных для вертолета, $V_c \approx \approx 2\Delta P/T$. Следовательно, увеличение полетного веса приводит к уменьшению скорости подъема по вертикали вследствие множителя T^{-1} и роста мощности, требуемой для висения. Скорость набора высоты падает с увеличением высоты и температуры, так как возрастает мощность, необходимая для висения, и уменьшается располагаемая мощность двигателя. Высота, на которой эта скорость обращается в нуль, определяет максимальную высоту висения—статический потолок.

Скорость безмоторного (на авторотации) снижения по вертикали можно рассчитать по формулам разд. 6.1.2 и гл. 3. Так как

эта скорость пропорциональна v_v , она возрастает с увеличением полетного веса и высоты.

Скорость набора высоты или снижения при полете вперед приближенно вычисляется по формуле $V_c = (P_{раск} - P_{гор})/W = \Delta P/W$ (влияние скорости набора высоты на индуктивную скорость при выводе этой формулы не учитывалось). Максимальный угол набора высоты достигается при максимальном значении отношения $V_c/V = \Delta P/(WV)$. Если вертолет может висеть на данной высоте при заданном полетном весе, то максимальный угол набора высоты равен 90° . Если высота больше статического потолка, то скорость, соответствующая максимальному углу набора высоты, находится в диапазоне между минимальной скоростью и скоростью, при которой мощность минимальна. С увеличением полетного веса минимальная потребная мощность возрастает, а значит, максимальная скорость набора высоты уменьшается. Уменьшается она и с высотой. Точка, в которой максимальная скорость набора высоты равна нулю, определяет абсолютную максимальную высоту полета — динамический потолок.

Скорость снижения на авторотации при полете вперед вычисляется по простой формуле $V_{ск} = P_{гор}/W$. Следовательно, скорость снижения минимальна при скорости полета, которой соответствует минимальная потребная мощность. Эта минимальная скорость, как правило, приблизительно вдвое меньше скорости снижения на авторотации по вертикали. Угол снижения, определяемый величиной отношения $V_{ск}/V = P/WV$, минимален при минимуме отношения P/V в горизонтальном полете. Обычные значения этого угла составляют от 30 до 45° (угол отсчитывается от горизонтали). При отказе двигателя на больших высотах летчик выводит вертолет на режим установившейся авторотации при скорости полета, которой соответствует минимальная скорость снижения. Вблизи земли летчик осуществляет «подрыв», сводя вертикальную и горизонтальную скорости к нулю непосредственно перед приземлением. Если отказ двигателя происходит на малых высотах, то времени для выхода на режим установившегося снижения обычно не хватает. При отказе двигателя на висении оптимальным будет снижение по вертикали. Характеристики авторотации рассмотрены подробнее в разд. 7.5.

6.3.5. МАКСИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ

Максимальная и минимальная скорости вертолета определяются точками пересечения кривых потребной и располагаемой мощностей при заданных полетном весе и высоте (рис. 6.5). При $V > V_{макс}$ располагаемая мощность недостаточна для горизонтального полета. Если вертолет способен висеть, то $V_{мин} = 0$, но при увеличении полетного веса или высоты располагаемая

мощность может оказаться недостаточной и для висения, так что $V_{\text{мин}} > 0$. Однако максимальную скорость вертолета может ограничивать не только нехватка мощности. Максимум скорости часто определяет срыв на отступающей лопасти или проявление сжимаемости воздуха на наступающей лопасти, вследствие которых при больших скоростях возникают сильная тряска и большие нагрузки винта. Эти ограничения скорости подробнее рассмотрены в разд. 7.4. Максимальную скорость, определяемую

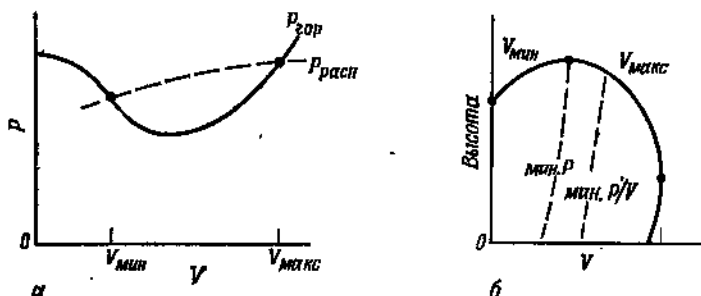


Рис. 6.5. Максимальная и минимальная скорости вертолета: а—определение $V_{\text{макс}}$ и $V_{\text{мин}}$ по кривой потребной мощности; б—влияние высоты.

запасом мощности, можно найти, пренебрегая изменением индуктивной и профильной мощностей по сравнению с ростом мощности, затрачиваемой на вредное сопротивление. В результате получим

$$V_{\text{макс}} = \left[\frac{2}{\rho f} (P_{\text{расп}} - P_i - P_0) \right]^{1/3},$$

или

$$V_{\text{макс}} = \left[(2A/f) ((C_P)_{\text{расп}} - C_{P_i} - C_{P_0}) \right]^{1/3}.$$

Если потребные мощности на режимах максимальной скорости и висения приблизительно одинаковы (равновесно спроектированный вертолет), то $P_{\text{расп}} - P_i - P_0 \simeq P_v - P_0 \simeq (P_i)_v = T \sqrt{T/2\rho A}$, откуда $V_{\text{макс}} \simeq v_v (4A/f)^{1/3}$. Максимальную скорость можно поднять главным образом путем увеличения мощности силовой установки или уменьшения вредного сопротивления. Однако мощность, затрачиваемая на вредное сопротивление, растет пропорционально V^3 , так что для значительного роста максимальной скорости нужно сильно изменить сопротивление вертолета или мощность его двигателя. Затрачиваемая на вредное сопротивление мощность убывает с увеличением высоты полета, поэтому сначала максимальная скорость может возрастать. Но затем вследствие уменьшения плотности воздуха располагаемая мощность снижается, и тогда максимальная скорость будет убывать с высотой. Если высота превышает статический потолок, то

минимальная скорость конечна. При дальнейшем увеличении высоты максимальная и минимальная скорости (а также соответствующие им потребные мощности) сближаются и при достижении динамического потолка совпадают (рис. 6.5).

6.3.6. МАКСИМАЛЬНАЯ ВЫСОТА ПОЛЕТА

Динамический потолок вертолета — это по определению высота, на которой максимальная располагаемая мощность равна потребной мощности, так что на большей высоте устойчивый горизонтальный полет невозможен (рис. 6.5). Динамический потолок определяют также как высоту, на которой скорость набора высоты обращается в нуль. Так как достичь потолка с меньших высот можно только асимптотически, часто более удобно рассматривать практический потолок, определяемый как высота, на которой скорость набора высоты имеет некоторую малую, но конечную величину (обычно 0,5 м/с). Основные факторы, ограничивающие потолок, — это падение мощности двигателя с высотой, увеличение потребной мощности с высотой и полетным весом, а также изменение потребной мощности в зависимости от скорости полета.

Для вертолетов особый интерес представляют три максимальные высоты. Максимальная высота висения вне влияния земли (статический потолок) определяется как высота, на которой вся располагаемая мощность равна мощности, потребной для висения при заданном полетном весе. Другим таким параметром является максимальная высота висения на воздушной подушке. Поскольку вблизи земли потребная индуктивная мощность уменьшается, максимальная высота висения на воздушной подушке значительно превышает статический потолок. Увеличение максимальной высоты или полетного веса в случае висения на воздушной подушке дает некоторые преимущества при эксплуатации вертолета. Кроме того, интерес представляет максимальная высота, достигаемая при полете вперед со скоростью, соответствующей минимальной мощности. Эти высоты получают, определяя скорости набора высоты при максимальной мощности. Экстраполяция расчетных или полученных в летных испытаниях кривых до нулевой скорости набора высоты позволяет найти динамический потолок.

6.3.7. ДАЛЬНОСТЬ И ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ПОЛЕТА

Дальность полета на заданном режиме при данном полетном весе вычисляют интегрированием удельной дальности dR/dW_T по всему весу топлива на борту вертолета:

$$R = \int (dR/dW_T) dW_T.$$

Аналогично продолжительность полета получают интегрированием удельной продолжительности dE/dW_T :

$$E = \int (dE/dW_T) dW_T.$$

Удельные дальность и продолжительность связаны с удельным расходом топлива c_e в двигателе соотношениями

$$dR/dW_T = V/Pc_e, \quad dE/dW_T = 1/Pc_e,$$

причем c_e измеряют в кг/(л·с·ч). Вообще говоря, dR/dW_T и dE/dW_T изменяются в течение полета, даже если режим полета оптимальный. Кроме того, мощность зависит от высоты и полетного веса, а c_e — от мощности и высоты. Поэтому для точного определения дальности и продолжительности полета указанные выражения нужно интегрировать численно. Однако, поскольку полный вес топлива обычно составляет небольшую часть полетного веса вертолета, интегралы можно найти приближенно, принимая удельные дальность и продолжительность равными их значениям в середине пути, где полетный вес равен разности первоначального (взлетного) веса $W_{взл}$ и половины веса топлива, т. е. $W_{с.п} = W_{взл} - W_T/2$. Тогда

$$R = W_T [V/Pc_e]_{с.п}, \quad E = W_T (Pc_e)_{с.п}^{-1}.$$

Скорости полета, при которых дальность или продолжительность полета максимальны, можно найти, рассматривая удельные дальность и продолжительность как функции скорости. Если считать, что c_e не зависит от скорости (на самом деле это не так, поскольку c_e зависит от потребляемой мощности), то минимальный расход топлива на единицу дальности, а значит, наибольшая дальность достигаются при скорости, которая соответствует минимуму P . Максимальная продолжительность полета будет при скорости, соответствующей минимуму P/V . Скорости полета, обеспечивающие минимальный расход топлива, более точно находят по графикам зависимости $c_e P$ от скорости при заданных полетном весе и высоте. Скорости наибольшей продолжительности полета соответствует точка минимума кривой $c_e P$, а скорости наибольшей дальности — точка, в которой касательная к этой кривой проходит через начало координат (как на рис. 6.4).

Если предположить, что P/T , скорость и c_e не зависят от массы вертолета, то дальность и продолжительность полета можно найти аналитически. В этом случае имеем

$$dW_T/dR = Pc_e/V = W Pc_e/TV = (W_{взл} - W_T) Pc_e/(TV).$$

При сделанных предположениях интегрирование этого уравнения дает формулу Бреге для расчета дальности полета:

$$R = - [TV/Pc_e] \ln(1 - W_T/W_{взл}).$$

Аналогично находим формулу для расчета продолжительности полета:

$$E = - [T/(Pc_e)] \ln(1 - W_T/W_{взл}).$$

Так как величина $c_e(P/T)$ предполагалась постоянной, эти выражения учитывают только тот факт, что по мере выгорания топлива полетный вес, а значит, и расход топлива уменьшаются.

На рис. 6.6 представлена схематическая диаграмма зависимости полезной нагрузки от дальности полета. Точке *A* соответствует максимальная дальность полета при максимальных полетном весе и запасе топлива. При том же полетном весе можно перевезти несколько большую полезную нагрузку, если уменьшить запас топлива, т. е. сократить дальность полета. Дальность полета можно слегка увеличить при максимальном запасе топлива, если уменьшить полезную нагрузку, так как уменьшение полетного веса снижает расход топлива.

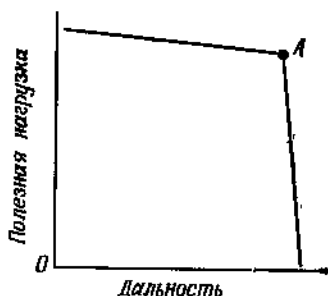


Рис. 6.6. Диаграмма зависимости полезной нагрузки от дальности полета.

6.4. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

6.4.1. ЗАДАННАЯ МОЩНОСТЬ (АВТОЖИР)

Рассмотрим горизонтальный полет винтокрылого аппарата при заданной мощности P . Индуктивная и профильная мощности несущего винта определены скоростью полета и полетным весом, так что мощность $P_{вр}$, затрачиваемая на преодоление вредного сопротивления, вычисляется по формуле $P_{вр} = P - (P_i + P_0)$. Положив $P_{вр} = DV$, получим

$$D = [P - (P_i + P_0)]/V,$$

где D — сопротивление фюзеляжа. С другой стороны, D представляет собой пропульсивную силу несущего винта на данном режиме полета. При $D < 0$ несущий винт создает не пропульсивную силу, а сопротивление, которое должно быть преодолено вспомогательным двигателем. Если рассматривать поток через винт, то условие $D < 0$ соответствует наклону диска винта назад. При этом набегающий поток обтекает винт снизу вверх, сообщая ему добавочную энергию, которая необходима в том случае, когда сумма $P_i + P_0$ больше мощности P на валу винта.

Особый случай винтокрылого аппарата с фиксированной мощностью на валу — это автожир, у которого $P = 0$. Поэтому пропульсивная сила, необходимая для преодоления сопротивления винта, определяется формулой $D = -(P_i + P_0)/V$. Эту формулу можно представить через отношения сопротивления к подъемной силе

$$- [D/(W \cos \theta_{\text{тр}})] = (D/L)_i + (D/L)_0 = (D/L)_{\text{винт}}.$$

Таким образом, несущий винт автожира по своему действию очень похож на крыло самолета, которое создает подъемную силу, преодолевая индуктивное и профильное сопротивления.

6.4.2. ЗАДАННЫЙ УГОЛ НАКЛОНА ВАЛА (РУЛЕВОЙ ВИНТ)

Если угол наклона вала фиксирован, то решение уравнений характеристик позволяет определить требуемую мощность и пропульсивную силу винта. Силы и моменты, необходимые для балансировки винта, находят из условий балансировки всего летательного аппарата. Наиболее привычным примером винта с заданным углом наклона вала (который равен углу атаки $\alpha_{\text{пв}}$ плоскости вращения) является рулевой винт. Сопротивление рулевого винта включают во вредное сопротивление вертолета.

Сила сопротивления винта $D = T\alpha_{\text{пв}} - H_{\text{пв}}$ (по-прежнему считается, что $D \geq 0$ в случае пропульсивной силы). Так как угол между силой тяги и плоскостью концов лопастей близок к прямому, имеем

$$D = T[\alpha_{\text{пв}} + (\beta_{1c})_{\text{пв}}] - H_{\text{пкл}} \simeq T[\alpha_{\text{пв}} + (\beta_{1c})_{\text{пв}}].$$

Следовательно, чтобы найти сопротивление или пропульсивную силу винта при фиксированном угле $\alpha_{\text{пв}}$ наклона вала, нужно знать продольный наклон конуса лопастей, т. е. угол $(\beta_{1c})_{\text{пв}}$. Таким образом, расчет характеристик требует решения уравнения махового движения лопастей. Для рулевого винта характерны отсутствие циклического шага и сильное регулирование взмаха. Эти факторы должны быть учтены при решении уравнения махового движения и вычислении угла $(\beta_{1c})_{\text{пв}}$. После того как пропульсивная сила D найдена, требуемую мощность вычисляют по формуле $P = P_i + P_0 + P_{\text{вр}}$, причем $P_{\text{вр}} = DV$.

Рулевой винт увеличивает общую требуемую мощность двояким образом: непосредственными затратами мощности на рулевой винт и затратами мощности на несущий винт, которые необходимы для преодоления вредного сопротивления, образуемого сопротивлением рулевого винта. Таким образом, общая мощность, затрачиваемая рулевым винтом, определяется выражением

$$P_{\text{общ}} = P_{\text{р.в}} + P_{\text{сопр}} = (P_i + P_0 + P_{\text{вр}})_{\text{р.в}} + (\Delta P_{\text{вр}})_{\text{л.в.}}$$

Однако мощность, затрачиваемая рулевым винтом на вредное сопротивление, равна $(P_{вр})_{р. в} = DV$, а дополнительные затраты мощности на несущий винт, необходимые для преодоления сопротивления рулевого винта, составляют $(\Delta P_{вр})_{н. в} = -DV$. Следовательно $P_{общ} = (P_i + P_0)_{р. в}$.

Общие затраты мощности на рулевой винт не зависят от сопротивления рулевого винта, которое лишь устанавливает распределение общих затрат мощности между несущим и рулевым винтами. Поэтому характеристики вертолета можно рассчитывать, пренебрегая сопротивлением или пропульсивной силой рулевого винта. В результате такого пренебрежения слегка изменится наклон диска несущего винта, найденный из условия равновесия сил в продольной плоскости, но зато не будет необходимости рассматривать маховое движение лопастей рулевого винта при расчете ориентации плоскости их концов.

6.5. УТОЧНЕННЫЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Произвольный несущий винт с любыми распределениями хорд и профилей лопасти, а также с любой круткой требует более обстоятельного анализа. Такой анализ должен быть применим не только к обычным, но и к экстремальным режимам полета, в том числе режимам больших нагрузок и больших скоростей. Мощности, затрачиваемые на набор высоты и вредное сопротивление, можно определить точно, предполагая, что угол наклона траектории полета и вредное сопротивление известны (т. е. предполагая, что ориентацию винта можно точно найти из условий равновесия сил и моментов, действующих на вертолет). Таким образом, уточнение аэродинамического расчета вертолета достигается в основном посредством уточнения расчета индуктивной и профильной мощностей. Имеем

$$C_{P_i} = \int \lambda_i dC_T, \quad C_{P_0} = \int (\sigma c_d/2) (u_T^2 + u_R^2)^{3/2} dr.$$

Усовершенствование оценки индуктивной мощности заключается главным образом в учете неравномерного распределения индуктивных скоростей, хотя имеет значение и точное распределение нагрузки. Оценку профильной мощности улучшают, рассматривая реальные распределения углов атаки и чисел Маха сечений лопасти. Заметим, что для расчета распределения углов атаки нужно найти неравномерное распределение индуктивных скоростей и решить уравнения движения лопасти. На экстремальных режимах полета нельзя ограничиться рассмотрением махового движения лопасти как твердого тела, необходимо учитывать и другие степени свободы лопасти. Таким образом, уточненный аэродинамический расчет — это сложная задача, которую можно решить только численно и которая требует обстоятельного

знания конструктивных особенностей несущего винта и его аэродинамики. Кроме того, различные усовершенствования метода должны быть взаимно согласованы, так как уточнение в одной области не принесет пользы, если не отказаться от соответствующих приближенных допущений в других областях.

Некоторые усовершенствования теории сохраняют возможность аналитического определения характеристик. Например, если коэффициент сопротивления сечения задать в виде $c_d = \delta_0 + \delta_1\alpha + \delta_2\alpha^2$, то расчет профильной мощности будет уточнен и в то же время соответствующие интегралы можно найти аналитически. Но получаемые формулы оказываются все-таки весьма сложными, и потому результаты часто представляют в виде графиков характеристик, построенных для какого-либо типичного винта. Вследствие сложности аэродинамики несущего винта большинство методов расчета характеристик, кроме тех, которые основаны на простейших формулах, сопряжено с большим объемом вычислений. Поэтому результаты таких расчетов удобно и экономично представлять в виде графиков или таблиц характеристик. Если использовать быстродействующие ЦВМ, то численный анализ характеристик практически приемлем и для конкретных винтов. Такой анализ необходим, когда в нем учитываются многие конкретные особенности данного винта, такие, как форма лопасти в плане и набор ее профилей.

6.6. ЛИТЕРАТУРА

Эту главу мы завершим обсуждением методов расчета характеристик, описанных в литературе. Расчетные схемы, на которых основаны эти методы, были рассмотрены в разд. 5.24.

Бейли [В.4] разработал метод расчета характеристик, в котором сила тяги винта, аэродинамический крутящий момент и профильная мощность представлены в виде функций θ_0 и λ_{pp} . Коэффициенты в выражениях этих функций зависят от крутки лопастей, массовой характеристики лопасти, коэффициента концевых потерь, коэффициентов δ_0 , δ_1 и δ_2 , определяющих профильное сопротивление сечения, и от характеристики режима работы винта. Бейли рассматривал шарнирный винт без отнoса шарниров, имеющий линейно-закрученные лопасти постоянной хорды. В расчетной схеме была учтена зона обратного обтекания (с точностью до μ^4), а аэродинамические коэффициенты сечений представлены в виде $c_l = a\alpha$ и $c_d = \delta_0 + \delta_1\alpha + \delta_2\alpha^2$. Распределение индуктивных скоростей предполагалось равномерным, влияние срыва, сжимаемости воздуха и радиального течения не учитывалось. Метод был разработан для автожиров, что отразилось в предложенной последовательности расчета и в форме представления результатов. Исходными данными служили параметры несущего винта, скорость полета, а также либо вредное сопро-

тивление, либо потребная мощность (для автожира $C_p = 0$). В качестве независимых параметров можно было использовать θ_0 или C_T , так как соотношение между ними было линейным. Рассмотрим здесь задачу о расчете характеристик автожира. При заданных величинах общего шага и характеристики режима работы винта условие $C_Q = 0$ превращается в квадратное уравнение относительно $\lambda_{ппу}$. Решив это уравнение, можно найти C_T и C_{P_0} . Индуктивная мощность определяется по формуле $C_{P_i} = kC_T^2/2\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$, а затем по формуле $(D/L)_{\text{винт}} = (D/L)_i + (D/L)_0$ можно найти сопротивление несущего винта. Угол наклона вала (точнее, угол $\alpha_{ппу}$) можно определить, зная $\lambda_{ппу}$ и λ_i . Наконец, имеются формулы, выражающие коэффициенты махового движения через θ_0 и $\lambda_{ппу}$. Методом Бейли можно рассчитать и характеристики вертолета, но при этом требуются последовательные приближения. Для заданных величин силы тяги, скорости и вредного сопротивления методом баланса энергии определяется коэффициент C_p потребной мощности. В первом приближении C_{P_0} можно рассчитать по простейшей формуле. Если C_p известно, то формула этого коэффициента опять-таки дает квадратное уравнение относительно $\lambda_{ппу}$. Решив это уравнение и зная θ_0 и $\lambda_{ппу}$, можно заново рассчитать профильную мощность по формуле Бейли, а затем из условия равенства мощностей найти новую величину общей потребной мощности. Эти вычисления повторяют до тех пор, пока мощность (а также $\lambda_{ппу}$) не перестанет изменяться. Таким образом, даже метод Бейли сопряжен с большим объемом вычислений, так как при заданных C_T и C_p нужно решить два уравнения относительно θ_0 и $\lambda_{ппу}$, а для вертолета необходимы еще последовательные приближения. Численного интегрирования можно избежать, построив теоретические графики характеристик для типичного вертолета (т. е. с типичными круткой, массовой характеристикой лопасти, коэффициентом концевых потерь и коэффициентами δ_0 , δ_1 и δ_2) в широком диапазоне характеристик режима работы винта. С помощью этих графиков задачу о расчете характеристик конкретного вертолета можно быстро решить графически. Для построения графиков характеристик на основе теории Бейли коэффициент мощности и крутку лопасти можно выбирать произвольно. Из уравнения $C_Q = C_p$ при различных значениях μ и θ_0 находят величины $\lambda_{ппу}$, а по ним рассчитывают коэффициенты силы тяги и профильной мощности. В результате получают графики C_{P_0}/σ как функции C_T/σ для заданных значений C_p/σ и $\theta_{кр}$ по параметрам μ и θ_0 , ⁷⁵. Сам Бейли занимался автожирами и по этой причине рассматривал не мощности, а отношения сопротивлений к подъемной силе, т. е. строил графики $(D/L)_0$ как функции C_L/σ для заданных $(D/L)_{\text{полн}}$ (равном нулю) и $\theta_{кр}$ (рис. 6.7). В задаче

о расчете характеристик вертолета полная мощность неизвестна, так что требуются еще последовательные приближения, но их выполняют графически, а не численно. Наибольшая трудность при таком графическом решении состоит в необходимости интерполирования между графиками при расчете полной мощности. Графики характеристик строят для конкретного набора параметров несущего винта, но влияние массовой характеристики лопасти оказалось малым. При указанном выборе переменных влияние коэффициента заполнения винта также невелико. Из оставшихся параметров наиболее важен градиент крутки, так что для каждого значения этого параметра нужно

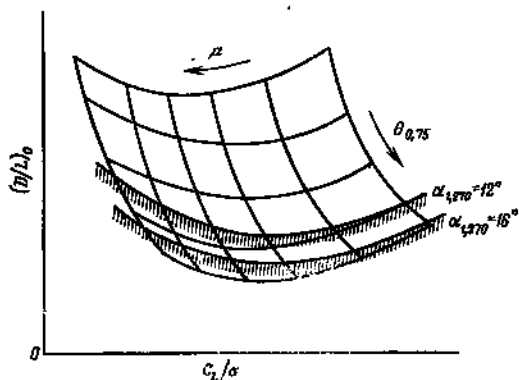


Рис. 6.7. Графики характеристик несущего винта по Бейли [В.4].

Зависимость эквивалентного профильного сопротивления винта от подъемной силы при постоянных $(D/L)_{\text{полн}}$ и $\theta_{кр}$.

строить отдельные серии графиков. На таких графиках (рис. 6.7) строят также кривые, соответствующие углам атаки $\alpha_{1,270} = 12^\circ$ и 16° . Эти кривые указывают предельные по срыву режимы работы винта (см. гл. 16).

В работах [В.6, Г.128] представлены графики характеристик вертолета, полученные по теории Бейли. Графики имеют вид, аналогичный рис. 6.7, и построены при $\theta_{кр} = 0$ и -8° . Заметим, что в указанных работах отношение $(D/L)_{\text{полн}} = [P/TV]_{\text{полн}}$ обозначено через P/L . Некоторые из этих графиков приведены также в книге [Г.66].

Гессоу и Тэпскотт [Г.67] представили графики характеристик, построенные по теории работы [Г.61]. Графики изображают зависимость C_{P_d}/C_T от C_P/C_T для заданных величин μ и $\theta_{кр}$ по параметрам $2C_T/(\sigma\alpha)$ и $\theta_{0,75}$ (рис. 6.8). Параметр μ изменяется от 0,05 до 0,50, параметр $\theta_{кр}$ принимает значения 0, -8 и -16° . Расчеты проведены для $\gamma = 15$, но результаты с приемлемой погрешностью можно использовать в диапазоне $0 \leq \gamma \leq 25$. Кроме того, принятая модель лопасти имеет прямоугольную в плане форму, но графики годятся и для трапециевидных лопастей с эквивалентным коэффициентом заполнения. Аэродинамические коэффициенты сечений описывались формулами $c_l = 5,73\alpha$ и $c_d = 0,0087 - 0,0216\alpha + 0,4\alpha^2$. Характеристики вер-

толета определялись с помощью уравнения баланса мощностей, в котором все члены отнесены к C_T . Если заданы сила тяги и скорость полета, то можно рассчитать коэффициенты индуктивной мощности, а также мощностей, затрачиваемых на вредное сопротивление и набор высоты. Затем на оси абсцисс откладывали величину $(C_{P_i} + C_{P_{вр}} + C_{P_c})/C_T$ и через полученную точку проводили прямую с наклоном 2:1 (если бы масштабы по осям координат были одинаковыми, то наклон прямой был бы 45°). Точка пересечения прямой с графиком определяет при данном C_T величины коэффициентов профильной и полной мощностей, так как $C_P = C_{P_i} + C_{P_{вр}} + C_{P_c} + C_{P_o}$. График

дает и общий шаг $\theta_{0,75}$. Гессоу и Тэпскотт построили также графики зависимости $2C_T/(\sigma a)$ от $\lambda_{ппу}$ и $\theta_{0,75}$, по которым можно найти угол $\alpha_{ппу}$ атаки диска. В качестве характеристик срыва они использовали углы $\alpha_{1,270}$

(для моторного полета) и $\alpha_{\mu+0,4,270}$ (для спуска на авторотации). Углы 12 и 16° считаются критериями зарождающегося и развитого срыва соответственно (см. гл. 16). На графики характеристик наносятся линии, соответствующие этим критериям (рис. 6.8). Строятся также отдельные графики, на которых те же критерии срыва представляются в виде ограничений, налагаемых на отдельные характеристики вертолета, в частности скорость, силу тяги и пропульсивную силу (т. е. наклон диска несущего винта). Кривые, соответствующие срыву, определяют также границы применимости результатов расчетов, так как влияние срыва на характеристики профилей теории не учитывается.

Позднее Гессоу и Тэпскотт [G.68] на базе теории, изложенной в работах [G.62, G.57], составили таблицы и графики для расчета характеристик несущего винта, включая режимы полеты при срыве. Расчеты были проведены для шарнирного винта с прямоугольными в плане лопатями, линейно закрученными на -8° . Были использованы стационарные аэродинамические характеристики профиля NASA 0015, которые позволяют учесть влияние срыва. Коэффициенты махового движения, сила тяги, мощность, профильная мощность и сила H представлялись как функции $\theta_{0,75}$ и $\lambda_{ппу}$ в диапазоне $0,1 \leq \mu \leq 0,5$.

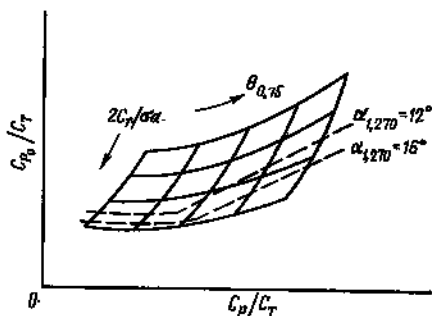


Рис. 6.8. Графики характеристик несущего винта по Гессоу и Тэпскотту [G.67].

Зависимость профильной мощности от полной мощности при постоянных μ и $\theta_{кр}$.

Тэннер [Т.14, Т.15] разработал таблицы и графики, численно определив характеристики несущего винта с учетом влияния срыва и сжимаемости воздуха без предположения о малости углов. Расчеты выполнены по теории, изложенной в работах [Т.13, G.62]. В этой теории приняты следующие допущения: аэродинамические коэффициенты сечений лопасти совпадают с экспериментальными коэффициентами профиля в стационарном потоке, распределение индуктивных скоростей равномерное, радиальным течением можно пренебречь, лопасть абсолютно жесткая и совершает только маховое движение. Расчеты проведены

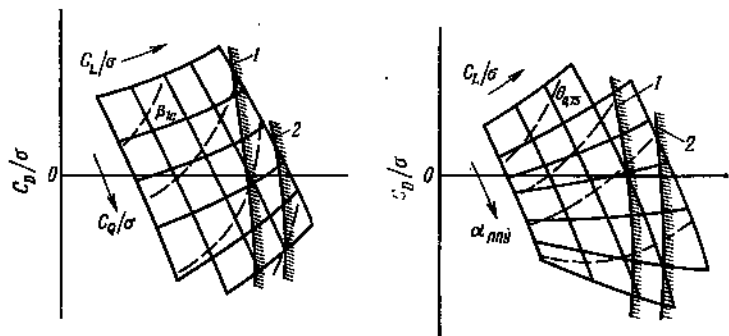


Рис. 6.9. Графики характеристик несущего винта по Тэннеру [Т.14, Т.15].

Связь между подъемной силой и сопротивлением в поточной системе координат при постоянных μ , $\theta_{кр}$ и $M_{1,90}$. 1 — нижняя граница срыва.

для винта с коэффициентом заполнения $\sigma = 0,1$, имеющего прямоугольные в плане лопасти, у которых неоперенная часть доходит до $r_0 = 0,25$, коэффициент концевых потерь B составляет 0,97, а массовая характеристика γ равна 8. Коэффициенты подъемной силы и сопротивления сечений взяты для профиля NASA 0012. Результаты расчетов представлены в виде графиков зависимости коэффициента сопротивления C_D/σ винта от коэффициента его подъемной силы C_L/σ в поточных осях (см. разд. 6.2.4). На рис. 6.9 показано, как выглядят эти графики. Они соответствуют значениям характеристики режима работы винта μ от 0,25 до 1,40, концевому числу Маха наступающей лопасти $M_{1,90}$ от 0,7 до 0,9 и линейной крутке лопасти при $\theta_{кр} = 0, -4$ и -8° . Такие графики позволяют быстро найти характеристики вертолета. Действительно, сопротивление вертолета и его полетный вес определяют C_D/σ и C_L/σ , а, зная эти величины, по графикам легко найти требуемую мощность, общий шаг, продольный наклон β_{1c} конуса лопастей и угол атаки $\alpha_{1пп}$ диска. При такой форме представления результатов влияние коэффициента заполнения невелико, но Тэннер предложил способ введения поправок на коэффициент заполнения в вели-

чины $\alpha_{\text{ППУ}}$ и C_D/σ . На графиках показаны также границы срыва, рассчитанные по максимальной величине профильной части крутящего момента за время оборота, т. е. по величине

$$C_{Q_0}/\sigma = \left(\frac{1}{2} \int_0^1 c_d u_T^2 r dr \right)_{\text{макс}} \text{ по } \psi.$$

Возникновение срыва проявляется в быстром росте этого параметра на той стороне диска, где лопасть отстывает. Граница, за которой проявление срыва становится значительным, названа *нижней границей срыва* и определена условием $(C_{Q_0}/\sigma)_{\text{макс}} = 0,004$ (рис. 6.9). Верхняя граница срыва, за которой работа вертолета нежелательна, определяется условием $(C_{Q_0}/\sigma)_{\text{макс}} = 0,008$. Тэннер на основе элементарно-импульсной теории построил графики характеристик вертолета на режиме висения (зависимости C_T/σ от C_P/σ). Результаты представлены также в виде таблиц, в которых помимо параметров, фигурирующих на графиках, даны величины коэффициента протекания и коэффициентов махового движения (до третьей гармоники).

В работе [К.42] приведены графики аэродинамических характеристик вертолета при полете вперед, основанные на численном определении нагрузок винта и махового движения. При выполнении расчетов не использовано предположение о малости углов, учтено влияние срыва, сжимаемости воздуха и зоны обратного обтекания, а в качестве характеристик сечений лопасти взяты экспериментальные аэродинамические коэффициенты профиля (NACA 0012) в стационарном потоке. Распределение индуктивных скоростей предполагалось равномерным, эффекты радиального течения и динамического срыва не учитывались. Расчеты были выполнены для винта с прямоугольными в плане линейно-закрученными лопастями при следующих значениях параметров: коэффициент заполнения $\sigma = 0,062$ (рассмотрено введение поправки на заполнение), массовая характеристика лопасти $\gamma = 7,6$, неоперенная часть до $r_0 = 0,2$, коэффициент концевых потерь $B = 0,97$, относ горизонтальных шарниров

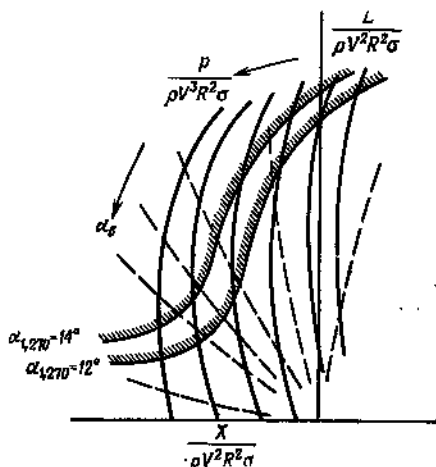


Рис. 6.10. Графики характеристик несущего винта по работе [К.42].

Связь между подъемной силой и сопротивлением в поточной системе координат при постоянных V , ΩR и $\psi_{\text{кр}}$.

$e = 0,0226$. Графики характеристик, описывающие зависимости между подъемной силой и сопротивлением винта (отношенными к $\rho V^2 R^2 \sigma$) в поточных осях при заданных величинах скорости полета, концевой скорости лопастей и градиента крутки (рис. 6.10), построены для скоростей полета V от 26 до 154 м/с, концевых скоростей ΩR от 91 до 244 м/с (т. е. для $0,2 \leq \mu \leq 1,5$ и $0,64 \leq M_{1, \infty} \leq 0,98$, причем наибольшая часть кривых соответствует режимам больших скоростей и больших чисел M) и значений градиента крутки $\theta_{кр} = -4, -8, -12^\circ$. При заданных скорости полета и концевой скорости полетный вес и сопротивление вертолета определяют на графиках характеристик точку, по которой находят потребную мощность и угол наклона вала винта. На графиках нанесены также границы срыва — кривые, которым соответствуют значения угла атаки концевой сечения отступающей лопасти $\alpha_{1, 270} = 12$ и 14° .

Расчету и экспериментальному определению характеристик вертолета посвящены также работы: [Н.112, Н.178, S.120, W.4, G.122, G.123, C.32, D.50, D.51, G.132, G.133, G.135, M.114, T.4, T.5, A.57, L.79, L.94, F.5, G.65, T.50, C.16, G.53, G.58, S.170, C.20, H.44, C.17, C.18, S.179, P.25, D.48, D.49, P.80, P.81, M.70, S.92, S.93, F.42, J.14, M.16, P.83, C.65, M.48, G.64, J.12, S.88, S.89, S.90, S.104, S.215, R.2, R.3, B.79, J.7, J.11, S.94, S.216, S.217, H.181, M.12, S.205, S.218, W.111, E.5, J.2, L.97, N.94, P.62, S.14, D.18, H.46, H.47, N.23, S.198, C.73, M.13, P.8, S.165, T.19, T.20, C.47, P.4, P.5, C.30, C.31, L.2, L.91, L.92, S.166, C.45, L.32, P.99, S.147, B.34, B.46, F.47, G.79, L.18, L.77, W.39, D.24, G.75, G.76, K.33, N.13, S.85, Y.13, K.29, M.142, M.143, M.144, P.7, S.42, S.79, S.80, S.137, W.98, W.100, S.30, S.77, S.78, Y.6, L.23, L.119, M.82, M.137, S.43, W.36, W.37, B.18, B.104, K.32, M.151, S.82, S.202].

Проектирование вертолета

7.1. ТИПЫ НЕСУЩИХ ВИНТОВ

Тип несущего винта вертолета определяется в основном конструкцией комлевой части лопасти и ее крепления к втулке. Конструкция комлевой части лопасти решающим образом влияет на движение лопасти в плоскостях взмаха и вращения и, следовательно, на характеристики управляемости вертолета, его вибрации, нагрузки и аэроупругую устойчивость. Различие типов несущих винтов определяется наличием или отсутствием ГШ и ВШ, а значит, и тем, совершает ли лопасть поворот как жесткое тело или имеют место изгибные деформации ее комлевой части.

Лопасты шарнирного несущего винта соединяются с втулкой с помощью ГШ и ВШ. Ось ГШ несколько отнесена от оси вращения винта вследствие конструктивных ограничений, а также для улучшения характеристик управляемости вертолета. ВШ должен быть отнесен от оси винта для того, чтобы вал мог передавать на винт крутящий момент. Назначение ГШ и ВШ состоит в снижении нагрузок на лопасть (поскольку изгибающий момент в шарнире равен нулю). При наличии ВШ необходимо иметь механический демпфер качания во избежание вызываемой земным резонансом неустойчивости взаимосвязанных качаний лопастей и движения втулки в плоскости вращения. Шарнирный несущий винт представляет собой классическое конструктивное решение проблемы нагрузок на комлеву часть лопасти и моментов на втулке. Его концепция проста, а анализ движения жесткой лопасти не представляет затруднений. Однако шарнирный винт механически сложен, так как у каждой лопасти имеются три шарнира (ГШ, ВШ и ОШ) и демпфер ВШ. Подшипники ГШ и ВШ передают одновременно силу тяги и центробежную силу лопасти на втулку и поэтому работают в очень напряженных условиях. Вблизи втулки располагаются автомат перекоса и вращающиеся и неподвижные элементы проводки управления. Таким образом, втулка требует большого объема работ по техническому обслуживанию и вносит существенный вклад во вредное сопротивление вертолета. В последнее время начали применяться эластомерные шарниры. При замене ими механических подшипников проблема технического обслуживания сильно упрощается.

Винт типа качалки (с качающейся втулкой) — это несущий винт с двумя лопастями, образующими жесткое тело, соединенное с втулкой посредством одного общего ГШ. Лопастей обычно имеют конструктивный угол конусности для разгрузки от постоянных составляющих сил; общий ГШ иногда располагается выше лопастей для снижения нагрузок от кориолисовых сил. Лопастей имеют ОШ. При отсутствии ВШ лопасти должны воспринимать нагрузки в плоскости вращения. Конструкция лопастей воспринимает также те нагрузки в плоскости взмаха, которые не устраняются наличием конструктивного угла конусности. Для восприятия этих нагрузок винт-качалка должен иметь более высокие прочность и массу, чем в случае шарнирного несущего винта. Этот недостаток компенсируется простотой конструкции. Единственный ГШ не воспринимает уравнивающих друг друга центробежных сил лопастей. Такая конструкция является наиболее простой и легкой для небольшого вертолета. Однако она не подходит для больших вертолетов, поскольку для получения необходимой величины коэффициента заполнения лопасти должны иметь очень большую хорду.

Несущий винт на кардане (карданный винт) обычно имеет три или более лопастей, соединенных с втулкой при помощи одного ОШ (ГШ и ВШ отсутствуют), втулка же соединяется с валом посредством универсального (карданного) шарнира. По существу, винт на кардане является многолопастным аналогом винта-качалки и как таковой имеет преимущество, заключающееся в простоте конструкции втулки сравнительно с шарнирными несущими винтами. У винта-качалки и винта на кардане ось ГШ совмещена с осью вала, вследствие чего собственная частота махового движения лопастей совпадает с частотой оборотов винта. В этом случае улучшение характеристик управляемости, связанное с отношением ГШ, не может быть реализовано. Невозможен, например, полет с перегрузкой, меньшей единицы или нулевой, поскольку эффективность управления и демпфирование несущего винта прямо пропорциональны его силе тяги. Для повышения собственной частоты махового движения (до значений, достижимых на шарнирных винтах) применяется пружинная загрузка во втулке, однако в случае винта-качалки она приводит к появлению больших переменных нагрузок на втулке с частотой 2Ω . Движение лопастей в плоскости вращения у винта-качалки и винта на кардане обычно соответствует движению жесткого тела с собственной частотой выше частоты оборотов винта.

На бесшарнирном несущем винте, который также называют жестким, лопасти соединены с втулкой консольно, часто при помощи одного только ОШ; ГШ и ВШ отсутствуют. Движения

лопасти в плоскостях взмаха и вращения происходят за счет упругости их комлевых частей. Поскольку жесткость конструкции лопасти невелика по сравнению с жесткостью, создаваемой центробежными силами, форма махового движения значительно отличается от формы движения жесткой шарнирной лопасти, а частота его ненамного превышает частоту оборотов винта (обычно для бесшарнирных винтов $\nu = 1,1 - 1,2$). В зависимости от конструкции комлевой части различают лопасти, нежесткие в плоскости вращения (собственная частота движения в плоскости вращения ниже частоты оборотов) и жесткие в плоскости вращения (собственная частота выше частоты оборотов). В отсутствие шарниров может иметь место значительная взаимосвязь движений лопасти в плоскостях взмаха, вращения и относительно ОШ, что приводит к существенно иным характеристикам аэроупругости, нежели для шарнирных лопастей. Бесшарнирный несущий винт способен создавать большой момент на втулке при наклоне плоскости концов лопастей; этот момент сильно влияет на характеристики управляемости вертолета, поскольку повышаются эффективность управления и демпфирование, а также возрастает реакция винта на аэродинамические возмущения. Бесшарнирный несущий винт прост по конструкции, что обуславливает низкое вредное сопротивление втулки и облегчает техническое обслуживание. Однако для восприятия моментов на втулке прочность ее и комлевой части лопасти должна быть высокой. В некоторых конструкциях бесшарнирных винтов ОШ также отсутствуют. Изменение шага лопасти при этом происходит за счет деформации нежесткой на кручение комлевой части лопасти.

Большинство несущих винтов имеет ОШ, позволяющий лопасти изменять угол установки при воздействии управления общим и циклическим шагами. В этой наиболее распространенной конструкции подшипник ОШ работает в очень тяжелых условиях. Он должен передавать центробежную силу и силу тяги лопасти, совершающей периодическое установочное движение при воздействии управления циклическим шагом. Поэтому вместо подшипников иногда используются эластомерные соединения, что упрощает конструкцию. Применяется упомянутый выше способ изменения угла установки лопасти путем крутильной деформации комлевой части или использования лент, работающих на растяжение и кручение, для соединения лопасти с втулкой. Фирма «Каман» разработала несущий винт, в котором на лопасти, нежесткой на кручение в комлевой части, устанавливается сервозакрылок. Отклонение закрылка вызывает кручение лопастей, которое может быть использовано для изменения циклического и общего шагов винта без поворота комлевых частей лопастей.

7.2. ТИПЫ ВЕРТОЛЕТОВ

Схема вертолета определяется в основном числом и расположением несущих винтов, способами уравнивания реактивных моментов винтов и осуществления путевого управления, а также формой фюзеляжа. Общий анализ несущего винта применим ко всем типам вертолетов, однако схема вертолета влияет на его динамику, особенно на характеристики устойчивости и управляемости.

Наиболее распространена схема одновинтового вертолета с рулевым винтом — небольшим вспомогательным винтом, используемым для уравнивания реактивного крутящего момента несущего винта и для путевого управления. Рулевой винт устанавливается вертикально на хвостовой балке; его тяга направлена влево, если несущий винт вращается по часовой стрелке. Плечо силы тяги рулевого винта относительно оси вала несущего винта обычно несколько больше радиуса последнего. Управление по тангажу и крену в этой схеме обеспечивается наклоном вектора силы тяги несущего винта посредством изменения циклического шага; управление по высоте — изменением величины тяги несущего винта посредством изменения его общего шага; путевое управление — изменением величины тяги рулевого винта посредством изменения его общего шага. Эта схема проста и требует одного механизма управления несущим винтом и одной трансмиссии для его привода. Рулевой винт обеспечивает хорошую путевую управляемость, но требует затраты мощности для уравнивания аэродинамического крутящего момента, что увеличивает суммарную потребляемую мощность вертолета на несколько процентов. Недостатком одновинтовой схемы является обычно небольшой диапазон допустимых центровок; он увеличивается при использовании бесшарнирного винта. Кроме того, рулевой винт, если он расположен не очень высоко на хвостовой балке, представляет некоторую опасность для наземного персонала; в этом случае не исключена также возможность удара рулевого винта о землю при эксплуатации вертолета. Рулевой винт работает как вертикальное и горизонтальное оперение в потоке, возмущенном несущим винтом и фюзеляжем, что снижает его аэродинамическую эффективность и увеличивает нагрузки и вибрации. Одновинтовая схема (с рулевым винтом) наиболее подходит для вертолетов малых и средних размеров¹⁾.

От рулевого винта или заменяющего его устройства требуются удовлетворительные устойчивость и эффективность управле-

¹⁾ В работе [296] показано, что одновинтовая схема может быть оптимальной и для тяжелых вертолетов. По такой схеме построен, например, новый отечественный тяжелый вертолет Ми-26 с полетной массой 52 т. — *Прим. п. ред.*

ния, способность работать на режиме авторотации, малые масса и потребляемая мощность. Для рулевого винта все перечисленные характеристики удовлетворительны, некоторые же — просто превосходны. Большинство устройств-заменителей имеют серьезные недостатки по крайней мере в одной из характеристик. Наиболее подходящей заменой рулевого винта представляется вентилятор¹⁾. Основными недостатками рулевого винта являются опасность для персонала, шум и вибрации. Вентилятор имеет некоторые преимущества, особенно в отношении безопасности персонала. Однако вентилятор сможет заменить рулевой винт лишь после того, как будут решены некоторые технические проблемы.

При использовании двух или более несущих винтов, вращающихся в противоположные стороны, компенсация крутящих моментов обеспечивается самой схемой вертолета, и не требуется никаких дополнительных устройств, уравнивающих такой момент и потребляющих мощность. Однако аэродинамические потери, вызываемые взаимным влиянием несущих винтов, а также несущих винтов и фюзеляжа, снижают общую эффективность двухвинтовых схем почти до уровня одновинтовой схемы. Двухвинтовые вертолеты сложнее по конструкции из-за удвоения систем управления и трансмиссий. Для больших вертолетов сопутствующие этому увеличение массы и усложнение технического обслуживания компенсируются тем, что при данной полетной массе вертолета и нагрузке на ометаемую поверхность могут быть использованы винты меньшего диаметра, чем в случае одновинтового вертолета, что позволяет уменьшить массу винтов и трансмиссии.

Вертолет продольной схемы имеет два несущих винта, разнесенных в продольном направлении. Диски несущих винтов обычно имеют перекрытие 30—50%; при этом расстояние между осями винтов составляет $1,7 \div 1,5R$. Для уменьшения аэродинамического влияния переднего винта на задний последний располагается на пилоне, выше переднего винта на $0,3 \div 0,5R$. Продольное управление осуществляется дифференциальным изменением величин сил тяги несущих винтов с помощью дифференциального общего шага; поперечное управление обеспечивается поперечным наклоном векторов сил тяги с помощью циклического шага, а управление по высоте — общим шагом несущих винтов. Путевое управление осуществляется дифференциальным поперечным наклоном векторов сил тяги несущих винтов с помощью дифференциального циклического шага. Этой схеме присущи большие размеры фюзеляжа, на котором должны

¹⁾ Имеется в виду вентилятор в кольцевом канале, впервые примененный на вертолетах французской фирмы «Аэроспасьяль» и известный под названием «фенестрон». — *Прим. перев.*

быть установлены два несущих винта. Вертолет продольной схемы имеет большой диапазон допустимых продольных центровок вследствие возможности использовать дифференциальную силу тяги для балансировки вертолета по тангажу. Однако работа заднего винта в струе переднего становится источником значительных вибраций, переменных нагрузок, шума и потерь мощности. Большие моменты инерции по тангажу и крену, нестационарные аэродинамические моменты фюзеляжа и низкая эффективность путевого управления ухудшают характеристики управляемости вертолета. Пилон заднего винта увеличивает массу конструкции. Продольную схему можно считать приемлемой для средних и тяжелых вертолетов.

Вертолет поперечной схемы имеет два несущих винта, разнесенных в поперечном направлении. Винты обычно устанавливаются без перекрытия (расстояние между осями винтов не менее $2R$) на концах крыльев или поперечных балок. Управление осуществляется так же, как и в случае продольной схемы; при этом каналы тангажа и крена меняются местами. Управление по крену осуществляется дифференциальным общим шагом, а по тангажу — продольным циклическим шагом. Крыло, на котором крепятся несущие винты, является бесполезной массой, создающей только вредное сопротивление, пока вертолет не летит с достаточно большой скоростью, когда это крыло может создавать подъемную силу¹⁾.

Вертолет соосной схемы имеет два противоположно вращающихся несущих винта, которые установлены на соосных валах. Винты разнесены в вертикальном направлении, чтобы обеспечить возможность поперечного махового движения лопастей. Управление по тангажу и крену в такой схеме осуществляется посредством циклического шага, а управление по высоте — с помощью общего шага, как и в одновинтовой схеме. Для путевого управления используется дифференциальный крутящий момент несущих винтов. В соосной схеме усложняются управление несущими винтами и трансмиссия, зато не требуются валов, соединяющих несущие винты, как в других двухвинтовых схемах. Путевое управление с помощью дифференциального крутящего момента является несколько вялым. Эта схема вертолета компактна, несущие винты имеют небольшой диаметр, а рулевой винт отсутствует. Близок к вертолету соосной схемы синхронтер, т. е. двухвинтовой вертолет с перекрещивающимися винтами; конструктивно он несколько проще, поскольку валы винтов не соосны, а разнесены на небольшое расстояние в поперечном направлении.

¹⁾ Выше отмечено преимущество поперечной схемы перед продольной, заключающееся в отсутствии больших аэродинамических потерь из-за взаимного влияния несущих винтов. — *Прим. перев.*

У большинства вертолетов имеется механический привод несущих винтов, т. е. крутящий момент передается на несущий винт через валы. В таких конструкциях необходимы трансмиссия и средства для уравнивания крутящих моментов несущих винтов. При другом способе привода несущего винта — реактивном — холодный или горячий воздух выбрасывается из сопел, размещенных на концах или на задней кромке лопастей. Известны конструкции вертолетов с прямоточными воздушно-реактивными двигателями на концах лопастей или с реактивными закрылками, куда подается сжатый воздух, генерируемый в фюзеляже. Поскольку в этом случае крутящий момент несущего винта не передается на фюзеляж вертолета (передается лишь незначительный момент трения в подшипниках вала), то трансмиссия и устройства, уравнивающие крутящий момент, не нужны, что дает существенную экономию массы. Система реактивного привода несущего винта в принципе легче и проще, хотя аэродинамическая и термодинамическая эффективность вертолета ниже. Вертолет с реактивным приводом нуждается в дополнительном устройстве путевого управления. Возможно использование аэродинамических поверхностей типа руля направления, однако на малых скоростях полета они неэффективны.

7.3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ.

На стадии предварительного проектирования определяются основные параметры вертолета, обеспечивающие выполнение заданных летно-технических характеристик (ЛТХ). При этом определяются размеры вертолета и его несущего винта, а также выбирается силовая установка, после чего в процессе итераций определяется полетная масса вертолета. На основе выбранных нагрузки на ометаемую поверхность, предельного числа Маха, характеристики режима и нагрузки на лопасть определяются радиус несущего винта, концевая скорость лопасти и коэффициент заполнения. Далее в результате расчета мощности, требуемой для выполнения заданных режимов полета, определяются характеристики силовой установки. При расчете ЛТХ обычно используется метод мощностей. Это простейший метод, обеспечивающий достаточно точное решение задачи в условиях, когда известны предварительные значения основных данных вертолета. В результате определяются основные размеры и общий вид вертолета. Затем производится оценка масс агрегатов по известным параметрам несущего винта и силовой установки, а также количеству топлива и полезной нагрузке, предусмотренных заданием. Массы агрегатов суммируются для определения полетной массы вертолета, и процесс итераций повторяется

до получения требуемого значения полетной массы. Оптимизация конструкции производится с учетом стоимостных параметров (таких, как эксплуатационные расходы или даже полетная масса, определяющая первоначальную стоимость вертолета) и различных эксплуатационных характеристик (таких, как дальность полета, максимальная скорость или уровень шума) в функции основных параметров несущего винта и вертолета. Если анализ ЛТХ и полетной массы проводится достаточно детально, то в процессе оптимизации могут быть выбраны даже тип несущего винта и схема вертолета.

Основными параметрами несущего винта, подлежащими выбору на стадии предварительного проектирования, являются нагрузка на ометаемую поверхность, концевая скорость и коэффициент заполнения. Для заданной полетной массы нагрузка на ометаемую поверхность определяет радиус несущего винта. Нагрузка является также основным фактором, от которого зависит потребная мощность, в частности индуктивная мощность на режиме висения. Нагрузка влияет на скорость скоса потока и скорость снижения на режиме авторотации. Концевая скорость выбирается с учетом явлений срыва и сжимаемости. Высокая концевая скорость приводит к увеличению числа Маха на наступающей лопасти, а следовательно, к увеличению профильных потерь мощности, нагрузки на лопасть, вибраций и шума. Низкая концевая скорость ведет к увеличению угла атаки на отстающей лопасти, при котором начинается недопустимый рост профильных потерь мощности, нагрузок в проводке управления и вибраций вследствие срыва. Таким образом, существует ограниченный диапазон приемлемых концевых скоростей, который сужается по мере увеличения скорости полета вертолета (см. разд. 7.4). Если радиус винта задан, то концевая скорость определяет угловую скорость вращения винта. Высокая угловая скорость обеспечивает хорошие характеристики авторотации и низкий крутящий момент (и, следовательно, малую массу трансмиссии). Коэффициент заполнения и соответственно площадь лопасти определяются ограничениями нагрузки на ометаемую поверхность из-за срыва. Пределы, ограничивающие эксплуатационное значение коэффициента подъемной силы, а следовательно, и C_T/σ , требуют некоторого минимального значения $(\Omega R)^2 A_d$ для заданной полетной массы. Масса несущего винта и профильные потери возрастают с увеличением хорды лопасти, поэтому выбирается наименьшая площадь лопасти, удовлетворяющая ограничениям по срыву. Такие параметры, как крутка лопасти, ее форма в плане, число и профиль лопастей, выбираются из соображений оптимизации аэродинамических характеристик винта. Окончательный выбор является компромиссным для различных рассматриваемых эксплуатационных режимов вертолета. В процессе предварительного проектирования исполь-

зуются эти и другие параметры с соответствующим представлением их влияния на массу и характеристики вертолета. Однако имеются и многие другие факторы, которые не фигурируют в предварительном анализе в явном виде, но влияют на важные особенности конструкции вертолета. Например, выбор типа несущего винта в большей мере зависит от его влияния на характеристики управляемости вертолета, аэроупругости и технического обслуживания, чем от его влияния на летно-технические характеристики и массу вертолета. Эти и другие соображения должны учитываться проектировщиком при оптимизации.

Определяющее значение при предварительном проектировании имеет оценка масс различных агрегатов вертолета по основным параметрам конструкции. На стадии предварительного проектирования оценки масс агрегатов могут быть получены только интерполяцией и экстраполяцией характеристик существующих конструкций. Для этого обычно используются аналитические зависимости, полученные путем обработки статистических данных о массе агрегатов. Основная проблема, связанная с таким подходом, заключается в надежности статистических данных, особенно в случаях, когда необходима экстраполяция далеко за пределы существующих конструкций. Эмпирические формулы, надежно отражающие тенденции изменения данных о массе конструкций, можно успешно применять при предварительном проектировании.

Установленная на основе анализа существующих конструкций зависимость веса W агрегата от некоторого параметра k в логарифмической шкале изображается, как правило, прямой линией, так что в обычной шкале формулы имеют вид $W = c_1 k^{c_2}$, где c_1 и c_2 — эмпирические коэффициенты. Параметр k является функцией величин, оказывающих наибольшее влияние на массу агрегата. Например, в случае несущего винта k зависит по меньшей мере от радиуса винта, концевой скорости и площади лопасти. Определение параметра k требует сочетания анализа, эмпирических данных и интуиции. Эмпирических выражений может быть немало, нельзя и определить наилучшее выражение. Поэтому при предварительном проектировании обычно используется большое количество формул для масс агрегатов.

При рабочем проектировании детализируется конструкция всех агрегатов вертолета. Каждый агрегат проектируется так, чтобы он выполнял требуемые функции и соответствовал результатам предварительного проектирования. Главной задачей здесь является расчет на прочность всех элементов конструкции, для чего необходимы детальное определение аэродинамических и инерционных нагрузок и полный расчет летных характеристик вертолета. Этот этап проектирования вертолета связан с наиболее сложными инженерными расчетами.

7.4. ОГРАНИЧЕНИЯ СКОРОСТИ ПОЛЕТА

Как и в случае самолета, максимальная скорость вертолета в горизонтальном полете ограничена располагаемой мощностью, но для винтокрылого летательного аппарата имеется и целый ряд других ограничений скорости, обусловленных, в частности, эффектами срыва, сжимаемости и аэроупругости. Основным ограничением для многих современных вертолетов является срыв потока на отстающей лопасти, приводящий на больших скоростях полета к резкому увеличению нагрузок на несущий винт и систему управления и росту вибраций вертолета. Вследствие этого расчетная крейсерская скорость вертолета без вспомогательных двигателей при современном уровне развития техники лежит в пределах 280—370 км/ч. Для достижения более высоких скоростей требуется либо улучшение аэродинамики несущего винта и фюзеляжа, либо существенное изменение конфигурации вертолета.

При максимальной скорости горизонтального полета необходимая мощность вертолета равна располагаемой. На больших скоростях основные затраты мощности связаны с вредным сопротивлением. Если максимальная скорость ограничена располагаемой мощностью, то нужно увеличить мощность силовой установки вертолета или уменьшить сопротивление втулки и фюзеляжа. Поскольку мощность, обусловленная вредным сопротивлением, пропорциональна V^3 , значительное уменьшение вредного сопротивления или увеличение располагаемой мощности приводит лишь к небольшому увеличению скорости. Профильная мощность несущего винта также резко увеличивается при больших скоростях полета вследствие эффектов срыва и сжимаемости.

Мерой влияния сжимаемости на характеристики несущего винта служит число Маха на конце наступающей лопасти:

$$M_{1,90} = M_K(1 + \mu) = \frac{V + \Omega R}{c_{зв}}$$

где $c_{зв}$ — скорость звука, а $M_K = \Omega R / c_{зв}$. Влияние сжимаемости на концевую скорость и мощность несущего винта зависит в основном от того, выше или ниже $M_{1,90}$ критического числа Маха при угле атаки концевой сечения наступающей лопасти. Сжимаемость приводит к увеличению профильных потерь мощности вследствие роста аэродинамического сопротивления при числах Маха выше критического, а большие переменные силы на лопасти увеличивают вибрации вертолета и нагрузки на несущий винт. Возможно и возникновение проблем, связанных с динамической неустойчивостью (маховое движение, или крутильно-маховый флаттер), вызванной сжимаемостью. Величину $M_{1,90}$ ограничивает также уровень шума несущего винта, причем это огра-

нение становится все более важным. Потребная мощность и вибрации возрастают только после того, как значительная часть диска несущего винта начинает работать с числом Маха выше предельного, так что может быть допущено значение $M_{1,90}$, на $5 \div 10\%$ превышающее критическое число Маха концевой сечения. С точки зрения шума несущего винта могут потребоваться существенно более низкие концевые скорости. Нежелательных эффектов сжимаемости можно избежать не только уменьшением концевой скорости, но и увеличением критического числа Маха путем использования тонких профилей в концевой части лопасти. Поскольку ограничение числа Маха на конце наступающей лопасти по сжимаемости ставит предел сумме $\Omega R + V$, конструктор должен ограничить либо концевую скорость, либо скорость полета.

Мерой влияния срыва на несущем винте служит отношение коэффициента силы тяги к коэффициенту заполнения C_T/σ , которое определяет средний по диску винта коэффициент подъемной силы лопасти. На режиме висения могут быть получены достаточно высокие значения C_T/σ до наступления срыва и увеличения профильных потерь мощности. Однако при полете вперед на стороне отступающей лопасти углы атаки увеличиваются для обеспечения той же нагрузки, что и на стороне наступающей лопасти (см. разд. 5.6), так что срыв начинается при существенно меньших C_T/σ . Профильная мощность увеличивается, если в срыве находится значительная часть диска винта. Важно отметить, что нарастание вибраций и нагрузок на винт происходит резко в результате больших переменных составляющих шарнирных моментов лопасти, периодически попадающей в срыв. Срыв на несущем винте вертолета подробно рассмотрен в гл. 16. Предельная величина C_T/σ , определяемая при полете вперед срывом, уменьшается при увеличении скорости полета или пропульсивной силы винта, поскольку оба эти фактора увеличивают неравномерность распределения углов атаки по диску. С другой стороны, для заданного C_T/σ влияние срыва проявляется при некотором критическом значении μ , которое увеличивается при снижении нагрузки на лопасть. Поскольку наименьшее допустимое значение C_T/σ ограничено возможностями увеличения площади лопасти (по соображениям ухудшения массовых и летных характеристик), предельная величина μ , обусловленная срывом, является важным конструктивным параметром вертолета.

Максимальное значение μ , при котором полет вертолета возможен, зависит от ряда факторов. При увеличении μ ухудшается аэроупругая устойчивость, возрастают нагрузки на лопасть и систему управления из-за асимметрии обтекания, а аэродинамическая эффективность несущего винта и его способность создавать пропульсивную силу снижаются. Срыв потока на отсту-

пающей лопасти часто является главным фактором, ограничивающим μ . Для увеличения скорости вертолета и достижения заданного значения $\mu = V/\Omega R$ конструктор должен увеличивать конечную скорость. Однако предел по сжимаемости ограничивает допустимую конечную скорость и, следовательно, скорость вертолета.

Влияние сжимаемости на наступающей и срыв на отступающей лопастях ограничивают максимальную скорость полета вперед. Число Маха на конце наступающей лопасти и характери-

стика режима определяют сумму конечной скорости и скорости полета, а также их отношение:

$$M_{1,90} = (V + \Omega R)/c_{зв},$$

$$\mu = V/\Omega R.$$

Разрешая эти уравнения относительно V и ΩR , имеем

$$V = c_{зв} M_{1,90} \mu / (1 + \mu);$$

$$\Omega R = c_{зв} M_{1,90} / (1 + \mu).$$

Таким образом, большая скорость полета вертолета достигается при

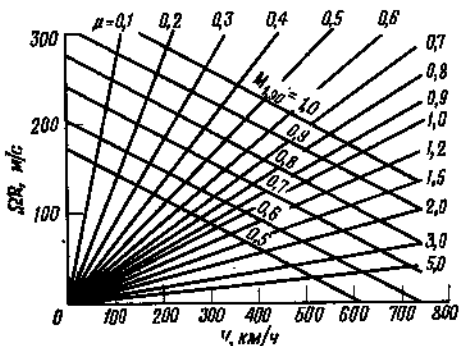


Рис. 7.1. Диаграмма зависимости конечной скорости лопасти от скорости полета для постоянных $M_{1,90}$ и μ (скорость звука принята равной 340 м/с).

больших значениях $M_{1,90}$ и μ . Это иллюстрируется диаграммой конечной, скорости ΩR и скорости V полета для постоянных $M_{1,90}$ и μ (рис. 7.1). По диаграмме можно определить максимальную скорость вертолета для заданных предельных значений $M_{1,90}$ и μ . Например, для критического числа Маха $M_{1,90} = 0,9$ и максимальной характеристики режима $\mu = 0,5$ получаем конечную скорость $\Omega R = 200$ м/с и максимальную скорость $V = 370$ км/ч.

Имеется много возможностей изменения конфигурации вертолета с целью повышения скорости горизонтального полета. Если на вертолете имеется крыло, то его подъемная сила при полете вперед позволяет снизить нагрузку на диск и оттянуть появление срыва. Поскольку сила тяги несущего винта создает и пропульсивную силу вертолета, для снижения нагрузки на диск до очень низких значений требуется дополнительное устройство, создающее пропульсивную силу. В результате получается комбинированный вертолет.

Вертолету с шарнирным несущим винтом для обеспечения управляемости при низкой тяге винта необходимы управляющие поверхности (самолетные рули). Для устранения влияния

сжимаемости при больших скоростях полета, возможно, потребуется уменьшение частоты вращения винта. Медленно вращающийся разгруженный винт имеет то достоинство, что при большой скорости полета он может быть полностью остановлен и убран для уменьшения сопротивления летательного аппарата. Можно также останавливать несущий винт и использовать его в качестве крыла на больших скоростях полета вперед. Другой подход заключается в повороте осей несущих винтов вперед таким образом, чтобы при полете вперед они превращались в тянущие винты. В этом случае снимаются многие проблемы аэродинамики несущего винта, работающего при косо́й обдувке. В конце этой главы даны ссылки на литературу, касающуюся летательных аппаратов нетрадиционных конфигураций. Ни один из таких аппаратов до сих пор не достиг уровня развития, при котором он мог бы конкурировать с вертолетом, в основном из-за того, что в настоящее время нет таких задач в гражданской или военной сфере применения, для которых прирост скорости в рассматриваемом диапазоне оправдывал бы проигрыш в весовой отдаче и усложнение конструкции.

7.5. ПОСАДКА НА РЕЖИМЕ АВТОРОТАЦИИ ПРИ ОТКАЗЕ ДВИГАТЕЛЯ

При отказе двигателя вертолет имеет возможность совершить посадку на режиме авторотации; в этом случае при снижении вертолета с постоянной скоростью тяга несущего винта остается постоянной. Установившаяся скорость снижения вертолета на этом режиме даже при полете вперед весьма велика, поэтому режим авторотации используется обычно как аварийный. Крайне важно, чтобы летчик выполнял своевременные и правильные действия, обеспечивающие оптимальную траекторию полета в начале и конце маневра.

После отказа двигателя вращение несущего винта замедляется, так как единственным источником энергии для покрытия профильных и индуктивных потерь до начала снижения вертолета является кинетическая энергия несущего винта. По мере возрастания скорости снижения увеличивается скорость протекания потока через диск винта; следовательно, увеличиваются углы атаки лопастей. В принципе вертолет может достичь установившейся скорости снижения, при которой увеличение угла атаки будет компенсировать уменьшение частоты вращения винта и поддерживать величину силы тяги, равную полетному весу. Однако срыв кладет предел увеличению угла атаки, а кинетическую энергию винта необходимо сохранить для конечного этапа посадки. При срыве потока на несущем винте поддерживать установившееся снижение невозможно. Поэтому для обеспечения небольших углов атаки лопастей и поддержания частоты вращения несущего винта при переходе на

режим авторотации летчик должен уменьшить общий шаг винта. На переходном режиме сила тяги несущего винта превышает ее величину на установившемся режиме (см. обсуждение динамического срыва в гл. 16), что дает летчику некоторое дополнительное время на реакцию. Тем не менее летчик должен уменьшить общий шаг в течение 2—3 с после отказа двигателя во избежание чрезмерного уменьшения оборотов несущего винта. Для режима авторотации обычно достаточно небольшое положительное значение угла общего шага. На одновинтовом вертолете потеря крутящего момента требует еще и изменения положения педалей управления для уменьшения тяги рулевого винта. После первоначальных управляющих воздействий летчик должен выдерживать режим установившегося безмоторного снижения с минимально возможной вертикальной скоростью. Минимальная вертикальная скорость снижения на режиме авторотации достигается при скорости полета вперед, соответствующей минимальной потребной для горизонтального полета мощности (см. разд. 6.3.4). Эта скорость составляет около половины скорости вертикального снижения при авторотации.

Таким образом, летчик после отказа двигателя должен выполнять снижение, поддерживая нужные значения горизонтальной и вертикальной скоростей. Вблизи земли летчик должен осуществить подрыв и уменьшить вертикальную и горизонтальную скорости для мягкого приземления. В идеальном случае в момент касания земли скорость вертолета равна нулю. Подрыв заключается в том, что летчик резко увеличивает общий шаг с целью увеличения тяги (и уменьшения скорости снижения вертолета), а затем отклоняет на себя рычаг продольного управления для уменьшения поступательной скорости вертолета (при этом возникает значительный угол тангажа на кабр:рование). Во время подрыва несущий винт потребляет накопленную кинетическую энергию вращения. Этот источник энергии ограничен, так что летчик должен тщательно контролировать протекание подрыва во времени. Поскольку при увеличении общего шага частота вращения несущего винта падает, срыв на лопастях ограничивает возможности подрыва. Полная кинетическая энергия ($KЭ$) несущего винта равна $(1/2)NI_n\Omega_n^2$ (здесь NI_n — момент инерции винта относительно оси вращения), а ее используемая часть (до момента наступления срыва и падения тяги) равна лишь $1 - \Omega_n^2/\Omega_k^2$, где Ω_n и Ω_k — угловые скорости несущего винта в начале и конце подрыва. В предположении, что сила тяги несущего винта остается постоянной, имеем

$$\left(\frac{\Omega_k}{\Omega_n}\right)^2 = \frac{(C_T/\sigma)_n}{(C_T/\sigma)_k}$$

Угловая скорость Ω и C_T/σ в начале маневра близки к нормальным эксплуатационным значениям для вертолета, а $(C_T/\sigma)_k$ определяется ограничением для несущего винта по срыву (с учетом увеличения силы тяги, возможного на переходном режиме).

Если отказ двигателя происходит вблизи земли, то установившийся режим снижения невозможен. В этом случае могут реализовываться различные траектории полета, а весь процесс безмоторной посадки будет неустановившимся. В случае отказа двигателя на режиме висения минимальная вертикальная скорость в момент касания земли достигается при вертикальном снижении. Таким образом, летчик не должен пытаться выдерживать скорость полета вперед, соответствующую минимальной скорости снижения; желательна скорость, обеспечивающая обзор посадочной площадки и достаточная для того, чтобы не попасть в режим вихревого кольца.

Скорость снижения на режиме авторотации определяется нагрузкой на диск, которая, очевидно, должна быть небольшой. Отсюда следует, что малая скорость снижения на режиме авторотации определяется низкой потребной мощностью на режиме висения. Возможность маневра подрыва для безмоторной посадки вертолета более важна, чем установившаяся скорость снижения, поскольку выбор нагрузки на диск определяется в основном требуемыми летно-техническими характеристиками. Возможности подрыва зависят от кинетической энергии несущего винта, возрастающей при увеличении угловой скорости и момента инерции лопасти. Предел по срыву должен быть высоким как с точки зрения характеристик подрыва, так и в отношении минимальной потери оборотов в период от момента отказа двигателя до момента уменьшения общего шага. Таким образом, эксплуатационное значение C_T/σ должно быть низким. Момент инерции винта является параметром, наиболее эффективно влияющим на характеристики авторотации вертолета. Ему соответствует безразмерная массовая характеристика лопасти, которая должна быть низкой. Однако для получения большого момента инерции нужны тяжелые лопасти.

На вертолете должна иметься муфта свободного хода (обгонная муфта), при которой привод двигателя от несущего винта исключается. При отказе двигателя она автоматически отключает последний от несущего винта, который, таким образом, при авторотации не тормозится двигателем. Рулевой винт вертолета одновинтовой схемы должен быть механически связан трансмиссией с несущим винтом, что обеспечивает путевое управление при отказе двигателя.

Если отказ двигателя происходит на большой высоте, то летчик имеет достаточно времени для того, чтобы установить режим авторотации. Нормальную частоту вращения несущего

винта можно восстановить кратковременным увеличением скорости снижения, так что подрыв может быть начат при максимально возможной энергии, накопленной несущим винтом. Однако эту операцию не удастся проделать при отказе двигателя вблизи земли, поскольку в этом случае обороты винта падают в начале маневра, а время реакции летчика усугубляет это падение. В результате на большинстве вертолетов подрыв не может быть выполнен при достаточной кинетической энергии несущего винта и скорости снижения, достаточно малой для того,

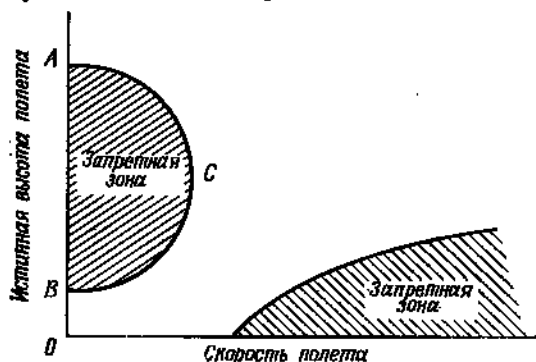


Рис. 7.2. Диаграмма высота — скорость для горизонтального полета.

чтобы избежать чрезмерной вертикальной скорости в момент касания земли. Поэтому на диаграмме высота — скорость (рис. 7.2) имеется область малых скоростей, в которой вертолет не должен эксплуатироваться ввиду невозможности выполнения безопасной посадки при отказе двигателя. Эта область называется запретной зоной. На высотах, превышающих соответствующие точке А (обычно $100 \div 150$ м), частота вращения несущего винта может быть восстановлена, а скорость снижения может поддерживаться достаточно низкой для выполнения безопасной посадки. При больших высотах возможна установившаяся авторотация. При очень малых высотах (точка В на рис. 7.2, обычно $3 \div 5$ м) вертолет касается земли прежде, чем он достигнет чрезмерной скорости снижения. В случае достаточной горизонтальной скорости (точка С на рис. 7.2, обычно $40 \div 65$ км/ч) также возможна безопасная посадка вследствие уменьшения вертикальной скорости при полете вперед. Обычно также имеется ограничение по большим горизонтальным скоростям вблизи земли, как показано на рис. 7.2: если отказ двигателя случится на малой высоте при большой скорости полета, то у летчика не окажется достаточно времени для уменьшения горизонтальной скорости настолько, чтобы избежать поломки шасси, особенно для вертолетов с лыжным шасси. Две запретные зоны на диаграмме высота — скорость образуют допустимый «коридор» для режимов взлета и посадки вертолета.

Тем не менее эксплуатационные режимы полета вертолета не слишком ограничены. Строго вертикальные взлет или посадка обычно не применяются из-за наличия запретной зоны, и летчик после вертикального набора высоты около 5 м начинает разгонять вертолет. При наличии двух или более двигателей запретная зона существенно уменьшается или исчезает совсем. Для многодвигательных вертолетов гораздо более актуальны летные характеристики при одном неработающем двигателе, чем при полном отказе силовой установки.

Рассмотрим начальную стадию снижения и падения оборотов винта до начала вмешательства летчика в управление, т. е. при неизменном общем шаге [М.20, К.6, М.44, W.3]. Движение вертолета вдоль вертикальной оси описывается уравнением $M\ddot{h} = W - T$, где h — истинная высота полета вертолета, W — полетный вес, T — тяга несущего винта и $M = W/g$ — полетная масса вертолета. Уравнение движения несущего винта вертолета имеет вид $NI_{\pi}\dot{\Omega} = -Q$, где NI_{π} — полный момент инерции и Q — момент сопротивления несущего винта. До отказа двигателя (при $t = 0$) тяга несущего винта равна весу вертолета и угловая скорость винта постоянна. После отказа двигателя момент сопротивления несущего винта уже не уравновешивается крутящим моментом двигателя, и частота вращения винта падает. Если рассматривать начальную стадию, когда величина общего шага соответствует горизонтальному полету, а скорость снижения не успела возрасти настолько, чтобы значительно изменить коэффициент протекания, то коэффициенты силы тяги и момента (C_T и C_Q), являющиеся функциями $\theta_{0,75}$ и λ , должны оставаться такими же, как и в момент отказа двигателя. Тогда тяга и крутящий момент несущего винта изменяются только вследствие изменения угловой скорости: $T = W(\Omega/\Omega_0)^2$ и $Q = Q_0(\Omega/\Omega_0)^2$. Здесь Ω_0 — начальная угловая скорость и Q_0 — крутящий момент, требуемый для горизонтального полета, так что мощность, необходимая для горизонтального полета, равна $\Omega_0 Q_0$. Уравнение движения несущего винта при $t > 0$ приобретает вид $NI_{\pi}\dot{\Omega} = -Q_0(\Omega/\Omega_0)^2$ или, после интегрирования,

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \left(1 + \frac{Q_0}{NI_{\pi}\Omega_0} t\right)^{-1}$$

а скорость снижения описывается формулой

$$\dot{h} = gt^2 \frac{Q_0}{NI_{\pi}\Omega_0} \left(1 + \frac{Q_0}{NI_{\pi}\Omega_0} t\right)^{-1}$$

Эти результаты можно представить в виде

$$\Omega/\Omega_0 = \tau/(t + \tau), \quad \dot{h} = gt^2/(\tau + t),$$

где постоянная времени равна $\tau = 2KЭ/P = NI_{\pi}\Omega_0/Q_0$. Здесь P — мощность, потребная для горизонтального полета, а

$KЭ = NI_a \Omega_0^2 / 2$ — кинетическая энергия несущего винта. Мак-Кормик [М.20] нашел, что эти выражения очень хорошо описывают поведение вертолета в течение первых нескольких секунд после отказа двигателя.

Подрыв — гораздо более важная часть безмоторной посадки, однако представленный выше анализ полезен и здесь, поскольку он вводит параметр $\tau = 2KЭ/P$ как меру характеристик авторотации. Для того чтобы падение оборотов было сравнительно малым, нужна большая величина τ , т. е. высокая кинетическая энергия и низкая потребляемая мощность несущего винта. Потребная мощность определяет момент сопротивления, замедляющий вращение несущего винта после отказа двигателя. Обычно $KЭ/P \approx 4$ с, так что время, за которое частота вращения винта существенно снижается, составляет $\sim 1-2$ с. Наибольшее допустимое время запаздывания реакции летчика можно оценить, полагая снижение оборотов соответствующим пределу по срыву:

$$(\Omega/\Omega_0)^2 = (C_T/\sigma)/(C_T/\sigma)_{срив}$$

откуда

$$t_{\max} = 2 \frac{KЭ}{P} \left[\left(\frac{(C_T/\sigma)_{срив}}{C_T/\sigma} \right)^{1/2} - 1 \right].$$

Вуд [W.15] получал эмпирические зависимости для некоторых параметров авторотации: постоянной времени падения оборотов $t = (KЭ/P) \times (1 - T/0,8T_{\max})$, используемой кинетической энергии $\mathcal{E} = (KЭ/P) \times (1 - T/T_{\max})$, параметра авторотации $AI = KЭ/P$ и энергетического параметра $h = KЭ/T$. Здесь P — мощность силовой установки вертолета, T — сила тяги несущего винта, T_{\max} — сила тяги, ограниченная срывом, и $KЭ = (1/2)NI_a\Omega^2$ — кинетическая энергия несущего винта. Эти параметры связаны с общими характеристиками авторотации вертолета, определяющими запретные зоны на диаграмме высота — скорость. Вуд рассмотрел физический смысл этих параметров и соответствие их характеристикам авторотации.

Безмоторной посадке вертолета и режиму авторотации несущего винта посвящена следующая литература: [Т.56, W.102, В.51, Р.39, G.65, G.53, N19, N.20, S.135, S.134, К.6, М.20, J.11, D.22, С.88, Н.35, Р.40, Р.41, S.71, М.44, W.3, W.115, J.47, В.57, Т.3, Y.14]. См. также ссылки в разд. 3.2.

7.6. ВРЕДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ВЕРТОЛЕТА

Оценка вредного сопротивления вертолета является важным элементом расчета летно-технических характеристик, поскольку она определяет пропульсивную силу и потребляемую мощность на больших скоростях полета. Сопротивление вертолета обычно выражается через площадь \bar{l} эквивалентной вредной пластинки:

$D = (1/2)\rho V^2 f$. Величина f не зависит от скорости полета, если не учитывать влияние сжимаемости или вязкости. Площадь вредной пластинки может быть определена по коэффициентам лобового сопротивления различных элементов планера вертолета:

$$f = \sum_i C_{D_i} S_i.$$

Здесь S_i — смачиваемая поверхность или площадь миделевого сечения, по которым определяется C_{D_i} . Основную составляющую сопротивления (от 25 до 50%) дает втулка несущего винта. Даже «чистый» вертолет имеет существенно большее сопротивление, чем самолет одинаковой полетной массы, вследствие большого сопротивления втулки и фюзеляжа. Вертолеты первого поколения имели особенно высокое вредное сопротивление.

Для ориентировочной оценки сопротивления вертолета площадь вредной пластинки можно связать с площадью диска несущего винта. Для вертолетов старых конструкций $f/A \approx 0,025$, для современных серийных $\sim 0,010 \div 0,015$, а для аэродинамически «чистых» $\sim 0,004 \div 0,008$. Относительная эквивалентная площадь $f_{вт}/A$ вредной пластинки для втулки несущего винта составляет $\sim 0,0025 \div 0,0050$ для серийных конструкций и $\sim 0,0015$ для облагороженных, закрытых обтекателем втулок. Площадь вредной пластинки часто связывают также с полетным весом вертолета, обычно посредством выражения $f/W^{2/3} = \text{const}$. Оценка сопротивления основана на приближенной зависимости $A \approx 0,6W^{2/3}$, где A — площадь диска винта, m^2 , а W — полетный вес, kg^1).

7.7. ВЫБОР ПРОФИЛЯ ЛОПАСТИ

Профиль лопасти несущего винта вертолета должен обеспечивать аэродинамическую эффективность винта и одновременно удовлетворять конструктивным требованиям к лопасти. Выбор профиля лопасти и в еще большей мере его проектирование специально для лопасти являются трудной задачей ввиду сложности поля скоростей, в котором работает несущий винт. В конечном счете спроектированный профиль неизбежно является результатом компромисса между различными ограничениями, налагаемыми аэродинамикой винта.

Аэродинамическая эффективность несущего винта на режиме висения определяется коэффициентом его совершенства.

¹) Это соотношение между A и W , являясь приближенным, довольно точно связывает сопротивление вертолета с полетным весом. Отметим, что степенная зависимость с показателем $2/3$ предполагает увеличение нагрузки на диск с увеличением размеров вертолета, что имеет место в действительности.

Напомним выражение для этого коэффициента, полученное в разд. 2.6.4:

$$M = \frac{1}{k + \frac{3}{4} \frac{c_{d0} \sqrt{E_t}}{\lambda_{в}}}$$

Из этого выражения видно, что при фиксированной нагрузке на диск коэффициент совершенства зависит в основном от отношения средних по лопасти коэффициентов профильного сопротивления и подъемной силы. Чтобы значения M были велики, профили должны иметь низкое сопротивление при умеренных и высоких коэффициентах подъемной силы.

Хорошие характеристики срыва важны для любого крыла, в том числе и для лопасти несущего винта. Профиль должен иметь высокий максимальный коэффициент подъемной силы, что позволяет работать при высоком значении C_T/σ и, следовательно, иметь небольшие концевую скорость и площадь лопасти. Наиболее жесткое ограничение по срыву налагает обтекание отступающей лопасти при полете вперед; высокий коэффициент подъемной силы необходим для получения низких и умеренных чисел Маха. При полете вперед срыв возникает периодически, по мере вращения лопасти, так что профиль должен иметь и хорошие характеристики нестационарного срыва (см. гл. 16). Вообще хорошие статические характеристики срыва соответствуют хорошим динамическим характеристикам, так что выбор профиля может быть основан на статических данных, если нет данных по нестационарным режимам.

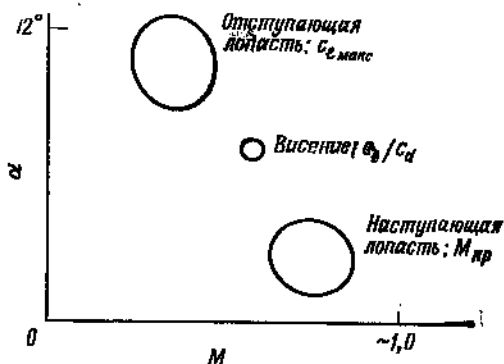
На больших скоростях полета вперед число Маха на конце наступающей лопасти велико. Следовательно, профиль лопасти должен иметь высокое критическое число Маха, соответствующее росту сопротивления и образованию скачка уплотнения при малых углах атаки на стороне наступающей лопасти.

Аэродинамический шарнирный момент на лопасти передается системе управления. Во избежание чрезмерных нагрузок в последней, особенно при полете вперед, когда возникают большие периодические изменения угла атаки и скоростного напора, профиль лопасти должен иметь небольшой момент относительно центра давления. При чисто механической системе управления шарнирные моменты лопастей передаются также на ручку управления и на рычаг общего шага.

Рис. 7.3 иллюстрирует основные соображения, возникающие при выборе или проектировании профиля лопасти несущего винта. Профиль лопасти работает в широком диапазоне условий. Для условий работы на режиме висения, характеризующихся не очень большими углами атаки и числами Маха, требуется низкое сопротивление. При полете вперед профили отступающей лопасти, работающие при низких и средних числах

Маха, должны иметь хорошие характеристики срыва и высокий максимальный коэффициент подъемной силы. Наконец, при полете вперед профили наступающей лопасти, работающие при малых углах атаки, должны иметь высокое критическое число Маха. Критерием выбора профиля для режима висения является большая величина силы тяги несущего винта, тогда как для полета вперед при больших скоростях не должны возникать большие вибрации и нагрузки. Часто для лопастей несущего винта выбирается симметричный профиль умеренной толщины, для упрощения конструкции неизменный по всему радиусу лопасти. Симметричный профиль не создает шарнирного

Рис. 7.3. Критерия выбора профиля лопасти.



момента. Относительная толщина профиля (обычно 10—15%) выбирается на основе компромисса: для минимизации эффектов сжимаемости желателен тонкий профиль, а с точки зрения прочности — толстый. Правда, очень толстый профиль необходим только у комля лопасти, где невысокая аэродинамическая эффективность допустима. Профиль NASA 0012 часто выбирался для лопастей несущих винтов в прошлом и может рассматриваться как стандартный. На современных вертолетах используются более сложные профили с улучшенными аэродинамическими, прочностными и технологическими характеристиками. Разработаны новые профили с характеристиками, оптимизированными применительно к вертолету; общим правилом стало использование более тонких профилей на конце лопасти.

Для пояснения способов выбора и оценки профиля лопасти несущего винта условия работы и характеристики профиля целесообразно представить графически в функции угла атаки и числа Маха. Такими характеристиками гипотетического профиля в функции M на рис. 7.4 являются углы атаки, соответствующие максимальной подъемной силе (α_{\max}) и резкому возрастанию сопротивления при сверхзвуковом обтекании ($\alpha_{кр}$). Там же указаны условия работы сечения на определенном радиусе: замкнутая кривая при полете вперед (вследствие изменения

характеристик по азимуту) и точка для режима висения. В концевых сечениях лопасти имеют место наибольшие числа Маха, а на сечениях радиуса около 75% — наибольшие углы атаки. Таким образом, требования, диктуемые условиями работы сечения, меняются в зависимости от радиуса, на котором оно расположено. Требования для заданных условий работы можно сравнить с характеристиками срыва и сжимаемости для конкретного профиля, как показано на рис. 7.4. Этот график можно использовать и для сравнения различных профилей; более совершенный профиль имеет расширенные пределы по углу атаки во всем рабочем диапазоне чисел Маха.

Густафсон [G.122] исследовал влияние формы профиля на характеристики несущего винта. В качестве меры влияния сопротивления он рассматривал профильные потери мощности,

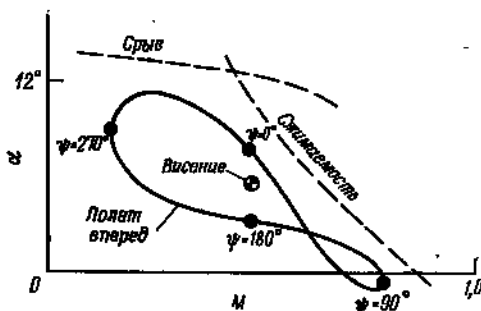


Рис. 7.4. Требования к профилю лопасти для заданных условий работы и ограничения по срыву и сжимаемости.

— условия работы лопасти;
- - - ограничения.

которые можно считать пропорциональными взвешенному среднему коэффициенту сопротивления c_d по диску винта. Профильную мощность можно также выразить в виде интеграла по углу атаки:

$$\frac{C_{P_0}}{\sigma} = \int f(\alpha) c_d(\alpha) d\alpha.$$

Поскольку распределение углов атаки для различных профилей практически одно и то же, функция $f(\alpha)$ зависит только от условий работы винта и определяет относительный вклад сопротивления на различных углах атаки в профильную мощность. Различные профили можно сравнивать по виду зависимости $f c_d$ от α . Библиография и обсуждение литературы по характеристикам профилей и их использованию при выборе профиля несущего винта приведены в работе [G.126].

Давенпорт и Фронт [D.18] дали краткий исторический очерк разработки профилей лопасти и применения их в несущих винтах вертолетов. Они определили задачу улучшения профиля как снижение профильной мощности и оттягивание роста нагрузок на систему управления и вибраций на больших скоростях полета. Отсюда следует, что профиль должен иметь некое со-

противление на высоких и средних числах Маха, большую несущую способность при $M = 0,3 \div 0,5$ и малый момент относительно центра давления на всех режимах работы. Указанные требования суммируют влияние толщины профиля, радиуса закругления передней кромки и кривизны профиля — характеристик, важных для лопастей несущего винта. Наилучшим с этих позиций является тонкий или умеренной толщины ($9 \div 12\%$) профиль с тупой передней кромкой небольшой кривизны. На основе приведенных соображений были сконструированы профили, которые позволили несколько улучшить характеристики несущего винта.

В работе [B.58] исследованы аэродинамические характеристики нескольких сверхзвуковых профилей, спроектированных специально для сложных условий работы лопасти, причем особое внимание было уделено характеристикам срыва. Детально рассмотрены ограничения, налагаемые на профиль аэродинамическими характеристиками несущего винта, шумом и нагрузками. Было найдено, что граница срывного флаттера (см. гл. 16) хорошо согласуется с величиной $c_{l_{\max}}$ при $M = 0,4$, на основании чего был сделан вывод о достаточности рассмотрения статических характеристик срыва. Показано, что профилей, которые бы полностью удовлетворяли всем требованиям, нет, но можно сконструировать профили, превосходящие по характеристикам классические профили NASA.

В работе [D.5] проанализированы общие требования к профилю лопасти и определены пути улучшения характеристик профиля. Опыт показывает, что хотя обтекание лопасти трехмерно и нестационарно, можно добиться существенного улучшения характеристик несущего винта и снижения нагрузок при рассмотрении только двумерных статических характеристик профиля. Установлено, что в общем случае требованиям по срыву и сжимаемости (высокий максимальный коэффициент подъемной силы при средних числах Маха и высокое $M_{кр}$ при малых углах атаки) можно удовлетворить только путем компромисса. Лучше использовать разные профили в середине лопасти (где доминируют эффекты срыва) и на конце (где доминируют эффекты сжимаемости). Были сопоставлены аэродинамические характеристики ряда профилей для лопастей несущих винтов, как стандартных, так и недавно разработанных. Последние обнаруживают определенные преимущества, в частности, в отношении максимального коэффициента подъемной силы при $M = 0,6$ и сопротивления при докритических числах Маха. Желаемые дальнейшие улучшения касаются увеличения $M_{кр}$, увеличения максимального коэффициента подъемной силы при низких M и уменьшения шарнирных моментов.

Выбору, расчету и конструированию профилей для лопастей несущих винтов посвящена следующая литература: [W.49, R.21,

L.94, G.125, S.190, S.14, P.80, C.121, S.165, W.86, W.118, S.166, P.38, R.41, K.27, W.85, S.12, B.82, B.152, P.7, P.92, D.1, D.2, D.3, N.22, T.43, M.152]. Более подробно срыв на несущем винте рассмотрен в гл. 16.

7.3. ПРОФИЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛОПАСТИ НЕСУЩЕГО ВИНТА

Для расчета характеристик несущего винта необходимо знать коэффициент профильного сопротивления, желательно с учетом его зависимости от угла атаки и числа Маха. Имеются и другие факторы, которые влияют на коэффициент сопротивления лопасти в условиях трехмерного нестационарного обтекания при полете вперед. В частности, может оказаться необходимым учет радиальной скорости, изменения угла атаки во времени и трехмерности обтекания конца лопасти. Плохое качество поверхности лопасти и производственные отклонения от расчетного профиля также влияют на сопротивление профиля, которое при этом может возрастать на 20—50% по сравнению с расчетным. При расчетах обычно используются табулированные величины c_l , c_d и c_m в функции α и M для конкретного профиля с полуэмпирическими поправками, учитывающими другие существенные факторы. Часто, однако, бывает трудно получить полные и надежные данные по характеристикам профиля даже для статических условий. Экспериментальные аэродинамические характеристики могут зависеть от небольших изменений профиля или параметров испытательной установки, вследствие чего профили, номинально идентичные, показывают различные свойства.

В другом крайнем случае при анализе несущего винта можно использовать средний коэффициент сопротивления, который оценивается с учетом среднего коэффициента подъемной силы по диску винта и чисел M и Re на некотором характерном радиусе (например, $0,75R$). Использование среднего коэффициента сопротивления сильно упрощает анализ; в предыдущих главах средний коэффициент часто применялся с целью получения элементарных выражений для профильных потерь. Для некоторых задач, таких, как предварительное проектирование, или в случае отсутствия детальных аэродинамических характеристик профиля подобный анализ приемлем. Средний коэффициент сопротивления нельзя применять, когда существенны местные аэродинамические особенности, например эффекты срыва и сжимаемости при полете вперед. Для несущих винтов, работающих в предельных условиях, нужны дополнительные уточнения или более детальный анализ.

Часто при аэродинамическом расчете используется зависимость вида $c_d = \delta_0 + \delta_1\alpha + \delta_2\alpha^2$ (см. разд. 5.24). Это представ-

ление лучше среднего значения, и в то же время оно достаточно простое для того, чтобы не усложнять анализ. Постоянные δ_0 , δ_1 и δ_2 зависят от формы профиля.

Хёрнер [Н.106] предложил следующий способ оценки профильного сопротивления. Коэффициент поверхностного трения, характеризующий основную часть сопротивления, определяется по числу Рейнольдса профиля. Если, например, для турбулентного пограничного слоя $10^6 < Re < 10^8$, то $c_f = 0,44Re^{-1/6}$. При этом минимальный коэффициент сопротивления равен удвоенной величине c_f с учетом толщины профиля. Для профилей NASA четырех- и пятизначных серий имеем

$$c_{d, \text{мин}} = 2c_f [1 + 2(t/c) + 60(t/c)^4],$$

где t/c — относительная толщина профиля. Член $2(t/c)$ учитывает увеличение скорости обтекания из-за толщины профиля, а член $60(t/c)^4$ — сопротивление давления. Влияние подъемной силы на профильное сопротивление учитывается зависимостью

$$c_d \approx c_{d, \text{мин}} (1 + c_l^2).$$

Бейли [В.4] разработал метод определения постоянных в выражении $c_d = \delta_0 + \delta_1\alpha + \delta_2\alpha^2$ по основным характеристикам профиля (см. также [В.6]). Этот метод для профиля NASA 23012 при $Re = 2 \cdot 10^6$ дает зависимость $c_d = 0,0087 - 0,0216\alpha + 0,400\alpha^2$. На нее так часто ссылаются и она так широко используется в литературе по вертолетам, что этот результат стоит рассмотреть более подробно. Коэффициент профильного сопротивления был первоначально принят равным $c_d = c_{d, \text{мин}} + \Delta c_d$, где минимальное значение $c_{d, \text{мин}}$ зависит от числа Рейнольдса, а Δc_d — от угла атаки. Было найдено, что для всех профилей Δc_d приближенно можно считать одной и той же функцией параметра

$$l = \frac{c_l - c_{l, \text{опт}}}{c_{l, \text{макс}} - c_{l, \text{опт}}},$$

где $c_{l, \text{макс}}$ — максимальный коэффициент подъемной силы профиля, а $c_{l, \text{опт}}$ — коэффициент подъемной силы при минимальном сопротивлении (для соответствующего числа Рейнольдса). Эта функция была записана в виде $\Delta c_d = K_0 + K_1 l + K_2 l^2$ и путем приравнивания функции эмпирическим значениям при $l = 0,125, 0,4$ и $0,675$ были определены постоянные $K_0 = 0,0003$, $K_1 = -0,0025$ и $K_2 = 0,0229$. Это выражение хорошо аппроксимирует коэффициент сопротивления при $l \leq 0,8$. С увеличением подъемной силы влияние срыва возрастает, и выражение дает заниженное значение сопротивления. Полагая $c_l = \alpha\alpha$, коэффициенты зависимости $c_d = \delta_0 + \delta_1\alpha + \delta_2\alpha^2$ можно

определить следующим образом:

$$\delta_0 = c_{d, \text{мин}} + K_0 - \frac{K_1 c_{l, \text{опт}}}{c_{l, \text{макс}} - c_{l, \text{опт}}} + \frac{K_2 c_{l, \text{опт}}^2}{(c_{l, \text{макс}} - c_{l, \text{опт}})^2},$$

$$\delta_1 = \frac{a K_1}{c_{l, \text{макс}} - c_{l, \text{опт}}} - \frac{2a K_2 c_{l, \text{опт}}}{(c_{l, \text{макс}} - c_{l, \text{опт}})^2},$$

$$\delta_2 = \frac{a^2 K_2}{(c_{l, \text{макс}} - c_{l, \text{опт}})^2}.$$

Таким образом, при заданных $c_{d, \text{мин}}$, $c_{l, \text{макс}}$, $c_{l, \text{опт}}$, $dc/d\alpha = a$ и соответствующем числе Рейнольдса можно найти формулу для коэффициента сопротивления. Заметим, что при $c_l = c_{l, \text{опт}}$ величина Δc_d равна 0,0003, а не нулю; минимальное же значение Δc_d , равное 0,0002, достигается при $l = 0,055$. Если слегка подправить коэффициенты, положив $K_0 = K_1 = 0$, $K_2 = 0,02$, то при $c_l = c_{l, \text{опт}}$ получим минимум $\Delta c_d = 0$. Однако выражение Бейли более точно в рабочем диапазоне углов атаки лопасти. В качестве примера Бейли рассмотрел профиль NASA 23012 при $Re = 2 \cdot 10^6$, для которого $c_{l, \text{макс}} = 1,45$, $c_{d, \text{мин}} = 0,0066$, $c_{l, \text{опт}} = 0,08$ и $a = 5,73$. Минимальное сопротивление было увеличено на 25% для учета неидеальности профиля, что дало приведенную выше зависимость $c_d = 0,0087 - 0,0216\alpha + 0,4\alpha^2$. В качестве другого примера рассмотрим профиль NASA 0012 при $Re = 2 \cdot 10^6$. По величинам $c_{l, \text{макс}} = 1,4$, $c_{l, \text{опт}} = 0$, $a = 5,73$ и $c_{d, \text{мин}} = 0,0065$ (с увеличением $c_{d, \text{мин}}$ до 0,0081 для учета неидеальности профиля) получаем $c_d = 0,0084 - 0,0102\alpha + 0,384\alpha^2$. Эти выражения применимы при $l < 0,8$ или при

$$\alpha < \alpha_{\text{пред}} = (0,8c_{l, \text{макс}} + 0,2c_{l, \text{опт}})/a.$$

Указанный предел определяется ростом сопротивления вследствие срыва при больших углах атаки. Для профиля NASA 23012 $\alpha_{\text{пред}} = 11,8^\circ$, а для профиля NASA 0012 $\alpha_{\text{пред}} = 11,2^\circ$.

7.9. ЛИТЕРАТУРА

Расчетам и проектированию вертолета посвящены работы: [F.38, P.86, T.33, G.124, S.190, S.195, M.76, H.2, D.68, D.69, L.82, L.83, K.17, S.103, C.101, C.102, S.104, D.49, D.64, G.78, S.175, C.3, F.52, L.110, L.111, W.1, B.112, C.29, F.44, H.89, B.81, G.11, M.116, W.27, D.88, S.116, B.156, E.8, F.1, F.2, S.63, W.114, C.10, L.84, T.71, W.31, Y.4, Y.5, J.71, J.72, S.32, D.83, E.1, J.57, R.19, S.48, S.49, S.147, A.8, B.34, D.87, H.180, L.77, M.33, T.40, D.25, H.175, M.4, W.3, A.56, B.63, F.43, G.96, H.36, M.106, S.12, A.50, D.6, G.113, K.19, M.63, M.155, S.148, T.39, U.1, A.47, H.110, M.75, N.8, P.72, R.51, T.44, W.115, B.85, B.102, B.103, C.127, F.19, G.98, H.49, M.58, N.21, S.199, B.87, C.104, F.49, J.63, N.16, R.55, S.73, S.181, T.72]. Режимы полета вертолета, и в частности перегруз-

ки, исследованы в работах: [С.108, G.131, H.59, С.81, С.82, В.135, С.74, D.44, D.45, P.71, P.73, G.74, H.66, S.167, С.99]. Рулевые винты и другие устройства, уравнивающие крутящий момент, рассмотрены в работах: [S.160, H.184, H.185, L.144, M.154, R.67, T.69, G.115, L.43, V.13, D.20, A.3, E.12, W.83, W.84, Y.7, M.102, P.74, R.15, S.111, M.131, L.118].

Комбинированные схемы вертолетов рассматриваются в работах: [M.113, F.46, H.45, K.64, F.54, С.103, D.74, R.65, V.10, S.183, T.17, W.1, F.44, F.55, K.48, W.126, L.142, S.60, V.9, B.9, L.143, B.83, B.84, B.156, F.50, H.119, L.52, L.138, M.109, S.168, С.125, J.6, P.99, S.149, S.147, D.87, С.80, K.19, M.39, T.55, H.183]. Исследования вертолетов изменяемой схемы с поворотными винтами содержатся в работах: [L.80, L.81, K.54, D.29, Q.1, H.160, L.95, H.3, H.4, H.10, R.27, R.28, Y.23, B.156, E.2, W.41, W.42, B.38 — B.42, B.44, D.33, G.10, M.64, D.40, J.62, M.65, R.56, P.95, F.74, R.54, T.45, B.10, B.100, B.101, С.86, D.39, E.3, G.119, J.59, M.90, S.9, W.43, A.9, H.39, K.12, K.13, K.67, K.68, M.38, M.60, M.61, M.92, M.98, R.78, S.155, S.156, S.157, A.10, F.13, F.14, F.59, G.9, J.36, J.37, J.39, J.43, J.41, J.42, J.45, J.46, M.62, M.89, M.91, W.78, Y.1, D.41, K.37, M.63, U.1, F.15, M.55 — M.57, M.88, M.93, R.9, W.101, A.29, K.70, S.150, H.111, S.97]. Другим конфигурациям вертолетов, в том числе с останавливаемым в полете несущим винтом и с винтами, имеющими реактивный привод, посвящены работы: [M.120, B.142, B.27, G.54, H.85, H.117, M.86, M.87, H.133, M.52, B.106, D.54, D.67, S.124, Y.17, P.94, E.23, С.51, D.61, S.59, D.31, S.139, W.106, С.48, С.54, D.62, H.186, L.131, L.112, W.63, W.64, B.7, B.137, D.30, S.91, Y.26, P.5, P.6, R.75, S.202, T.59, W.26, B.43, С.55, L.48, L.49, L.89, L.90, M.9, N.11, S.207, С.12, F.53, H.14, K.59, L.14, L.15, H.179, M.54, P.69, F.48, R.66, W.93, F.51, G.15, R.71, W.97, A.48, L.47, P.98, R.81, W.91, W.92, Y.15, M.53, P.57].

Математическое описание вращающихся систем

В настоящей главе представлены некоторые соотношения, полезные при анализе периодических динамических систем, к которым относится рассматриваемый здесь N -лопастный несущий винт вертолета, вращающийся с угловой скоростью Ω . Для одной лопасти период составляет $T = 2\pi/\Omega$. В безразмерном времени, измеряемом величиной угла азимута ψ , период равен 2π . Для несущего винта в невращающихся координатных осях период составляет $T = 2\pi/N\Omega$. Нам будет интересоваться установившееся состояние вращающейся системы, которому во вращающихся осях соответствует периодическое движение, описываемое с помощью рядов Фурье (как в гл. 5). Мы будем также рассматривать переходные процессы во вращающейся системе и ее динамическую устойчивость.

8.1. РЯДЫ ФУРЬЕ

Ряд Фурье представляет периодическую функцию $\beta(\psi)$ в виде линейной комбинации гармонических составляющих с основным периодом 2π :

$$\begin{aligned} \beta(\psi) &= \beta_0 + \beta_{1c} \cos \psi + \beta_{1s} \sin \psi + \beta_{2c} \cos 2\psi + \beta_{2s} \sin 2\psi + \dots \\ &\dots = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{nc} \cos n\psi + \beta_{ns} \sin n\psi) \end{aligned}$$

(предполагается, что масштаб времени нормирован таким образом, что безразмерный период равен 2π). Коэффициенты Фурье, или амплитуды гармоник, — постоянные величины, которые определяются следующим образом:

$$\beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta d\psi,$$

$$\beta_{nc} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta \cos n\psi d\psi,$$

$$\beta_{ns} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \beta \sin n\psi d\psi.$$

Более компактный вид имеет комплексная форма ряда Фурье:

$$\beta(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\psi},$$

где

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta e^{-in\psi} d\psi.$$

Поскольку β — действительная величина, β_n и β_{-n} являются комплексными сопряженными величинами. Связь между действительными и комплексными гармониками имеет вид

$$\beta_n = \frac{1}{2} (\beta_{nc} - i\beta_{ns})$$

для $n \geq 1$ (β_0 определяется одинаково в обеих формах). Комплексная форма полезна при преобразованиях уравнений периодической системы, поскольку одно выражение определяет все гармоники. Для оценки результатов, однако, необходимо рассматривать действительную форму.

Ряд Фурье представляет собой линейное преобразование непрерывной функции $\beta(\psi)$, описывающей некоторое периодическое движение в течение одного периода, в бесконечную последовательность постоянных величин $\beta_0, \beta_{1c}, \beta_{1s}, \dots$. Коэффициенты Фурье определяют движение в невращающейся системе координат (так же в разд. 5.1 были рассмотрены движения лопасти в плоскостях взмаха и вращения). Удобство описания установившегося состояния несущего винта рядом Фурье основано на том, что только несколько низших гармоник ряда имеют значительную амплитуду, так что периодическое движение практически полностью описывается небольшим числом гармоник.

Коэффициенты Фурье, определяющие движение лопасти, дают стационарное решение линейного дифференциального уравнения движения, например полученного в гл. 5 уравнения махового движения лопасти:

$$\ddot{\beta} + v^2\beta = \gamma [M_\theta\theta + M_\lambda\lambda + M_\beta\dot{\beta} + M_\beta\beta].$$

Вообще говоря, коэффициенты уравнения движения (в рассматриваемом случае производные аэродинамических моментов на лопасти относительно оси ГШ $M_\theta, M_\lambda, M_\beta$ и M_β) являются периодическими функциями ψ . Для получения решения уравнений движения в форме коэффициентов Фурье существуют два способа: подстановки и операционный. В первом из них все параметры движения и их производные по времени записываются в форме рядов Фурье. Затем полученные после подстановки в

уравнения движения произведения синусов и косинусов сводятся к суммам синусов и косинусов с помощью тригонометрических соотношений. После этого производится приравнивание коэффициентов при одинаковых гармониках (т. е. при $1, \cos \psi, \sin \psi, \cos 2\psi, \sin 2\psi$ и т. д.) в правой и левой частях уравнения движения; в результате получается система линейных алгебраических уравнений бесконечно большого порядка для амплитуд гармоник $\beta_0, \beta_{1c}, \beta_{1s}$ и т. д. Для получения системы конечного порядка ряд Фурье ограничивают требуемым количеством гармоник.

Во втором способе к дифференциальному уравнению движения применяют следующие операторы:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) d\psi, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \cos n\psi d\psi, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\dots) \sin n\psi d\psi.$$

Периодические коэффициенты вновь записываются в форме рядов Фурье, а произведения гармоник сводятся к суммам гармоник. Данный способ проще предыдущего, поскольку в нем параметры движения не представляются в форме рядов Фурье. Интегральные операторы применяются только к произведениям параметров движения на синусы и косинусы, т. е. к членам вида $\beta \cos k\psi$ или $\beta \sin k\psi$. Далее полученные интегралы заменяют соответствующими гармониками движения лопасти с помощью выражений коэффициентов Фурье. В результате получают систему линейных алгебраических уравнений, которую решают для требуемого количества гармоник.

Оба способа приводят к одной и той же системе уравнений. Операционный способ имеет то преимущество, что в нем сразу получается искомая система уравнений; его можно интерпретировать как представление в невращающейся системе координат условия равновесия моментов, из которого вытекает уравнение движения.

8.2. СУММА ГАРМОНИК

Для определения суммарного действия несущего винта с N лопастями, совершающими одинаковые периодические движения, необходимо вычислять суммы гармоник вида $\sum_{m=1}^N \cos n\psi_m$

или $\sum_{m=1}^N \sin n\psi_m$. Здесь азимут каждой лопасти равен $\psi_m = \psi + m\Delta\psi$, где ψ — безразмерное время (и азимут лопасти, принятой за начальную), а $\Delta\psi = 2\pi/N$ — азимутальное расстояние между лопастями. Суммирование производится по всем ло-

пастям, от $m = 1$ до N . Суммы гармоник равны:

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \cos n\psi_m = f_n \cos n\psi,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \sin n\psi_m = f_n \sin n\psi,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{in\psi_m} = f_n e^{in\psi},$$

где $f_n = 1$ только в тех случаях, когда n кратно числу лопастей (т. е. $n = pN$, где p — целое число); в остальных случаях $f_n = 0$. Следовательно, сумма равна нулю, если номер гармоники не кратен числу лопастей. Для доказательства этого утверждения рассмотрим сумму

$$S = \sum_{m=1}^N e^{inm \Delta\psi} = \sum_{m=1}^N e^{2\pi i mn/N}.$$

Если вынести множитель $e^{in\psi}$ за знак суммы $\sum_{m=1}^N e^{in\psi_m}$, то останется доказать, что $S = Nf_n$. Если n/N — целое число, то

$$(e^{2\pi i})^{\frac{n}{N}m} = 1^{\frac{n}{N}m} = 1$$

для всех m , и тогда $S = \sum_{m=1}^N 1 = N$. Для случая когда n/N не является целым числом, заметим, что умножение суммы S на $e^{2\pi i \frac{n}{N}}$ эквивалентно вычитанию первого члена (с номером $m = 1$) и прибавлению члена с номером $m = N + 1$:

$$Se^{2\pi i \frac{n}{N}} = S + e^{2\pi i \frac{n}{N}(N+1)} - e^{2\pi i \frac{n}{N}} = S + e^{2\pi i n} e^{2\pi i \frac{n}{N}} - e^{2\pi i \frac{n}{N}} = S,$$

поскольку $e^{2\pi i n} = 1$. Но $e^{2\pi i \frac{n}{N}} \neq 1$, если n/N не целое число, так что $S = 0$. Следовательно, $S = Nf_n$, что и требовалось доказать.

В динамике несущего винта встречаются также суммы следующих видов:

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (-1)^m \cos n\psi_m = g_n \cos n\psi,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (-1)^m \sin n\psi_m = g_n \sin n\psi,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (-1)^m e^{in\psi_m} = g_n e^{in\psi},$$

где $g_n = 1$, если $n = \frac{N}{2} + pN$ (p — некоторое целое число), и $g_n = 0$ в противном случае. Таким образом, суммы равняются нулю, если номер гармоники не равен нечетному числу, кратному $N/2$ (при этом несущий винт должен иметь четное число лопастей). Доказательство аналогично приведенному выше; заметим только, что $(-1)^m = e^{i \frac{N}{2} m \Delta\psi}$.

8.3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

При практических вычислениях периодическая функция $f(\psi)$ обычно задается в J точках, равномерно распределенных по азимуту: $f_j = f(\psi_j)$, где $\psi_j = j2\pi/J$ для j , меняющегося от 1 до J . Функция f в промежутках между известными значениями может быть оценена с помощью интерполяционной формулы Фурье:

$$\tilde{f}(\psi) = \sum_{l=-L}^L F_l e^{il\psi} \quad (L \leq (J-1)/2), \quad \text{где } F_l = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J f_j e^{-il\psi_j}$$

есть численная оценка представления функции $f(\psi)$ гармониками ряда Фурье. Если $L < (J-1)/2$, то данное выражение является наилучшим приближением к f в смысле минимума среднеквадратических отклонений. Если $L = (J-1)/2$, то $\tilde{f}(\psi_j) = f_j$.

Интерполяционная формула Фурье, давая точную оценку периодической функции в точках, где ее значения известны, обычно плохо определяет промежуточные значения. Она приводит к отклонениям из-за высших гармоник и не позволяет получить хороших оценок производных функции. При численном гармоническом анализе лучше использовать линейную интерполяцию

$$\tilde{f}(\psi) = f(\psi_j) + [(\psi - \psi_j)/(\psi_{j+1} - \psi_j)] [f(\psi_{j+1}) - f(\psi_j)]$$

для $\psi_j \leq \psi \leq \psi_{j+1}$. Эта интерполяция эквивалентна определению суммы

$$\tilde{f}(\psi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_l e^{il\psi}$$

с гармониками

$$F_l = \left(\frac{J}{\pi l} \sin \frac{\pi l}{J} \right)^2 \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J f_j e^{-il\psi_j}$$

Множитель $[(J/\pi l) \sin(\pi l/J)]^2$ приводит к уменьшению амплитуд высших гармоник, но зато требуется бесконечное количе-

ство гармоник. Интерполяция улучшается усечением ряда Фурье: $l = -L \div L$. Обычно значение $L \simeq 1/3$ удовлетворительно.

8.4. ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

В общем случае уравнения движения несущего винта во вращающейся системе координат содержат параметры, описывающие движение каждой лопасти по отдельности. Примером может служить уравнение махового движения, полученное в гл. 5. В действительности, однако, несущий винт реагирует на возмущения (такие, как порывы ветра, отклонения управления или перемещения вала) как единое целое в невращающейся системе координат. Поэтому желательно иметь дело с параметрами, которые отражают это реагирование. Такое представление движения несущего винта упрощает анализ и позволяет лучше понять поведение винта. Для установившегося состояния маховое движение лопасти описывается рядом Фурье, амплитуды гармоник которого характеризуют движение несущего винта в целом. Уравнения движения в невращающейся системе координат представляют собой просто алгебраические уравнения для амплитуд гармоник. Далее мы будем рассматривать динамику несущего винта в общем случае, включая переходные процессы.

Преобразование параметров и уравнений движения при переходе к невращающейся системе координат будем называть *фурье-преобразованием*. Имеется много общего между этим преобразованием координат, рядами Фурье, интерполяцией Фурье и дискретным преобразованием Фурье. Так, общим является периодический характер системы. Фурье-преобразование координат широко применялось в исследованиях, хотя часто лишь на эвристической основе. Оно было использовано, например, в работе [С.77] для представления движения лопасти в плоскости вращения при анализе земного резонанса и в работе [М.121] для представления махового движения лопасти при анализе устойчивости и управляемости вертолета. Среди недавних работ с применением фурье-преобразования координат на более солидной математической основе можно отметить [Н.137].

8.4.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим несущий винт с N лопастями, расположенными на азимутах $\psi_m = \psi + m\Delta\psi$, где ψ — безразмерное время ($\psi = \Omega t$ при постоянной угловой скорости) и $\Delta\psi = 2\pi/N$ — расстояние по азимуту между лопастями. Номер лопасти m меняется от 1 до N . Пусть $\beta^{(m)}$ — угол взмаха m -й лопасти во вращающейся системе координат. Фурье-преобразование

координат является линейным преобразованием углов взмаха из вращающейся в невращающуюся систему координат. Вводятся следующие новые параметры движения:

$$\beta_0 = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)}, \quad \beta_{nc} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \cos n\psi_m,$$

$$\beta_{ns} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \sin n\psi_m, \quad \beta_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} (-1)^m.$$

Эти параметры описывают движение несущего винта в невращающейся системе координат. Так, β_0 — угол конусности лопастей, а β_{1c} и β_{1s} — углы, определяющие наклон плоскости концов лопастей. Остальные параметры можно назвать «безреакционными», поскольку они не связаны с силами или моментами на втулке винта. Обратное преобразование, которое вновь дает движение отдельной лопасти, имеет вид

$$\beta^{(m)} = \beta_0 + \sum_n (\beta_{nc} \cos n\psi_m + \beta_{ns} \sin n\psi_m) + \beta_{N/2} (-1)^m.$$

Суммирование по номеру гармоники производится от $n = 1$ до $(N-1)/2$ для нечетного N и от $n = 1$ до $(N-2)/2$ для четного N . Безреакционный параметр движения $\beta_{N/2}$ входит в преобразование только при четном N .

Переменные β_0 , β_{nc} , β_{ns} и $\beta_{N/2}$ являются параметрами движения, т. е. функциями времени, как и переменные $\beta^{(m)}$. Они характеризуют движение всего несущего винта в невращающейся системе координат, тогда как переменная $\beta^{(m)}$ описывает движение отдельной лопасти во вращающейся системе координат. Таким образом, имеем линейное обратимое преобразование N параметров движения $\beta^{(m)}$ ($m = 1, \dots, N$) во вращающейся системе координат в N параметров движения β_0 , β_{nc} , β_{ns} , $\beta_{N/2}$ в невращающейся системе координат. Сравним это преобразование координат с представлением установившегося решения в виде ряда Фурье. В последнем случае, когда $\beta^{(m)}$ является периодической функцией ψ_m , движение всех лопастей одинаковы. Отсюда следует, что движение во вращающейся системе координат может быть представлено рядом Фурье с постоянными коэффициентами и бесконечным количеством членов, так что имеется аналогия между фурье-преобразованием координат и рядом Фурье.

Параметры, связанные с общим и циклическим шагами (β_0 , β_{1c} и β_{1s} , где β может обозначать любую степень свободы лопасти), имеют особую важность ввиду их основной роли в связанном движении несущего винта и фюзеляжа. Из дальнейших глав будет видно, что на вертикальных режимах полета только параметры, связанные с общим и циклическим шагами,

обуславливают связь с движением фюзеляжа, тогда как безреакционные параметры (β_{2c} , β_{2s} , ..., β_{nc} , β_{ns} и $\beta_{N/2}$) соответствуют собственным движениям несущего винта. На режимах полета вперед до некоторой степени все параметры движения несущего винта связаны с движением фюзеляжа, однако параметры, связанные с общим и циклическим шагами, и в этом случае определяют динамику системы. Безреакционный параметр движения $\beta_{N/2}$ винтов с четным числом лопастей вносит некоторые особенности в анализ. Этот параметр описывает идентичное для всех лопастей движение, знак которого поочередно меняется для каждой последующей лопасти. Отметим, что для двухлопастного несущего винта в невращающейся системе координат имеются два параметра движения — угол конусности и угол наклона качалки:

$$\beta_0 = \frac{1}{2}(\beta^{(2)} + \beta^{(1)}).$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\beta^{(2)} - \beta^{(1)}).$$

В данном случае угол наклона качалки β_1 заменяет собой циклические углы β_{1c} и β_{1s} и обуславливает связь с движением фюзеляжа. Ввиду отсутствия циклических углов динамика двухлопастного винта сильно отличается от динамики винтов с большим числом лопастей.

Докажем теперь, что параметры движения во вращающейся и невращающейся системах координат описывают одно и то же движение. Пусть число лопастей N — нечетное; тогда комплексное представление их движения в невращающейся системе координат имеет вид

$$\beta^{(m)} = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \beta_n e^{in\psi_m},$$

$$\beta_n = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} e^{-in\psi_m}.$$

Покажем, что эти преобразования взаимно обратимы. Подстановка выражения $\beta^{(m)}$ дает

$$\begin{aligned} \beta_l &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left[\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \beta_n e^{in\psi_m} \right] e^{-il\psi_m} = \\ &= \sum_n \beta_n \left[\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{i(n-l)\psi_m} \right] = \sum_n \beta_n S_{nl}. \end{aligned}$$

Используя результаты разд. 8.2 для суммы гармоник, находим, что $S_{nl} = e^{i(n-l)\psi}$, если $n-l$ кратно N , и $S_{nl} = 0$ в противном случае. Поскольку n и l меньше или равны $(N-1)/2$, величина $n-l$ кратна N только для $n-l=0$. Следовательно, $S_{nl} = 1$ для $n=l$ и $S_{nl} = 0$ в противном случае. В результате получаем $\beta_l = \beta_l$, что и требовалось доказать. Подстановка выражения β_n в обратное преобразование дает

$$\begin{aligned} \beta^{(k)} &= \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \left[\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} e^{-in\psi_m} \right] e^{in\psi_k} = \\ &= \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{in(k-m)\Delta\psi} \right] = \\ &= \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i[n-(N+1)/2](k-m)\Delta\psi} \right] = \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} S_{mk}. \end{aligned}$$

Используя результаты для суммы гармоник, находим, что $S_{mk} = 1$ только в том случае, когда $(k-m)$ кратно N , что требует условия $k-m=0$. В итоге получаем $\beta^{(k)} = \beta^{(k)}$, что и требовалось доказать. Доказательство для случая четного N проводится аналогичным образом, хотя оно и несколько усложняется наличием параметра $\beta_{N/2}$.

Рассмотрим далее преобразование производных по времени от параметров движения. Из выражения

$$\beta^{(m)} = \beta_0 + \sum_n (\beta_{nc} \cos n\psi_m + \beta_{ns} \sin n\psi_m) + \beta_{N/2} (-1)^m$$

следует

$$\begin{aligned} \dot{\beta}^{(m)} &= \dot{\beta}_0 + \sum_n [(\dot{\beta}_{nc} + n\Omega\beta_{ns}) \cos n\psi_m + (\dot{\beta}_{ns} - n\Omega\beta_{nc}) \times \\ &\times \sin n\psi_m] + \dot{\beta}_{N/2} (-1)^m, \quad \ddot{\beta}^{(m)} = \ddot{\beta}_0 + \sum_n [(\ddot{\beta}_{nc} + 2n\Omega\dot{\beta}_{ns} + \\ &+ n\Omega\dot{\beta}_{ns} - n^2\Omega^2\beta_{nc}) \cos n\psi_m + (\ddot{\beta}_{ns} - 2n\Omega\dot{\beta}_{nc} - n\Omega\dot{\beta}_{nc} - \\ &- n^2\Omega^2\beta_{ns}) \sin n\psi_m] + \ddot{\beta}_{N/2} (-1)^m, \end{aligned}$$

где $\Omega = \dot{\psi}$. В безразмерных уравнениях величина Ω опускается, поскольку она постоянна (при необходимости учета изменения частоты вращения несущего винта вводится дополнительная степень свободы), и $\dot{\Omega} = 0$. Тогда гармоники производных опреде-

ляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \dot{\beta}^{(m)} &= \dot{\beta}_0, \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \dot{\beta}^{(m)} \cos n\psi_m &= \dot{\beta}_{nc} + n\beta_{ns}, \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \dot{\beta}^{(m)} \sin n\psi_m &= \dot{\beta}_{ns} - n\beta_{nc}, \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \dot{\beta}^{(m)} (-1)^m &= \dot{\beta}_{N/2}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \ddot{\beta}^{(m)} &= \ddot{\beta}_0, \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \ddot{\beta}^{(m)} \cos n\psi_m &= \ddot{\beta}_{nc} + 2n\dot{\beta}_{ns} - n^2\beta_{nc}, \\ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \ddot{\beta}^{(m)} \sin n\psi_m &= \ddot{\beta}_{ns} - 2n\dot{\beta}_{nc} - n^2\beta_{ns}, \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \ddot{\beta}^{(m)} (-1)^m &= \ddot{\beta}_{N/2}. \end{aligned}$$

Преобразование скорости и ускорения во вращающейся системе координат приводит к появлению членов, обусловленных кориолисовым и центробежным ускорениями.

8.4.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Фурье-преобразование координат должно сопровождаться соответствующим преобразованием дифференциальных уравнений движения. Это преобразование может быть выполнено применением следующих операторов суммирования к уравнениям движения во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (\dots), \quad \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N (\dots) \cos n\psi_m, \quad \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N (\dots) \sin n\psi_m, \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (\dots) (-1)^m. \end{aligned}$$

Суммируя уравнения по N лопастям, получаем N дифференциальных уравнений движения в невращающейся системе координат. Заметим, что те же операции использовались при преобразовании параметров движения. Преобразование уравнений, однако, этим не заканчивается. Следующим шагом является применение такой же процедуры, как и в способе подстановки, упомянутом ранее. Периодические коэффициенты уравнений движения во вращающейся системе координат записываются в виде рядов Фурье, а для параметров движения и их производных по времени применяется фурье-преобразование координат. Затем произведения гармоник сводятся к их суммам с использованием тригонометрических соотношений. Далее приравниваются коэффициенты при $1, \cos \psi_m, \sin \psi_m, \dots, \cos l \psi_m, \sin l \psi_m, (-1)^m$ в правых и левых частях уравнений для получения требуемых дифференциальных уравнений. При этом возникает некоторое затруднение, поскольку в отличие от предыдущего случая с рядом Фурье здесь нужно получить только N уравнений. Таким образом, каждая из гармоник $\cos l \psi_m$ и $\sin l \psi_m$ при $l > N/2$ должна быть переписана в виде произведения гармоник нужных номеров ($l < N/2$) и гармоник с частотой $N\Omega$. Рассмотрим, например, вторую гармонику, появляющуюся в уравнениях для трехлопастного несущего винта. Из соотношений

$$\begin{aligned}\cos 2\psi_m &= \cos 3\psi_m \cos \psi_m + \sin 3\psi_m \sin \psi_m, \\ \sin 2\psi_m &= \sin 3\psi_m \cos \psi_m - \cos 3\psi_m \sin \psi_m\end{aligned}$$

следует, что вторая гармоника добавляет в уравнения с $\cos \psi_m$ и $\sin \psi_m$ составляющие с частотой 3Ω . Предпочтительнее применить операцию суммирования, описанную выше, вместо подбора коэффициентов при одинаковых гармониках. Далее, поскольку суммирование по всем лопастям влияет только на гармоники, для завершения составления уравнений необходимо определить лишь члены вида

$$\sum_{m=1}^N \cos l\psi_m, \quad \sum_{m=1}^N \sin l\psi_m, \quad \sum_{m=1}^N (-1)^m \cos l\psi_m, \quad \sum_{m=1}^N (-1)^m \sin l\psi_m.$$

С учетом результатов разд. 8.2 первые две суммы дают гармоники с частотой $N\Omega$, если l кратно N , а суммы, содержащие $(-1)^m$, дают гармоники с частотой $(1/2)N\Omega$, если l — нечетное число, кратное $N/2$.

Используем далее операционный способ, требующий меньше вкладки с гармониками. Вновь периодические коэффициенты уравнений во вращающейся системе координат записываются в виде рядов Фурье, и к уравнениям применяются операторы суммирования. Произведения гармоник сводятся к их суммам,

как обычно. Поскольку все еще присутствуют параметры движения во вращающейся системе координат, необходимо вычислить члены вида

$$\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \cos l\psi_m, \quad \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \sin l\psi_m,$$

$$\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} (-1) \cos l\psi_m, \quad \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} (-1)^{(m)} \sin l\psi_m.$$

Если $l < N/2$, то первые две суммы по определению являются параметрами движения β_{lc} и β_{ls} в невращающейся системе координат. Пусть в общем случае $l = n + pN$, где p — целое число, а n — номер гармоники, такой, что $n < N/2$. Тогда, используя определения параметров движения в невращающейся системе координат (при изменении n в надлежащих пределах), получим в комплексной форме:

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} e^{-il\psi_m} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{-in\psi_m} e^{-ipN\psi_m} \beta^{(m)} =$$

$$= e^{-ipN\psi} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} e^{-in\psi_m} = e^{-ipN\psi} \beta_n,$$

поскольку $e^{-ipN\psi} = e^{-2\pi ipm} = 1$. Если N — четное число, то необходимо рассмотреть случай $l = n + pN$ при $n = N/2$, для которого

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} e^{-il\psi_m} = e^{-i(p+\frac{1}{2})N\psi} \beta_{N/2}.$$

Действительная форма при $l = n + pN$, где $n < N/2$, имеет вид

$$\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \cos l\psi_m = \beta_{nc} \cos pN\psi - \beta_{ns} \sin pN\psi,$$

$$\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \sin l\psi_m = \beta_{nc} \sin pN\psi + \beta_{ns} \cos pN\psi,$$

или при $n = N/2$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \cos l\psi_m = \beta_{N/2} \cos \left(p + \frac{1}{2}\right) N\psi,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \sin l\psi_m = \beta_{N/2} \sin \left(p + \frac{1}{2}\right) N\psi.$$

Аналогично для сумм, включающих $(-1)^m$ при $l = n + (p - \frac{1}{2})N$, где $n < N/2$, имеем

$$\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} (-1)^m \cos l\psi_m = \beta_{nc} \cos \left(p - \frac{1}{2}\right) N\psi - \beta_{ns} \sin \left(p - \frac{1}{2}\right) N\psi,$$

$$\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} (-1)^m \sin l\psi_m = \beta_{nc} \sin \left(p - \frac{1}{2}\right) N\psi + \beta_{ns} \cos \left(p - \frac{1}{2}\right) N\psi,$$

или при $n = N/2$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} (-1)^m \cos l\psi_m = \beta_{N/2} \cos pN\psi,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} (-1)^m \sin l\psi_m = \beta_{N/2} \sin pN\psi.$$

Дальнейшее составление дифференциальных уравнений в невращающейся системе координат не вызывает затруднений.

В описанном способе преобразования уравнений сделаны два допущения: во-первых, количество степеней свободы невелико, что не приводит к чрезмерному усложнению аналитических выражений, во-вторых, для периодических коэффициентов известны аналитические выражения, например, в виде ряда Фурье. При детальном анализе динамики ни одно из этих допущений неверно, и необходим способ, более удобный для численного интегрирования. Пусть параметры движения записаны в форме

$$\beta^{(m)} = \beta_0 + \sum_n (\beta_{nc} \cos n\psi_m + \beta_{ns} \sin n\psi_m) + \beta_{N/2} (-1)^m$$

и над ними проделаны операции суммирования. Затем выполняется суммирование по всем N лопастям, при котором периодические коэффициенты умножаются на один из множителей 1 , $\cos n\psi_m$, $\sin n\psi_m$ или $(-1)^m$, фигурирующих в фурье-преобразовании координат, и на один из множителей 1 , $\cos k\psi_m$, $\sin k\psi_m$ или $(-1)^m$, входящих в операторы суммирования. Такой способ получения уравнений в невращающейся системе координат проще и легко реализуется в виде программы. Ценность аналитического подхода заключается в сильном упрощении уравнений движения в невращающейся системе координат, так как многие члены в процессе суммирования обращаются в нуль.

Переход к невращающейся системе координат, если дифференциальное уравнение имеет постоянные коэффициенты, элементарно прост. Операции суммирования выполняются только над параметрами движения, а не над коэффициентами уравне-

ния, и переход к параметрам движения и их производным выполняется непосредственно. Рассмотрим в качестве примера уравнение движения динамической системы, состоящей из массы, пружины и демфера:

$$\ddot{\beta}^{(m)} + \frac{\gamma}{8} \dot{\beta}^{(m)} + v^2 \beta^{(m)} = \frac{\gamma}{8} \theta^{(m)}$$

(уравнение махового движения лопасти на режиме висения). Уравнения в невращающейся системе координат имеют вид

$$\ddot{\beta}_0 + \frac{\gamma}{8} \dot{\beta}_0 + v^2 \beta_0 = \frac{\gamma}{8} \theta_0,$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\beta}_{nc} \\ \ddot{\beta}_{ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{8} & 2n \\ -2n & \frac{\gamma}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_{nc} \\ \dot{\beta}_{ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v^2 - n^2 & n \frac{\gamma}{8} \\ -n \frac{\gamma}{8} & v^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{nc} \\ \beta_{ns} \end{bmatrix} = \frac{\gamma}{8} \begin{bmatrix} \theta_{nc} \\ \theta_{ns} \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\beta}_{N/2} + \frac{\gamma}{8} \dot{\beta}_{N/2} + v^2 \beta_{N/2} = \frac{\gamma}{8} \theta_{v/1}.$$

Эти уравнения иллюстрируют, как изменяются члены, представляющие инерцию, демпфирование и упругость. При преобразовании в уравнения для β_{nc} и β_{ns} входят члены, учитывающие кориолисово и центробежное ускорения. Следует отметить, что из-за кориолисова ускорения оказываются взаимосвязанными только уравнения для β_{nc} и β_{ns} . На количество степеней свободы и уравнений влияет также число лопастей.

Уравнения движения и способ их получения сильно усложняются при наличии периодических коэффициентов. Рассмотрим дифференциальное уравнение махового движения лопасти в горизонтальном полете:

$$\begin{aligned} & \ddot{\beta}^{(m)} + \left(\frac{\gamma}{8} + \frac{\gamma}{6} \mu \sin \psi_m \right) \dot{\beta}^{(m)} + \left(v^2 + \frac{\gamma}{6} \mu \cos \psi_m + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{8} \mu^2 \sin 2\psi_m \right) \beta^{(m)} = \left[\frac{\gamma}{8} (1 + \mu^2) + \frac{\gamma}{3} \mu \sin \psi_m - \frac{\gamma}{8} \mu^2 \cos 2\psi_m \right] \times \\ & \quad \times \theta^{(m)} - \left(\frac{\gamma}{6} + \frac{\gamma}{4} \mu \sin \psi_m \right) \lambda \end{aligned}$$

(см. разд. 5.5). Члены, учитывающие инерцию и упругость за счет центробежных сил ($\ddot{\beta}^{(m)} + v^2 \beta^{(m)}$), преобразуются как было указано выше для режима висения. Преобразование членов, учитывающих аэродинамические силы, к невращающейся системе координат дано в разд. 11.4 для случаев двух, трех и четырех лопастей. По мере увеличения числа лопастей из низших гармоник движения в этих случаях исчезают периодические коэффициенты. В полной системе уравнений, однако, периодические коэффициенты всегда присутствуют независимо от числа лопастей. Нужно отметить также, что высшие гармоники

коэффициентов во вращающейся системе координат входят в средние значения коэффициентов в невращающейся системе (см. разд. 11.4). Только гармоники с лопастной частотой ($N\Omega$), а точнее — с кратными $N\Omega$ частотами присутствуют в уравнениях для N -лопастного винта. Это следует из выражений для сумм

$$\sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \cos l\psi_m \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \sin l\psi_m,$$

приведенных выше. Периоду 2π во вращающейся системе координат соответствует при одинаковых лопастях период $T = 2\pi/N$ в невращающейся системе. Исключением являются гармоники с частотой $(1/2)N\Omega$ (вообще говоря, с нечетными частотами, кратными $(1/2)N\Omega$), которые появляются в элементах матрицы, связывающих параметр $\beta_{N/2}$ с другими степенями свободы. Таким образом, для несущего винта с четным числом лопастей, когда добавляется параметр $\beta_{N/2}$, период равен $T = 4\pi/N$. Период увеличился вдвое, поскольку лопасти уже не одинаковы; параметр $\beta_{N/2}$ выделяет лопасти, следующие через одну (амплитуда гармоники умножается на $(-1)^m$). Период $4\pi/N$ получается из математического описания движения несущего винта; с физической точки зрения решение должно иметь период $2\pi/N$.

Уравнения движения несущего винта при полете вперед как во вращающейся, так и в невращающейся системе координат всегда имеют периодические коэффициенты. Решения таких уравнений имеют специфические особенности, и их получение связано с большими трудностями, чем в случае постоянных коэффициентов (разд. 8.6). Если периодичность слабая, то может найтись некоторая система с постоянными коэффициентами, близкая по поведению к исходной. Примером этого могут служить периодические коэффициенты, возникающие вследствие аэродинамических причин при полете вперед. Амплитуды высших гармоник при этом имеют величину порядка μ и менее. Необходимо найти наилучшие пути построения такой аппроксимации с постоянными коэффициентами и определить область ее правомерности. Система с постоянными коэффициентами может быть построена путем замены исходных периодических коэффициентов их средними значениями. Лучше, если такая замена будет выполнена в невращающейся системе координат, поскольку высшие гармоники во вращающейся системе переходят в постоянные коэффициенты в невращающейся. Использование невращающейся системы координат, однако, требует решения большего количества уравнений. Аппроксимация с постоянными коэффициентами — мощный инструмент исследования динамики несущего винта, она будет обсуждена в последующих главах.

8.5. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ДВИЖЕНИЯ НЕСУЩЕГО ВИНТА

Теперь исследуем характеристики движения несущего винта, в частности собственные значения и собственные векторы системы уравнений движения в невращающейся системе координат. Рассмотрим динамическую систему, состоящую из массы, пружины и демпфера, которая во вращающейся системе координат имеет следующее уравнение махового движения на режиме висения:

$$\ddot{\beta}^{(m)} + \frac{\gamma}{8} \dot{\beta}^{(m)} + \nu^2 \beta^{(m)} = 0.$$

Здесь достаточно однородного уравнения, поскольку интерес представляют только частоты и формы тонов. Несвязанные движения лопасти по всем степеням свободы (относительно ВШ, ОШ, упругий изгиб и т. д.) описываются аналогичными уравнениями. Для общности примем произвольный уровень демпфирования $\gamma/8$ и собственную частоту ν , не обязательно близкую к частоте оборотов. Собственными значениями являются корни квадратного уравнения

$$s_R^2 + \frac{\gamma}{8} s_R + \nu^2 = 0,$$

равные

$$s_R = -\frac{\gamma}{16} \pm i \sqrt{\nu^2 - \left(\frac{\gamma}{16}\right)^2}.$$

Уравнения для β_0 и $\beta_{N/2}$ во вращающейся и невращающейся системах координат идентичны:

$$\ddot{\beta}_0 + \frac{\gamma}{8} \dot{\beta}_0 + \nu^2 \beta_0 = 0,$$

$$\ddot{\beta}_{N/2} + \frac{\gamma}{8} \dot{\beta}_{N/2} + \nu^2 \beta_{N/2} = 0.$$

Корни обоих уравнений те же, что и в предыдущем случае: $s = s_R$. Дифференциальные уравнения для β_{nc} и β_{ns} имеют вид

$$\ddot{\beta}_{nc} + 2n\dot{\beta}_{ns} + \frac{\gamma}{8} \dot{\beta}_{nc} + (\nu^2 - n^2) \beta_{nc} + \frac{\gamma}{8} n\beta_{ns} = 0,$$

$$\ddot{\beta}_{ns} - 2n\dot{\beta}_{nc} + \frac{\gamma}{8} \dot{\beta}_{ns} + (\nu^2 - n^2) \beta_{ns} - \frac{\gamma}{8} n\beta_{nc} = 0,$$

или

$$\begin{bmatrix} s^2 + \frac{\gamma}{8}s + \nu^2 - n^2 & 2ns + \frac{\gamma}{8}n \\ -\left(2ns + \frac{\gamma}{8}n\right) & s^2 + \frac{\gamma}{8}s + \nu^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{nc} \\ \beta_{ns} \end{bmatrix} = 0$$

(разд. 8.4.2). Преобразование к невращающейся системе координат вводит члены, обусловленные центробежным и

кориолисовым ускорениями, которые связывают уравнения для β_{nc} и β_{ns} . Характеристическое уравнение

$$\left(s^2 + \frac{\gamma}{8}s + \nu^2 - n^2\right)^2 + \left(2ns + \frac{\gamma}{8}n\right)^2 = 0$$

имеет корни

$$s = -\frac{\gamma}{16} \pm in + i\sqrt{\nu^2 - \left(\frac{\gamma}{16}\right)^2}$$

и сопряженные с ними. Следовательно, собственные значения для β_{nc} и β_{ns} в невращающейся системе координат являются корнями во вращающейся системе, сдвинутыми вдоль мнимой оси на величину n , т. е. $s = s_R \pm in$. Соответствующие собственные векторы равны $\beta_{nc}/\beta_{ns} = i$ для $s = s_R + in$ и $\beta_{nc}/\beta_{ns} = -i$ для $s = s_R - in$.

Собственные значения $s = s_R \pm in$ соответствуют связанному движению β_{nc} и β_{ns} , представляющему собой затухающие колебания с частотой $\text{Im}(s) = \text{Im}(s_R) \pm n$. Степень затухания $\text{Re}(s) = \text{Re}(s_R)$ такая же, как и для корней во вращающейся системе координат. Выражение $\beta_{nc} = i\beta_{ns}$ означает, что движение β_{nc} опережает движение β_{ns} на фазовый угол 90° [т. е. на одну четверть периода колебаний, равного $2\pi/(\text{Im}(s_R) + n)$]. Таким образом, корень $s = s_R + in$ соответствует высокочастотному движению (частота $\text{Im}(s_R) + n$ всегда выше частоты оборотов винта). Корень $s = s_R - in$ соответствует частоте $|\text{Im}(s_R) - n|$. Если $\text{Im}(s_R) > n$, то равенство $\beta_{nc} = -i\beta_{ns}$ означает, что движение β_{nc} отстает от движения β_{ns} на 90° . Если же $\text{Im}(s_R) < n$ и частота $\text{Im}(s_R) - n$ отрицательна, то равенство $\beta_{nc} = -i\beta_{ns}$ означает, что движение β_{nc} опережает движение β_{ns} на 90° . Таким образом, корень $s = s_R - in$ соответствует низкочастотному движению (частота его может быть ниже частоты оборотов винта).

Рассмотрим случай $n = 1$, важный для движения лопасти в плоскостях взмаха и вращения. Для махового движения собственная частота $\text{Im}(s_R)$ обычно несколько ниже частоты оборотов для шарнирных и несколько выше ее для бесшарнирных винтов. Тогда в высокочастотном ($s = s_R + i$) движении β_{ic} опережает β_{is} ; это означает, что нормаль к плоскости концов лопастей описывает конус, вращаясь в том же направлении, что и винт, с частотой, вдвое превышающей частоту его оборотов.

В низкочастотном ($s = s_R - i$) движении нормаль к плоскости концов лопастей описывает конус с низкой частотой, также в направлении вращения винта, если собственная частота ниже оборотной, и в противоположном направлении, если $\text{Im}(s_R)$ превышает частоту оборотов. Собственная частота движения лопасти в плоскости вращения для шарнирного винта и для бесшарнирного винта с лопастями малой жесткости ниже Ω . При высокочастотном собственном движении лопасти в

плоскости вращения центр масс несущего винта вращается вокруг оси винта с частотой, превышающей частоту оборотов, в направлении вращения винта; при низкочастотном собственном движении центр масс вращается в том же направлении, но с низкой частотой. Для бесшарнирного винта с лопастями большой жесткости низшая собственная частота движения лопасти в плоскости вращения выше частоты оборотов, и центр масс винта вращается в направлении, противоположном вращению винта.

На рис. 8.1 показано преобразование собственных значений системы уравнений движения несущего винта при переходе от

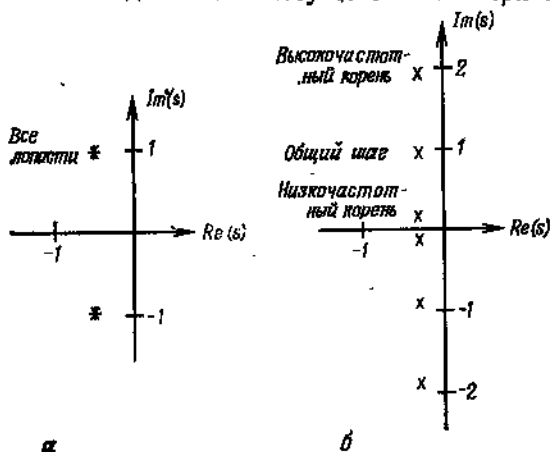


Рис. 8.1. Преобразование собственных значений системы уравнений движения несущего винта из вращающейся в невращающуюся систему координат ($N = 3$).

а — вращающаяся система координат; б — невращающаяся система координат.

вращающейся системы координат к невращающейся. Пример относится к трехлопастному винту с собственной частотой движения лопастей несколько ниже частоты оборотов. Во вращающейся системе координат имеются соответствующие трем лопастям три одинаковых комплексных корня s_R и три сопряженных им; в общем случае для N -лопастного винта будет N пар комплексных корней. В невращающейся системе координат также имеется N пар корней: s_R и сопряженный ему для движений β_0 и $\beta_{N/2}$, и $s_R \pm in$ и сопряженные им для связанных движений β_{nc} и β_{ns} . Таким образом, преобразование координат оставляет неизменными действительные части корней и смещает мнимые части на $\pm n$. На рис. 8.1 показаны собственные значения тонов общего шага (высокочастотного и низкочастотного) для трехлопастного несущего винта. Если отдельные лопасти несущего винта не независимы, а связаны между собой через систему управления или движение вала, то при переходе

к невращающейся системе координат корни не обязательно будут иметь одинаковые действительные части, а мнимые не обязательно будут точно отстоять на n друг от друга. Основным характером изменения корней, иллюстрируемый рис. 8.1, тем не менее сохранится.

8.6. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аэроупругое поведение несущего винта или вертолета во многих случаях описывается линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Периодичность коэффициентов обусловлена воздействием аэродинамических сил при полете вперед, а также асимметрией, органически присущей несущему винту. Следовательно, необходимо иметь возможность оценить динамические характеристики периодических систем, в частности их собственные значения, определяющие устойчивость.

Рассмотрим физическую систему, описываемую обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка:

$$A_2 \ddot{x}_1 + A_1 \dot{x}_1 + A_0 x_1 = B_0 v.$$

Здесь x_1 — вектор степеней свободы, v — вектор входных переменных, A_2 , A_1 , A_0 и B_0 — матрицы коэффициентов уравнений движения. Для стационарной системы элементы матриц постоянны. Нас будет интересовать более общий случай переменных (особенно периодических) коэффициентов. Приведем систему к стандартной форме системы уравнений первого порядка. Пусть $x_2 = \dot{x}_1$, тогда

$$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = -A_2^{-1}(A_1 \dot{x}_1 + A_0 x_1 - B_0 v),$$

и уравнения движения можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} -A_2^{-1}A_1 & -A_2^{-1}A_0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2^{-1}B_0 \\ 0 \end{bmatrix} v,$$

или, в стандартной форме,

$$\dot{x} = Ax + Bv,$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

есть вектор параметров состояния, включающий перемещения и скорости степеней свободы. При переходе от второго порядка к первому размерность вектора x удваивается. Естественно, что

для некоторых переменных состояния отсутствуют члены, определяющие восстанавливающую силу (нулевой столбец в A_0). Такие переменные низших порядков следует представить отдельно, чтобы избежать фиктивных нулевых собственных значений. Поменяем местами степени свободы так, чтобы переменные второго порядка x_1 были в начале вектора, а за ними следовали переменные второго порядка x_0 . Тогда, поскольку последние столбцы A_0 , соответствующие x_0 , равны нулю, можно записать $A_0 = [\dot{A}_0 \vdots 0]$. Система дифференциальных уравнений приобретает вид

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_2^{-1}A_1 & -A_2^{-1}\dot{A}_1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_0 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2^{-1}B_0 \\ 0 \end{bmatrix} v,$$

или $\dot{x} = Ax + Bv$, т. е. вновь имеет стандартную форму. В дальнейшем будем использовать эту матричную форму уравнений.

8.6.1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Сначала с целью создания основы для анализа периодической системы будет выполнен анализ линейной стационарной системы. Хотя основным объектом исследования в настоящей главе являются периодическая система и особенности ее поведения, решение стационарных систем проще, и они более широко используются. Рассмотрим систему, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями вида $\dot{x} = Ax + Bv$, где A и B — постоянные матрицы. Вектор состояния x имеет размерность n . Динамические характеристики этой системы определяются собственными значениями и собственными векторами матрицы A . Система порядка n имеет n собственных значений λ_j ($j = 1, \dots, n$) и соответствующих им собственных векторов u_j , являющихся решениями системы алгебраических уравнений $(A - \lambda_j I)u_j = 0$. Эти однородные уравнения имеют ненулевые решения только в том случае, когда $\det(A - \lambda I) = 0$. Последнее равенство определяет алгебраическое уравнение порядка n относительно λ , называемое *характеристическим уравнением системы*. Его решения и являются собственными значениями. Определим диагональную матрицу Λ собственных значений и модальную матрицу M , столбцы которой представляют собой собственные векторы, расположенные в порядке, соответствующем порядку расположения собственных значений в Λ . Тогда уравнение для собственных значений приобретает вид $AM - M\Lambda = 0$, или $A = M\Lambda M^{-1}$.

Для выяснения роли собственных значений рассмотрим однородное уравнение $\dot{x} = Ax$. Представим вектор состояния

в виде взвешенной суммы собственных векторов матрицы A :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \mathbf{u}_j,$$

где α_j — скалярные функции времени. Такое представление возможно потому, что собственные векторы \mathbf{u}_j образуют полную систему линейно независимых векторов, вследствие чего постоянные α_j могут быть найдены для любого \mathbf{x} . Подставляя \mathbf{x} в $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ с учетом $A\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j \lambda_j$, получаем $\dot{\alpha}_j = \lambda_j \alpha_j$. Решением является $\alpha_j = c_j e^{\lambda_j t}$, где c_j — скалярные постоянные. Теперь решение дифференциального уравнения может быть выражено через собственные значения и собственные векторы:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n c_j e^{\lambda_j t} \mathbf{u}_j.$$

Постоянные c_j находятся из начальных условий $\mathbf{x}(0) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{u}_j$.

Это выражение можно назвать нормальным модальным разложением реакции. В матричной форме разложение вектора состояния по собственным векторам выполняется посредством преобразования $\mathbf{x} = M\mathbf{q}$, где M — модальная матрица, а \mathbf{q} — вектор нормальных координат [эквивалентный $\alpha_j(t)$]. Используя затем равенство $AM = M\Lambda$, преобразуем дифференциальное уравнение $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ к виду $\dot{\mathbf{q}} = \Lambda\mathbf{q}$. Поскольку матрица Λ собственных значений диагональна, получаем ряд отдельных уравнений для q_j , которые легко интегрируются: $\mathbf{q} = e^{\Lambda t} \mathbf{q}(0)$, или $\mathbf{x} = M e^{\Lambda t} \mathbf{q}(0)$. Разрешая соотношение $\mathbf{x}(0) = M\mathbf{q}(0)$ между начальными условиями относительно $\mathbf{q}(0)$ и подставляя $\mathbf{q}(0)$ в вышеприведенные выражения, получаем

$$\mathbf{x} = M e^{\Lambda t} M^{-1} \mathbf{x}(0), \quad \text{или} \quad \mathbf{x} = e^{A t} \mathbf{x}(0),$$

что и является искомым решением однородной системы дифференциальных уравнений.

При анализе линейной стационарной системы требуется в основном оценка собственных значений и собственных векторов матрицы A . Приведенное выше разложение показывает, что решение неустойчиво, если $\text{Re}(\lambda_j) > 0$ хотя бы для одного j . Собственные значения определяют устойчивость системы; часто она представляется графически в виде траекторий корней на комплексной плоскости при изменении какого-либо параметра. Система устойчива, если все корни находятся в левой полуплоскости. Собственные векторы \mathbf{u}_j описывают форму изменения параметра состояния \mathbf{x} , соответствующую каждому собственному значению. Собственные значения действительной матрицы A могут быть действительными или комплексными. Комплексные корни обычно характеризуются частотой $\omega = \text{Im}(\lambda)$ и от-

носителем демпфированием $\xi = -\operatorname{Re}(\lambda)/|\lambda|$ (используется также собственная частота $\omega_n = |\lambda|$). Соответствующее движение представляет собой затухающие колебания с частотой ω . При $\xi = 0$ корни лежат на мнимой оси (нейтральная устойчивость), а при $\xi = 1$ — на действительной оси. При $\xi < 0$ имеют место неустойчивые колебания. Действительные корни характеризуются постоянной времени $\tau = -1/\lambda$ или временем уменьшения амплитуды вдвое $t_{0,5} = 0,693\tau$. Собственные векторы, соответствующие комплексным собственным значениям, также должны быть комплексными сопряженными величинами. Следовательно, соответствующие начальные значения нормальных координат $[q(0) = M^{-1}x(0)]$ — также комплексные сопряженные величины. Составляющая вектора состояния, соответствующая паре комплексных корней, — действительная величина:

$$\Delta x = u_1 e^{\lambda_1 t} q_1(0) + u_2 e^{\lambda_2 t} q_2(0) = 2\operatorname{Re} [u_1 e^{\lambda_1 t} q_1(0)].$$

Рассмотрим далее решение, соответствующее реакции на входной вектор v . С использованием $x = Mq$ нормальная форма дифференциального уравнения $\dot{x} = Ax + Bv$ принимает вид $\dot{q} = \Lambda q + M^{-1}Bv$. Ввиду диагональности матрицы Λ эта система легко интегрируется:

$$q(t) = e^{\Lambda(t-t_0)} q(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t-\tau)} M^{-1} B v d\tau.$$

Первое слагаемое представляет переходный процесс и зависит от начальных условий, а второе описывает реакцию на входной сигнал v после момента времени t_0 . В устойчивой системе переходный процесс по мере увеличения t стремится к нулю. Решение можно выразить через вектор x :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B v d\tau.$$

Матрица $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ называется *фундаментальной* (или *переходной*) *матрицей системы*, она связывает состояние системы в момент времени t с состоянием при t_0 . Рассмотрим реакцию системы на синусоидальное воздействие $v = v_0 e^{i\omega t}$. Реакция линейной стационарной системы будет также синусоидальной с частотой ω , т. е. $x = x_0 e^{i\omega t}$. Интегрируя вышеприведенное выражение при $t_0 = -\infty$ или непосредственно решая дифференциальное уравнение, имеем

$$x_0 = -(i\omega - A)^{-1} B v_0 = -(A + i\omega)^{-1} (A^2 + \omega^2 I)^{-1} B v_0.$$

Это решение можно представить в виде $x_0 = H v_0$, где $H(\omega)$ — матрица передаточных функций системы. Реакция на ступенчатый входной сигнал может быть определена путем интегриро-

вания при условиях $v = 0$ для $t < 0$ и $v = v_0$ для $t > 0$:

$$x = A^{-1}(e^{At} - I) B v_0.$$

Предел этого выражения при неограниченном увеличении времени соответствует установившейся реакции $x = -A^{-1} B v_0$.

8.6.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейную нестационарную динамическую систему, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями в форме $\dot{x} = A(t)x + B(t)v$. Коэффициенты матриц A и B являются функциями времени. В частности, нас будут интересовать периодические системы, для которых справедливо соотношение $A(t+T) = A(t)$, где T — период. Уравнения с периодическими коэффициентами рассматриваются в теории Флоке — Ляпунова.

Решение однородной системы $\dot{x} = A(t)x$ должно иметь форму $x(t) = \varphi(t, t_0)x(t_0)$, поскольку для линейной системы степени свободы в момент времени t должны быть линейной комбинацией степеней свободы в момент времени t_0 . По определению $\varphi(t_0, t_0) = I$ и $\varphi(t_2, t_0) = \varphi(t_2, t_1)\varphi(t_1, t_0)$, откуда следует (если положить $t_2 = t_0$), что $\varphi(t_1, t_0) = \varphi^{-1}(t_0, t_1)$. Подставляя $x(t) = \varphi x(t_0)$ в $\dot{x} = Ax$, получаем дифференциальное уравнение $\dot{\varphi} = A\varphi$ с начальными условиями $\varphi(t_0, t_0) = I$. Полное решение при воздействии входного сигнала v находится с помощью фундаментальной матрицы:

$$x(t) = \varphi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau) B(\tau) v(\tau) d\tau.$$

Таким образом, для анализа реакции линейной системы необходимо определить ее фундаментальную матрицу. Для стационарной системы матрица φ зависит только от разности $t - t_0$ и равна $\varphi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$.

В случае периодически изменяющихся коэффициентов $[A(t+T) = A(t)]$ дифференциальное уравнение для φ приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, t_0) = A(t) \varphi(t, t_0)$$

и

$$\frac{d}{dt} \varphi(t+T, t_0) = A(t+T) \varphi(t+T, t_0) = A(t) \varphi(t+T, t_0).$$

Это означает, что матрица $\varphi(t+T, t_0)$ должна быть линейной комбинацией $\varphi(t, t_0)$, поскольку обе матрицы являются решением одного и того же уравнения. Следовательно,

$$\varphi(t+T, t_0) = \varphi(t, t_0) \alpha,$$

где α — постоянная матрица, зависящая от системы. Запишем фундаментальную матрицу как

$$\varphi(t, 0) = P(t) e^{\beta t},$$

или, в более общем виде,

$$\varphi(t, t_0) = P(t) e^{\beta(t-t_0)} P^{-1}(t_0),$$

где β — постоянная матрица, определяемая соотношением $\alpha = e^{\beta T}$. Тогда

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \varphi(t+T, 0) e^{-\beta(t+T)} = \varphi(t, 0) \alpha e^{-\beta T} e^{-\beta t} = \\ &= \varphi(t, 0) e^{-\beta t} = P(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что матрица P — периодическая, с начальными условиями $P(0) = I$. Таким образом, установлено, что решение системы с периодическими коэффициентами должно состоять из экспоненциального множителя, который может быть нарастающим или затухающим, что определяется постоянной матрицей β , и чисто периодического множителя P . Это — основной результат теории Флоке.

Из равенства $\varphi(t+T, t_0) = \varphi(t, t_0) \alpha$ следует, что $\varphi(t+NT, t_0) = \varphi(t, t_0) \alpha^N$. Таким образом, вся информация о решении содержится в фундаментальной матрице за один период. Поскольку по определению $\alpha = \varphi(t_0+T, t_0)$, эти данные позволяют получить решение для любого момента времени.

Пусть Θ — матрица собственных значений α , а S — соответствующая модальная матрица, так что $\alpha = S\Theta S^{-1}$. Тогда $\alpha^N = S\Theta^N S^{-1}$, откуда следует, что система неустойчива и фундаментальная матрица неограниченно возрастает по времени при $|\Theta_j| > 1$ для любого собственного значения α . Более удобно корнями считать собственные значения β . Пусть Λ — матрица собственных значений β , а S — модальная матрица, так что $\beta = S\Lambda S^{-1}$ (α и β имеют одни и те же собственные векторы). Из определения $\alpha = e^{\beta T}$ следует, что собственные значения связаны соотношением $\Theta = e^{\Lambda T}$, или

$$\Lambda = \frac{1}{T} \ln \Theta.$$

Решение будет неустойчивым, если $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$ для какого-либо собственного значения. Заметим, что логарифм комплексной функции имеет много ветвей, давая значения для λ_j , отличающиеся по частоте множителем $2\pi i/T$. Обычно используется главное значение λ_j или значение с частотой, ожидаемой по физическим соображениям.

Фундаментальную матрицу для периодической системы по аналогии со стационарной можно записать в нормальной форме. При использовании собственных значений β имеем

$$\varphi(t, t_0) = P(t) e^{\beta(t-t_0)} P^{-1}(t_0) = [P(t) S] e^{\Lambda(t-t_0)} [P(t_0) S]^{-1},$$

что можно сравнить с результатом для стационарной системы:

$$\varphi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = Me^{A(t-t_0)}M^{-1}.$$

Следовательно, периодическую матрицу PS можно рассматривать как модальную (т. е. состоящую из собственных векторов) для периодической системы, а собственные значения Λ определяют основные частоты и демпфирование составляющих решения. При переходе к нормальным координатам q имеем $x = PSq$. Переходный процесс $x(t) = \varphi(t, t_0)x(t_0)$ в нормальных координатах имеет вид $q(t) = e^{\Lambda(t-t_0)}q(t_0)$, как и для стационарной системы. Если вектор u записан для столбцов PS , то нормальная форма имеет вид

$$x(t) = P(t)Se^{\Lambda t}q(0) = \sum_j u_j(t)e^{\lambda_j t}q_j(0)$$

при начальных условиях, определяемых выражением $q(0) = S^{-1}x(0)$. Как и стационарная, периодическая система имеет нормальные составляющие решения (тоны) u_j и корни λ_j , но собственные векторы для нее не постоянные, а переменные $u_j(t+T) = u_j(T)$, что вытекает из периодичности P . Применяя подстановку $\varphi = Pe^{\beta t}$, получаем дифференциальное уравнение для φ :

$$P = AP - P\beta.$$

Отсюда следует дифференциальное уравнение для собственных векторов u_j , которые образуют столбцы матрицы PS :

$$\dot{u}_j = (A - \lambda_j I)u_j.$$

Требование периодичности u_j достаточно для определения собственных значений λ_j . Для стационарного случая (матрица A постоянна) единственным «периодическим» решением является $u_j = \text{const}$, и уравнение сводится к $(A - \lambda_j I)u_j = 0$.

Таким образом, анализ динамики системы, описываемой линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами, требует определения фундаментальной матрицы φ за время одного периода (от $t=0$ до T) путем интегрирования уравнения $\dot{\varphi} = A\varphi$ с начальными условиями $\varphi(0) = I$. Затем определяются собственные значения и собственные векторы матрицы $\alpha = \varphi(T)$ и корни системы $\Lambda = (1/T)\ln \alpha$. Формы составляющих движения определяются зависимостями $PS = \varphi Se^{-\Lambda t}$ или $u_j = e^{-\lambda_j t} \varphi v_j$ (где v_j — собственные векторы α). Система неустойчива, если $|\theta_j| > 1$ или $\text{Re}(\lambda_j) > 0$ для какой-либо из мод. Часто анализ сводится лишь к нахождению собственных значений, поскольку переменные во времени собственные векторы периодической системы содержат много информации о ней. Для системы второго порядка с одной степенью свободы можно получить характеристическое уравнение непо-

средственно. Уравнение $a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$ интегрируется за один период, от $t = 0$ до T , при двух независимых начальных условиях. Пусть x_R — решение для начальных условий $\dot{x}(0) = 1$ и $x(0) = 0$, а x_P — решение для начальных условий $\dot{x}(0) = 0$ и $x(0) = 1$. Тогда собственные значения

$$\alpha = \begin{bmatrix} \dot{x}_R(T) & \dot{x}_P(T) \\ x_R(T) & x_P(T) \end{bmatrix}$$

суть решения квадратного уравнения

$$\theta^2 - [\dot{x}_R(T) + x_P(T)]\theta + [\dot{x}_R(T)x_P(T) - x_R(T)\dot{x}_P(T)] = 0.$$

Решение для x с учетом входного воздействия v может быть получено, как и ранее, при помощи фундаментальной матрицы. С другой стороны, используя соотношение $x = PSq$ и интегрируя нормальные уравнения, можно получить

$$q(t) = e^{\Lambda(t-t_0)} q(t_0) = \int_{t_0}^t e^{\Lambda(t-\tau)} (PS)^{-1} B(\tau) v(\tau) d\tau.$$

Хотя результат формально подобен решению для стационарного случая, следует помнить о том, что PS и, возможно, B — периодические матрицы. Периодичность, помимо того что она затрудняет оценку переходного процесса, серьезно влияет на его характер. Например, реакция на синусоидальное возмущение с частотой ω включает не только составляющую, имеющую эту частоту, но и гармоники с частотами $\omega \pm n2\pi/T$ всех целочисленных значений n , где $2\pi/T$ — основная частота системы. Таким образом, реакция периодической системы в частотной области описывается не единственной матрицей передаточных функций, а передаточными функциями $H_n(\omega)$ для каждой гармоники $\omega + n2\pi/T$, или периодической функцией времени

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(\omega) e^{i2\pi n t/T}.$$

Рассмотрим более детально собственные значения периодической системы. Собственные значения θ_j матрицы $\alpha = \Phi(T)$ являются либо действительными, либо комплексными сопряженными величинами. Тогда корни λ_j , получаемые из $\lambda = (1/T) \ln \theta$,

$$\lambda = \frac{1}{T} (\ln |\theta| + i \angle \theta) + n \frac{2\pi}{T} i,$$

где $\angle \theta$ — аргумент, или фазовый угол θ . Главная часть собственного значения равна

$$\lambda_p = \frac{1}{T} (\ln |\theta| + i \angle \theta).$$

К ней может быть добавлена величина, кратная основной частоте $2\pi/T$, в зависимости от ветви логарифмической функции, на которой находится корень. Пара комплексных сопряженных значений θ дает пару комплексных корней λ_p . Действительное положительное значение θ дает главное значение корня λ_p с нулевой мнимой частью, так что частота λ кратна основной частоте системы (т. е. $n\Omega$). Для действительного отрицательного значения θ частота главной части корня λ_p равна π/T , или половине основной частоты; при λ частота равна $(n + \frac{1}{2})\Omega$. Для интерпретации этих корней нужно ответить на два вопроса: как выбирается ветвь логарифмической функции (т. е. какая гармоника основной частоты прибавляется к частоте λ_p) и какое значение корней λ связано с действительным θ (корни λ — комплексные, но они не имеют соответствующих сопряженных, если θ — действительная величина). Как и при интерпретации комплексных корней стационарной системы, интересно рассмотреть реальную физическую реакцию $x(t)$, а не отдельно собственные значения и собственные векторы. Главное значение λ_p единственным образом определяется величиной θ ; ей же соответствует главное значение формы тона u . Физическая реакция системы зависит от произведения $ue^{\lambda t}$. Таким образом, добавление к частоте корня частоты $in2\pi/T$, кратной основной, соответствует умножению тона на периодическую функцию $e^{-i2\pi nt/T}$. Теория требует только того, чтобы форма тона $u(t)$ была периодической, и не указывает распределения периодичности между собственным значением и собственным вектором. Если анализируемая система в некотором предельном случае стационарна, то частоты корней определяются исходя из требования о непрерывности корней при введении периодичности. Например, периодические коэффициенты, определяемые аэродинамическими силами при полете вперед, исчезают в предельном случае висения, $\mu = 0$. Один из критериев выбора частот состоит в том, чтобы среднее значение собственного вектора имело наибольшую величину; тогда наибольшая по величине гармоника собственного вектора, соответствующая главному собственному значению, дает частоту $n2\pi/T$. Такой критерий дает правильные результаты в стационарном случае. Частоты корней могут также быть определены по известным несвязанным собственным частотам системы или из других соображений, относящихся к физической природе переходного процесса.

Действительному положительному корню θ соответствует единственный комплексный корень λ , имеющий частоту, кратную основной частоте системы. Главное значение λ_p лежит на действительной оси; это означает, что составляющая $x(t)$ и главное значение собственного вектора также должны быть действительными величинами. Прибавление к λ частоты $in2\pi/T$

соответствует умножению формы моды на $e^{-i2\pi n t/T}$ без изменения произведения $u e^{\lambda t}$. Действительному отрицательному корню θ соответствует главное значение λ_p с частотой, равной половине основной частоты системы, $\lambda_p = (1/T)(\ln|\theta| + i\pi)$. Требование о том, чтобы величина $u e^{\lambda t}$ была действительной, соответствует требованию, чтобы функция $w(t) = u(t) e^{i\pi t/T}$ была действительной, и, поскольку u — периодическая величина, w должна быть антипериодической: $w(t+T) = -w(t)$. Таким образом, частота $\lambda = \Omega/2$ соответствует составляющей реакции $\Delta x = c_j w(t) e^{(i/T)\ln|\theta|}$ где $w(t)$ — действительная антипериодическая

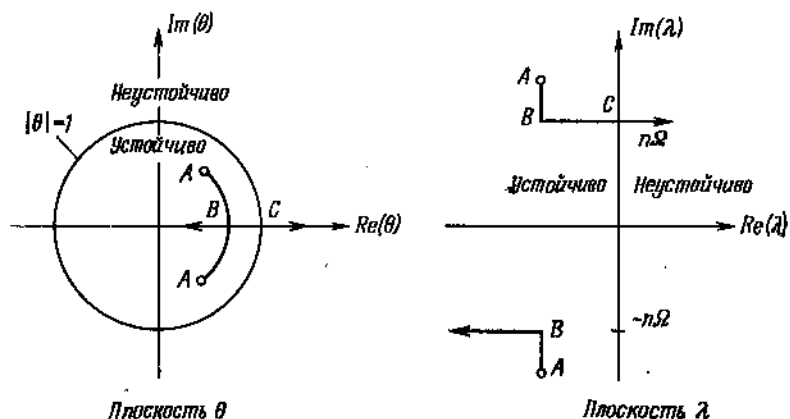


Рис. 8.2. Пример корневого годографа периодической системы.

функция. Следовательно, если собственные значения действительной матрицы α , т. е. корни θ , могут быть либо действительными, либо парами комплексных сопряженных, то на корни λ не наложено таких ограничений. Действительному θ соответствует единственный корень λ с частотой, кратной половине основной частоты системы. Указанные свойства решения объясняются периодичностью собственных векторов.

На рис. 8.2 показан пример корневого годографа периодической системы. Он типичен для систем с ярко выраженной периодичностью коэффициентов. Пусть параметром служит, например, характеристика режима μ . При $\mu = 0$ система стационарна и имеет пару комплексных сопряженных корней на плоскостях θ и λ (точка А). При увеличении μ возрастает периодичность системы и корни изменяются. Корни λ остаются комплексными сопряженными, пока корни θ — комплексные. Если корни θ становятся действительными (точка В), то один из них увеличивается, а другой — уменьшается. В плоскости λ корни при некотором критическом μ достигают частоты $n\Omega$ (или $n + \Omega/2$ для действительного отрицательного θ) и по мере уве-

личения μ перемещаются параллельно действительной оси — один в сторону увеличения, а другой в сторону уменьшения при постоянной частоте. Неустойчивость соответствует условию $|\theta| > 1$ или $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, т. е. корни переходят через границу устойчивости, когда годограф выходит из единичной окружности на плоскости θ или переходит в правую полуплоскость λ . В стационарной системе возможны два типа неустойчивости: пара комплексных сопряженных корней пересекает мнимую ось плоскости λ при положительной частоте или единственный действительный корень переходит через начало координат в правую полуплоскость. Для периодической системы характерен третий тип неустойчивости, наблюдающийся при ярко выраженной периодичности. На рис. 8.2 показан этот тип неустойчивости. После того как корни θ становятся действительными, один из них делается более, а другой — менее устойчивым. Наконец, менее устойчивый корень пересекает границу устойчивости. В случае стационарной системы такое разделение ветвей корневого годографа в плоскости λ возможно только на действительной оси. Для периодической системы это свойство обобщается так, что неустойчивость может возникнуть на любой частоте, кратной половине основной частоты системы. Таким образом, неустойчивым становится периодическое движение, привязанное к основной частоте системы.

Фурье-преобразование координат, описанное в разд. 8.4, часто рассматривают вместе с обобщенным анализом Флоке линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Действительно, эти направления анализа связаны между собой общим фактором — вращением системы. Однако, поскольку любое из них может потребоваться при анализе несущего винта без использования другого, они различны по существу. Например, фурье-преобразование координат необходимо для представления движения лопасти несущего винта в осевом потоке при возникновении связи с невращающейся системой (движение вала или отклонение управления), но несущий винт при этом остается стационарной системой. С другой стороны, при полете вперед и неподвижном вале винта приемлемо представление движения лопасти во вращающейся системе координат, однако в уравнениях движения появляются периодические коэффициенты, и для оценки устойчивости системы требуется применение анализа Флоке.

В этой главе выводятся дифференциальные уравнения движения лопасти несущего винта. Рассматриваются в основном инерционные и упругие силы на лопасти. Аэродинамика несущего винта учитывается силами и моментами, действующими на сечение лопасти. В гл. 11 уравнения движения дополнены более детальным учетом аэродинамических сил, а решение этих уравнений в гл. 12 позволяет выяснить ряд важных для несущего винта проблем. В гл. 5 рассматривалось движение абсолютно жесткой шарнирно подвешенной лопасти в плоскости взмаха и в плоскости вращения, причем возможен учет пружины в ГШ или отношения ГШ. В настоящей главе вывод уравнений движения выполняется с учетом изгибных и крутильных деформаций; он применим к анализу бесшарнирного винта. При этом определяются реакции втулки и нагрузки на лопасти, а также учитывается движение вала винта.

Уравнения движения лопасти выводятся методами классической механики; обсуждаются также другие возможные подходы к анализу. Определяются собственные частоты и формы изгибных колебаний лопасти. В анализе почти повсеместно используется инженерная теория упругой балки. Предполагается, что сечение лопасти абсолютно жестко; таким образом, модель лопасти является тонкая балка, упругая на изгиб и кручение. Это очень хорошая модель, хотя для решения некоторых задач, например для определения параметров комлевого сечения, может потребоваться более детальное рассмотрение конструкции.

9.1. ТЕОРИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Для анализа собственных изгибных и крутильных колебаний лопасти потребуются результаты теории Штурма — Лиувилля. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение вида $Ly + \lambda Ry = 0$, где L — линейный дифференциальный оператор:

$$L = \frac{d^2}{dx^2} S \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} P \frac{d}{dx} + Q.$$

Здесь S , P , Q и R — симметричные операторы (оператор S симметричен, если $\varphi_1 S \varphi_2 = \varphi_2 S \varphi_1$ для всех функций φ_1 и φ_2).

Поставим задачу определения собственных значений λ при соответствующих граничных условиях в крайних точках $x = a$ и $x = b$.

Рассмотрим два различных собственных значения λ_1 и λ_2 и соответствующие им собственные функции φ_1 и φ_2 . Используя дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти функции, и интегрируя дважды по частям, получаем

$$\begin{aligned} (\lambda_2 - \lambda_1) \int_a^b \varphi_1 R \varphi_2 dx &= \int_a^b (\varphi_2 L \varphi_1 - \varphi_1 L \varphi_2) dx = \\ &= \left[\varphi_2 \left(\frac{d}{dx} S \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + P \frac{d\varphi_1}{dx} \right) - \varphi_1 \left(\frac{d}{dx} S \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} + P \frac{d\varphi_2}{dx} \right) \right]_a^b - \\ &\quad - \left[\frac{d\varphi_2}{dx} S \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - \frac{d\varphi_1}{dx} S \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \right]_a^b. \end{aligned}$$

Правая часть равна нулю для граничных условий следующего класса:

$$\frac{d}{dx} S \frac{d^2 y}{dx^2} = K_1 y \text{ и } S \frac{d^2 y}{dx^2} = K_2 \frac{dy}{dx} \text{ или } S = 0,$$

и $P \frac{dy}{dx} = K_3 y$ или $P = 0$ (где K_1 , K_2 и K_3 — постоянные). При этих граничных условиях

$$\int_a^b \varphi_1 R \varphi_2 dx = 0,$$

так что собственные решения ортогональны на интервале (a, b) с весовой функцией R . Для случая изгиба балки к указанному классу относятся следующие граничные условия: а) свободный конец, для которого $d^2 y/dx^2 = d^3 y/dx^3 = 0$ и $P = 0$; б) шарнир на конце, для которого $y = 0$ и $S d^2 y/dx^2 = K dy/dx$, где K — характеристика пружины в шарнире ($d^2 y/dx^2 = 0$, если пружины нет); в) жестко закрепленный конец, для которого $y = 0$ и $dy/dx = 0$ (что является пределом при $K \rightarrow \infty$ для пружины). Для случая кручения стержня ($S = 0$) к указанному классу относятся следующие граничные условия: а) свободный конец, $dy/dx = 0$; б) закрепленный конец, $y = 0$; в) конец с пружиной, $P dy/dx = Ky$, где K — характеристика пружины.

Таким образом, для рассматриваемых случаев изгиба и кручения граничные условия удовлетворяются, и задача Штурма — Лиувилля поставлена правильно при R и P , противоположных по знаку S и Q . Отсюда следует, что собственные решения ортогональны, собственные значения λ действительны и положительны и что произвольная функция на интервале (a, b) может быть разложена в сходящийся ряд по собственным решениям.

Собственное значение λ может быть получено из собственных решений следующим образом:

$$\begin{aligned}
 -\lambda \int_a^b \varphi R \varphi dx &= \int_a^b \varphi L dx = \\
 &= \left[\varphi \frac{d}{dx} S \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} S \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \varphi P \frac{d\varphi}{dx} \right]_a^b + \\
 &\quad + \int_a^b \left[\frac{d^2 \varphi}{dx^2} S \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} P \frac{d\varphi}{dx} + \varphi Q \varphi \right] dx.
 \end{aligned}$$

Например, для балки со свободным концом при $x = b$ и с пружинным закреплением при $x = a$ получаем

$$\begin{aligned}
 -\lambda \int_a^b \varphi R \varphi dx &= \frac{d\varphi}{dx} K \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=a} + \\
 &\quad + \int_a^b \left[\frac{d^2 \varphi}{dx^2} S \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} P \frac{d\varphi}{dx} + \varphi Q \varphi \right] dx,
 \end{aligned}$$

а для стержня со свободным концом при $x = b$ и с пружинным закреплением при $x = a$ имеем

$$\lambda \int_a^b \varphi R \varphi dx = \varphi K \varphi \Big|_{x=a} + \int_a^b \left[\frac{d\varphi}{dx} P \frac{d\varphi}{dx} - \varphi Q \varphi \right] dx.$$

При использовании точных собственных функций получается точное значение λ , но эти выражения могут быть использованы и для нахождения оценок λ , если собственные решения известны лишь приближенно.

9.2. ДВИЖЕНИЕ ЛОПАСТИ В ПЛОСКОСТИ ВЗМАХА

9.2.1. МАХОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖЕСТКОЙ ЛОПАСТИ

Для введения в последующий анализ рассмотрим вывод уравнения движения жесткой лопасти относительно ГШ, более детально выполненный в гл. 5. Лопасть имеет одну степень свободы — угол взмаха β (рис. 9.1), так что отклонение элемента лопасти от плоскости вращения равно $z = \beta r$. ГШ не имеет нося и пружины. Уравнение движения получается из условия равновесия моментов относительно ГШ (основываясь на результатах разд. 5.9, мы и здесь пренебрегаем моментами сил веса). В сечении лопасти, находящемся от оси вращения на расстоянии r , действуют следующие погонные силы, создающие моменты относительно оси ГШ: 1) сила инерции $m\ddot{z} = m r \ddot{\beta}$, противодействующая взмаху, на плече r ; 2) центробежная сила

$m\Omega^2 r$, направленная горизонтально, на плече $z = r\beta$; 3) аэродинамическая сила F_z на плече r . Здесь m — погонная масса лопасти. Из условия равновесия моментов относительно ГШ имеем

$$\left(\int_0^R r^2 m dr \right) (\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta) = \int_0^R r F_z dr.$$

Разделив члены уравнения на момент инерции $I_x = \int_0^R r^2 m dr$ лопасти и используя безразмерные величины, получим

$$\ddot{\beta} + \beta = \frac{1}{I_x} \int_0^1 r F_z dr = \gamma \int_0^1 r \frac{F_z}{ac} dr,$$

где $\gamma = \rho a c R^4 / I_x$ — массовая характеристика лопасти. Это и есть искомое уравнение движения. Центробежная «пружина»

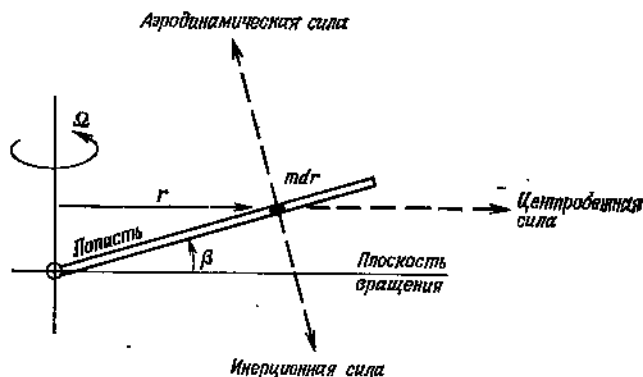


Рис. 9.1. Маховое движение жесткой лопасти.

обуславливает собственную частоту γ движения, равную 1 во вращающейся системе координат.

В случае отбоя ГШ отклонение элемента лопасти от плоскости вращения равно $z = r\eta$, где β — степень свободы, а $\eta = (r - e)/(1 - e)$ — форма изгиба (e — относ. ГШ). Поскольку форма изгиба нормализована так, что $\eta = 1$ на конце лопасти, то β — угол, который образует линия, соединяющая центр втулки и конец лопасти, с плоскостью вращения. В этом случае в сечении действуют следующие силы: 1) сила инерции $m\ddot{z} = m\eta\ddot{\beta}$ на плече $(r - e)$; 2) центробежная сила $m\Omega^2 r$ на плече $z = \eta\beta$; 3) аэродинамическая сила F_z на плече $(r - e)$. Если в ГШ имеется пружина, определяющая конструктивный угол конусности $\beta_{\text{констр}}$, то условие равновесия моментов отно-

сительно ГШ принимает вид

$$\int_e^R m \eta \ddot{\beta} (r - e) dr + \int_e^R m \Omega^2 r \eta \beta dr + K_\beta (\beta - \beta_{\text{констр}}) = \int_e^R (r - e) F_z dr.$$

После деления на $(1 - e)$ и введения обобщенной массы нулевого тона $I_\beta = \int_e^R \eta^2 m dr$ получаем

$$I_\beta (\ddot{\beta} + v^2 \beta) = \frac{K_\beta}{\Omega^2 (1 - e)} \beta_{\text{констр}} + \int_e^1 \eta F_z dz.$$

Здесь собственная частота махового движения равна

$$v^2 = 1 + \frac{e}{1 - e} \frac{\int_e^1 \eta m dr}{\int_e^1 \eta^2 m dr} + \frac{K_\beta}{I_\beta \Omega^2 (1 - e)}.$$

Выполнив деление на I_β , имеем

$$I_\beta^* (\ddot{\beta} + v^2 \beta) = \frac{K_\beta}{I_\beta \Omega^2 (1 - e)} \beta_{\text{констр}} + \gamma \int_e^1 \eta \frac{F_z}{ac} dr,$$

где $I_\beta^* = I_\beta / I_\beta$. Если относ ГШ или пружина отсутствуют, то $v = 1$, а при их наличии (для равномерного распределения масс по лопасти)

$$v^2 = 1 + \frac{3}{2} \frac{e}{1 - e} + \frac{K_\beta}{I_\beta \Omega^2 (1 - e)},$$

так что вообще $v > 1$.

Мы будем рассматривать параметр I_β как характеристику инерционности лопасти. Этот параметр удобен для нормирования обобщенных масс ($I_\beta^* = I_\beta / I_\beta$) и представления сил инерции в массовой характеристике $\gamma = \rho ac R^4 / I_\beta$. Нормирование желательно, поскольку безразмерные моменты инерции делятся на ρR^5 и изменяются вместе с плотностью воздуха. Отметим, что фактическое значение I_β не влияет на численное решение, поскольку все уравнение делится на I_β . Параметр I_β удобен и для бесшарнирной лопасти. Он хорошо определен, характеризует инерцию винта относительно вала и никак не зависит от форм изгибных тонов.

9.2.2. ИЗГИБ ЛОПАСТИ В ПЛОСКОСТИ ВЗМАХА

Теперь рассмотрим изгиб в плоскости взмаха лопасти несущего винта с произвольным закреплением комля. Такая модель будет описывать собственные колебания изгиба как шарнирной,

так и бесшарнирной лопасти. В гл. 5 была рассмотрена динамика бесшарнирного несущего винта с учетом первого тона изгибных колебаний; в настоящем анализе появляется возможность определения частоты и формы тона и дается строгий вывод дифференциального уравнения движения. Уравнение движения получается из условия равновесия аэродинамических, инерционных и упругих моментов, действующих на часть лопасти, внешнюю относительно сечения, расположенного на радиусе r . Пусть $z(r)$ — отклонение элемента лопасти от плоскости вращения. Выпишем силы, действующие в сечении лопасти на радиусе r , и плечи, на которых они создают моменты относительно сечения, расположенного на радиусе r : 1) сила инерции $m\ddot{z}(\rho)$, плечо $(\rho - r)$; 2) центробежная сила $m\Omega^2\rho$, плечо $z(\rho) - z(r)$; 3) аэродинамическая сила F_z , плечо $(\rho - r)$. Момент, действующий в сечении на радиусе r , от сил, приложенных к внешней по отношению к сечению части лопасти, равен

$$M(r) = \int_r^R [(F_z - m\ddot{z})(\rho - r) - m\Omega^2\rho(z(\rho) - z(r))] d\rho.$$

Из теории упругой балки имеем соотношение между изгибающим моментом и кривизной балки $M(r) = EI(d^2z/dr^2)$, где E — модуль упругости материала, I — момент инерции сечения. Уравнение равновесия моментов записывается в виде

$$EI \frac{d^2z}{dr^2} + \int_r^R m\Omega^2\rho [z(\rho) - z(r)] d\rho + \int_r^R m\ddot{z}(\rho - r) d\rho = \int_r^R F_z(\rho - r) d\rho.$$

Двукратное его дифференцирование по радиусу дает следующее дифференциальное уравнение в частных производных для изгиба лопасти в плоскости взмаха:

$$\frac{d^2}{dr^2} EI \frac{d^2z}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left[\int_r^R m\Omega^2\rho d\rho \frac{dz}{dr} \right] + m\ddot{z} = F_z.$$

Рассмотрим граничные условия. Конец лопасти свободен, на нем момент и перерезывающая сила равны нулю, так что при $r = R$ имеем $d^2z/dr^2 = d^3z/dr^3 = 0$. В комлевой части шарнирной лопасти равны нулю перемещение и момент, так что $z = d^2z/dr^2 = 0$ при $r = e$. В комлевой части бесшарнирной лопасти равны нулю перемещение и угол поворота, так что при

$r = e$ (очень жесткая втулка) $z = dz/dr = 0$. Общим случаем является наличие в ГШ пружины с характеристикой K_β , так что для $r = e$ имеем $EI(d^2z/dr^2) = K_\beta(dz/dr)$. Таким образом, шарнирная и бесшарнирная лопасти представляют частные случаи $K_\beta = 0$ и $K_\beta = \infty$ соответственно.

Дифференциальное уравнение движения лопасти в частных производных решается методом разделения переменных, приводящим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (аргумент — время) для ряда степеней свободы, подобных уравнению махового движения жесткой лопасти. Таким образом, отклонение $z(r, t)$ элемента лопасти от плоскости вращения может быть представлено в виде разложения деформации изгиба по собственным формам. Каждое уравнение движения соответствует своему тону собственных колебаний. Сначала необходимо найти подходящие собственные формы для вращающихся лопастей. Когда формы выбраны таким образом, что реакция лопасти на возмущение хорошо описывается несколькими первыми тонами, задачи динамики несущего винта могут быть решены с использованием минимального количества степеней свободы.

Рассмотрим свободные колебания вращающейся лопасти с частотой ν . Тогда в однородном дифференциальном уравнении в частных производных, описывающих изгиб лопасти в отсутствие аэродинамических сил ($F_z = 0$), можно принять $z = \eta(r)e^{i\nu t}$, где η — форма изгиба. В результате получим

$$\frac{d^2}{dr^2} EI \frac{d^2 \eta}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left[\int_r^R m \Omega^2 \rho dr \frac{d\eta}{dr} \right] - \nu^2 m \eta = 0$$

с указанными выше граничными условиями. Это уравнение (поскольку в нем опущены аэродинамические силы) описывает колебания лопасти в вакууме под действием только упругих и инерционных моментов. Решением данного уравнения с граничными условиями являются собственные частоты ν и формы $\eta(r)$ колебаний. Согласно разд. 9.1, это — задача Штурма — Лиувилля, для которой существует ряд собственных решений $\eta_k(r)$ и соответствующих собственных значений ν_k^2 . Формы

собственных колебаний ортогональны: $\int_0^R \eta_k \eta_i m dr = 0$, где m — весовая функция, $i \neq k$.

Разложение произвольной функции от r (каковой является фактическая деформация изгиба лопасти) по собственным формам является сходящимся рядом. Уравнение колебаний линейно, так что решения определяются с точностью до постоянного множителя, поэтому собственные формы нормализуют,

приравнивая единице отклонение конца лопасти, т. е. $\eta(1) = 1$ [или $\eta(R) = R$]. Собственные частоты нумеруют в порядке уменьшения амплитуды, так что основной тон имеет низшую частоту ν_1 . Можно показать, что если тоны пронумерованы в таком порядке, то форма k -го тона включает в себя $k - 1$ форм, для которых $\eta(r) = 0$ [не считая корня, где всегда $\eta(0) = 0$].

Разложим деформацию изгиба z по собственным формам:

$$z(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(r) q_k(t).$$

Функции $q_k(t)$ можно назвать *степенями свободы движения изгиба*. Если формы нормализованы, то q_k представляет собой угол между линией, проведенной из центра втулки к концу k -й формы, и плоскостью вращения. Ввиду ортогональности собственных форм для q_k может быть получена простая система уравнений. Подставим разложение для z в дифференциальное уравнение изгиба в частных производных:

$$\sum_k \left\{ (EI \eta_k''')'' - \left[\int_0^R m \Omega^2 \rho d\rho \eta_k' \right]' \right\} q_k + \sum_k m \eta_k \ddot{q}_k = F_z.$$

Если собственная форма η_k удовлетворяет дифференциальному уравнению, то член в скобках равен $\nu_k^2 m \eta_k$, откуда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} m \eta_k (\ddot{q}_k + \nu_k^2 q_k) = F_z.$$

Применим далее к этому уравнению операцию $\int_0^R (\dots) \eta_k dr$.

Определим $I_{q_k} = \int_0^R \eta_k^2 m dr$ как обобщенную массу k -го тона.

Поскольку $\int_0^R \eta_k \eta_i m dr = 0$ при $i \neq k$, уравнение изгиба принимает вид

$$I_{q_k} (\ddot{q}_k + \nu_k^2 q_k) = \int_0^R \eta_k F_z dr.$$

Использование собственных форм колебаний вращающейся лопасти позволяет выразить члены от упругих и центробежных сил через собственную частоту ν_k , а поскольку эти формы ортогональны, получаем, что дифференциальное уравнение для k -го тона не связано с другими тонами (кроме как через аэродинамическую силу). Поделив на I_x и введя безразмерные величины,

получим

$$I_{q_k}^* (\ddot{q}_k + v_k^2 q_k) = \gamma \int_0^1 \eta_k \frac{F_z}{ac} dr,$$

где $I_{q_k}^* = I_{q_k} / I_x$. Это и есть дифференциальное уравнение упругих изгибных колебаний лопасти по k -му тону.

Дальнейшим результатом использования теории Штурма — Лиувилля является получение собственных частот по формуле Рэлея:

$$v^2 = \frac{K_\beta [\eta'(e)]^2 + \int_0^R \left[EI \eta''^2 + \int_r^R m \Omega^2 \rho d\rho \eta'^2 \right] dr}{\int_0^R \eta^2 m dr}$$

(безразмерная частота получается делением на Ω^2). Это соотношение может быть истолковано как уравнение энергетического баланса: $v^2 \int \eta^2 m dr$ — максимальная кинетическая энергия колеблющейся лопасти, $\int EI \eta''^2 dr$ — максимальная потенциальная энергия изгиба, $K_\beta [\eta'(e)]^2$ — потенциальная энергия пружины в ГШ и $\iint m \Omega^2 \rho d\rho \eta'^2$ — потенциальная энергия центробежных сил. Отметим, что приведенная выше формула Рэлея может быть записана в виде $v^2 = K_1 + K_2 \Omega^2$ (формула Саутвелла). Коэффициенты Саутвелла K_1 и K_2 , представляющие жесткость, создаваемую соответственно упругими и центробежными силами, суть константы, включающие интегралы от собственной формы колебаний. Последняя, вообще говоря, несколько зависит от угловой скорости вращения винта Ω , но формула Саутвелла дает основную зависимость изгибных собственных частот лопасти от Ω (более подробное обсуждение приведено в разд. 9.8.3). Указанное энергетическое соотношение дает точное значение частоты при точной форме колебаний, которая может быть получена из решения характеристического уравнения. Оно может быть также использовано для получения оценок собственных частот с применением приближенных выражений для собственных форм.

Основным тоном махового движения называют решение характеристического уравнения, имеющее наименьшую частоту. Для шарнирного несущего винта без относа ГШ и без пружин, как легко показать, выражение $\eta = r$ удовлетворяет характеристическому уравнению при собственной частоте, равной $v = 1$;

из уравнения также имеем

$$v^2 = \frac{\int_0^1 \int_r^1 m \rho \, d\rho \, dr}{\int_0^1 r^2 m \, dr} = \frac{\int_0^1 \rho m \int_0^\rho dr \, d\rho}{\int_0^1 r^2 m \, dr} = 1.$$

Таким образом, получено уравнение махового движения жесткой лопасти. При отнесе ГШ и наличии пружины форма $\eta = (r - e)/(1 - e)$ дает то же уравнение движения и собственную частоту:

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{\frac{1}{(1-e)^2} \int_e^1 \int_r^1 m \rho \, d\rho \, dr}{\int_e^1 \eta^2 m \, dr} + \frac{K_\beta}{I_\beta \Omega^2 (1-e)^2} = \\ &= \frac{\int_e^1 m \rho (\rho - e) \, d\rho}{(1-e)^2 \int_e^1 \eta^2 m \, dr} + \frac{K_\beta}{I_\beta \Omega^2 (1-e)^2} = \\ &= 1 + \frac{e}{1-e} \frac{\int_e^1 \eta m \, dr}{\int_e^1 \eta^2 m \, dr} + \frac{K_\beta}{I_\beta \Omega^2 (1-e)^2}, \end{aligned}$$

как в разд. 9.2.1. Дополнительный множитель $(1 - e)$ при члене, описывающем пружину, появляется ввиду различия в определении характеристики пружины K_β . Заметим, что уравнение формы не удовлетворяется при $\eta = (r - e)/(1 - e)$, но роль изгиба в основном тоне шарнирной лопасти крайне мала. Лопасть бесшарнирного винта должна изгибаться у комля, так как вид закрепления требует нулевого наклона, однако жесткость, обусловленная центробежными силами, определяет основной тон даже для бесшарнирной лопасти, на что указывает тот факт, что собственная частота лишь незначительно превышает частоту оборотов (обычно $v = 1,1 \div 1,2$). Форма тона бесшарнирной лопасти, не считая участка, близкого к комлю, незначительно отличается от формы тона шарнирной лопасти. Определяющим фактором в изгибных колебаниях является собственная частота,

а не форма тона. Даже небольшое превышение собственной частоты над частотой оборотов в случае бесшарнирного винта сильно влияет на нагрузки у комля лопасти и на характеристики винта в целом.

Второй тон изгибных колебаний обычно имеет собственную частоту, в $2,6 \div 2,8$ раза превышающую частоту оборотов. По мере увеличения номера тона увеличиваются число узлов и кривизна формы. Высшие гармоники, таким образом, важны с точки зрения нагрузок на лопасть и их вычисления. Для шарнирной лопасти второй тон махового движения часто называют первым тоном изгибных колебаний, поскольку основной тон махового движения не связан с упругими деформациями. Для формы второго тона изгибных колебаний шарнирной лопасти можно использовать приближение $\eta = 4r^2 - 3r$, если нет более точных данных. Оно ортогонально первому тону $\eta = r$, однако не удовлетворяет граничным условиям нулевых моментов на конце и у комля лопасти. Можно предложить также выражение $\eta = r - (\pi/3) \sin \pi r$, удовлетворяющее всем условиям, кроме нулевой перерезывающей силы на конце лопасти. Эти приближенные формулы полезны при оценке инерционных и аэродинамических коэффициентов в процессе анализа динамики несущего винта и особенно при оценке собственной частоты второго тона с помощью энергетического соотношения.

Полезь разложения движения лопасти по собственным формам определяется тем, насколько малым количеством гармоник можно ограничиться при решении большинства задач динамики винта. Частотный состав сил, действующих на лопасть, хорошо определяет число тонов, подлежащих учету. Во многих случаях основной тон достаточно хорошо представляет движение как шарнирной, так и бесшарнирной лопасти. Задачи определения переменных нагрузок на несущем винте или вибраций вертолета требуют учета 3—5 тонов изгибных колебаний лопасти.

9.2.3. НЕВРАЩАЮЩАЯСЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Параметры движения и уравнения движения в невращающейся системе координат получаются путем применения фурье-преобразования координат (разд. 8.4). Уравнения движения лопасти в плоскости взмаха выведены для каждой лопасти N -лопастного несущего винта во вращающейся системе координат. При фурье-преобразовании координат вводится N степеней свободы ($\beta_0, \beta_{1c}, \beta_{1s}, \dots, \beta_{nc}, \beta_{ns}, \beta_{N/2}$) для описания движения несущего винта в невращающейся системе координат. Соответствующие N уравнений движения получаются путем применения к уравнениям во вращающейся системе координат

операторов вида

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (\dots), \quad \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N (\dots) \cos n\psi_m, \quad \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N (\dots) \sin n\psi_m, \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (\dots) (-1)^m.$$

В уравнениях этой главы члены, соответствующие инерционным и упругим силам, имеют постоянные коэффициенты, следовательно, операции суммирования будут применяться только к параметрам движения во вращающейся системе координат и к их производным по времени. При использовании определений степеней свободы в невращающейся системе координат (и соответствующих преобразований производных, данных в разд. 8.4.1) преобразование уравнений к невращающимся осям не составляет затруднений.

Если движение каждой лопасти не зависит от других, то уравнения движения во вращающихся осях можно использовать непосредственно. Использование фурье-преобразования координат не требуется, если нет каких-либо связей между лопастями через невращающуюся систему координат (исключением является аппроксимация с постоянными коэффициентами при полете вперед, для которой лучше использовать невращающуюся систему). Преимущества преобразования будут видны ниже в данной главе, при рассмотрении движения вала несущего винта.

Рассмотрим основной тон махового движения лопасти шарнирного или бесшарнирного несущего винта. Уравнение движения m -й лопасти ($m = 1, \dots, N$) во вращающейся системе координат имеет вид

$$I_{\beta}^* (\ddot{\beta}^{(m)} + v^2 \dot{\beta}^{(m)}) = \gamma \int_0^1 \eta \frac{F_z}{ac} dr = \gamma M_F^{(m)}.$$

Применение операторов суммирования, действующих только на $\ddot{\beta}^{(m)}$ и $\dot{\beta}^{(m)}$, непосредственно дает

$$I_{\beta}^* (\ddot{\beta}_0 + v^2 \dot{\beta}_0) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \gamma M_F^{(m)} = \gamma M_{F_0},$$

$$I_{\beta}^* [\ddot{\beta}_{nc} + 2n\dot{\beta}_{ns} + (v^2 - n^2)\beta_{nc}] = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \gamma M_F^{(m)} \cos n\psi_m = \gamma M_{F_{nc}},$$

$$I_{\beta}^* [\ddot{\beta}_{ns} - 2n\dot{\beta}_{nc} + (v^2 - n^2)\beta_{ns}] = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \gamma M_F^{(m)} \sin n\psi_m = \gamma M_{F_{ns}},$$

$$I_{\beta}^* (\ddot{\beta}_{N/2} + v^2 \dot{\beta}_{N/2}) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \gamma M_F^{(m)} (-1)^m = \gamma M_{F_{N/2}}.$$

Влияние этого преобразования на собственные значения и собственные векторы динамики несущего винта обсуждено в разд. 8.5. Дальнейшее решение будет рассмотрено в гл. 12, при введении аэродинамических сил.

9.2.4. ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ

Изгибающий момент на лопасти в плоскости взмаха был получен в разд. 9.2.2 в виде

$$M(r) = \int_r^R [(F_z - m\ddot{z})(\rho - r) - m\Omega^2\rho(z(\rho) - z(r))] dr.$$

Подставляя разложение z по собственным формам и используя безразмерные величины, имеем

$$M(r) = \int_r^1 F_z(\rho - r) d\rho - \sum_k \left[\tilde{q}_k \int_r^1 m\eta_k(\rho - r) dr + q_k \int_r^1 m\rho(\eta_k(\rho) - \eta_k(r)) d\rho \right].$$

Далее разложим аэродинамическую нагрузку в ряд по изгибным формам $F_z = \sum_k F_{zk} m\eta_k(r)$. Легко можно показать, что по-

стоянные равны $F_{zk} = \int_0^1 \eta_k F_z dr / l_{q_k}$. Подставляя разложение для

F_z в выражение изгибающего момента, замечаем, что для k -го изгибного тона $F_{zk} = \tilde{q}_k + v_k^2 q_k$, и изгибающий момент равен

$$M(r) = \sum_k q_k \left[v_k^2 \int_r^1 m\eta_k(\rho - r) d\rho - \int_r^1 m\rho(\eta_k(\rho) - \eta_k(r)) d\rho \right].$$

Таким образом, изгибающий момент может быть определен по реакциям тонов лопасти и по соответствующим формам и частотам тонов. Его можно также определить по кривизне упругой линии лопасти:

$$M(r) = EI \frac{d^2 z}{dr^2} = \sum_k q_k (EI \eta_k''),$$

что эквивалентно предыдущему выражению (это можно показать двукратным интегрированием дифференциального уравнения для η_k).

При учете большого числа тонов лопасти все упомянутые выше выражения для изгибающего момента должны дать

одинаковый результат. Однако в случае малого числа тонов наибольшая точность получается при непосредственном интегрировании аэродинамических сил, действующих в сечении лопасти, и ускорений по лопасти (первое выражение из приведенных выше). В других способах предполагается, что распределение аэродинамической нагрузки хорошо описывается реакцией резонансных тонов (т. е. усеченным рядом $\sum_k F_{z_k} m \eta_k$); это предполо-

жение может оказаться неверным при учете небольшого числа тонов. Наибольшие трудности связаны с использованием выражения $M = Eld^2 z/dr^2$. Они проистекают как от того, что требуется большое число тонов вследствие относительно большого влияния высших тонов на кривизну упругой линии, так и из-за необходимости определения второй производной перемещения (а следовательно, и форм тонов), что связано с вычислительными проблемами.

9.3. ДВИЖЕНИЕ ЛОПАСТИ В ПЛОСКОСТИ ВРАЩЕНИЯ

9.3.1. МАХОВОЕ ДВИЖЕНИЕ И КАЧЕНИЕ ЖЕСТКОЙ ЛОПАСТИ

В гл. 5 дано введение в динамику качания лопасти шарнирного несущего винта. Здесь будут получены более детальные совместные уравнения движения лопасти в плоскостях взмаха и вращения. Рассмотрим шарнирный несущий винт с ГШ и ВШ. Будем учитывать относ. шарниров и наличие пружин; относ. ГШ и ВШ могут быть неодинаковыми. Угол взмаха жесткой лопасти относительно ГШ по-прежнему обозначим β с формой тона $\eta_\beta = (r - e)/(1 - e)$. Угол качания обозначим ζ , тогда отклонение лопасти в плоскости вращения будет равно $x = \zeta \eta_\zeta$, где $\eta_\zeta = (r - e)/(1 - e)$ — форма тона. Угол β положителен при взмахе вверх, а угол ζ — при отставании лопасти. Уравнения движения получим из условий равновесия моментов, действующих относительно шарниров.

Силы в сечении лопасти, создающие моменты взмаха, здесь те же, что и в разд. 9.2.1, с добавлением кориолисовой силы, обусловленной качанием. Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению вектора угловой скорости и вектора относительной скорости во вращающейся системе координат. Кориолисова инерционная сила в соответствии с принципом Даламбера направлена противоположно ускорению (радиально внутрь) и равна $2\Omega \dot{x}m = 2\Omega \dot{\zeta} \eta_\zeta m$. Эта сила создает на плече $z = \eta_\beta \beta$ момент относительно ГШ, равный

$$- \int_a^R (2\Omega \dot{\zeta} \eta_\zeta m) (\eta_\beta \beta) dr.$$

Введение этого момента в условие равновесия моментов относительно ВШ дает следующее уравнение движения:

$$I_{\beta}(\ddot{\beta} + v_{\beta}^2\dot{\beta}) - I_{\beta\zeta}2\dot{\beta}\dot{\zeta} = \frac{K_{\beta}}{I_{\beta}\Omega^2(1-e)}\beta_{\text{констр}} + \gamma \int_e^1 \eta_{\beta} \frac{F_x}{ac} dr,$$

где

$$I_{\beta\zeta} = \int_e^1 \eta_{\beta} \eta_{\zeta} m dr / (1-e) I_x.$$

В сечении лопасти действуют следующие силы (рис. 9.2), создающие моменты относительно ВШ: 1) инерционная сила $m\ddot{x} = m\eta_{\zeta}\ddot{\zeta}$, противодействующая качанию лопасти, на плече

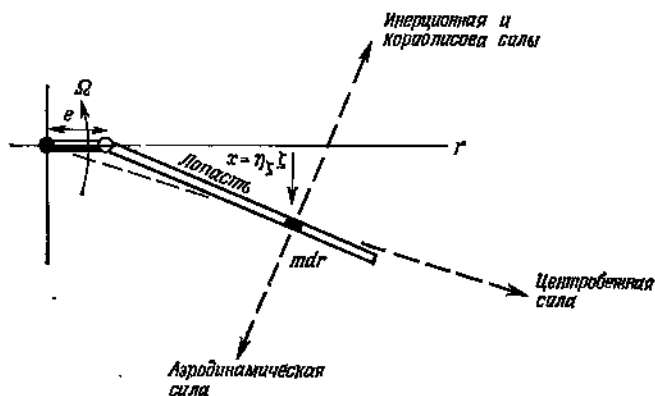


Рис. 9.2. Движение жесткой лопасти в плоскости вращения.

$(r-e)$ относительно ВШ; 2) центробежная сила $m\Omega^2 r$, направленная радиально, на плече $(e/r)x = (e/r)\eta_{\zeta}\zeta$; 3) аэродинамическая сила F_x на плече $(r-e)$; 4) кориолисова сила $2\Omega\dot{\zeta}z'm = 2\Omega\dot{\beta}\eta_{\beta}\eta'_{\zeta}m$, совпадающая по направлению с инерционной силой, на плече $(r-e)$. Кориолисова сила является векторным произведением угловой скорости винта и радиальной составляющей $\dot{z}(dz/dr)$ скорости \dot{z} элемента лопасти в плоскости взмаха. Условие равновесия моментов относительно ВШ имеет вид

$$\left(\int_e^R (r-e)\eta_{\zeta} m dr \right) \ddot{\zeta} + \left(\int_e^R e\eta_{\zeta} m dr \right) \Omega^2 \zeta + \left(\int_e^R \eta_{\beta}\eta'_{\zeta} m dr \right) 2\Omega\dot{\beta}\dot{\zeta} + K_{\zeta}\zeta = \int_e^R (r-e)F_x dr.$$

После деления на $(1 - e)$ и перехода к безразмерным величинам получаем

$$\left(\int_e^1 \eta_c^2 m dr \right) \ddot{\xi} + \left(\frac{e}{1-e} \int_e^1 \eta_c m dr \right) \dot{\xi} + \frac{K_c}{\Omega^2 (1-e)} \xi + \left(\frac{1}{1-e} \int_e^1 \eta_\beta \eta_c m dr \right) 2\beta \dot{\beta} = \int_e^1 \eta_c F_x dr.$$

Далее, обозначив момент инерции относительно ВШ I_c через $\int_e^R \eta_c^2 m dr$, после деления на I_c получим следующее уравнение качания шарнирной лопасти:

$$I_c^* (\ddot{\xi} + v_c^2 \xi) + I_{\beta c}^* 2\beta \dot{\beta} = \gamma \int_e^1 \eta_c \frac{F_x}{ac} dr.$$

Собственная частота качания равна

$$v_c^2 = \frac{e}{1-e} \frac{\int_e^1 \eta_c m dr}{\int_e^1 \eta_c^2 m dr} + \frac{K_c}{I_c \Omega^2 (1-e)}.$$

Как было отмечено в разд. 5.19, ВШ должен быть отнесен или иметь пружину для того, чтобы собственная частота не была нулевой. При равномерном распределении массы и отсутствии пружины собственная частота равна $v_c^2 = 3/2 [e/(1-e)]$. В более общем случае частота определяется выражением $v_c^2 = eS_c/I_c$, где I_c — момент инерции, а S_c — статический момент лопасти относительно оси ВШ. Полагая одинаковыми формы тонов и жесткости пружин для движений в плоскостях взмаха и вращения и учитывая выражения для собственных частот здесь и в разд. 9.2.1, имеем $v_\beta^2 = 1 + v_c^2$. Для лопасти с совмещенными ГШ и ВШ формы тонов действительно идентичны, и этот результат точен. Фактически это соотношение отражает существенно различную роль центробежных сил в маховом движении и качании лопасти. Центробежная сила в маховом движении действует как пружина, обеспечивая собственную частоту, близкую к частоте оборотов. При качании же лопасти жесткость аналогичной «пружины» зависит от отношения ВШ.

Маховое движение и качание лопасти связаны между собой нелинейными членами, обусловленными кориолисовыми силами: $-I_{\beta c}^* 2\beta \dot{\xi}$ в уравнении махового движения и $I_{\beta c}^* 2\beta \dot{\beta}$ в уравнении

качания. При анализе устойчивости эти члены линеаризуют относительно балансировочного режима:

$$\Delta(\beta\dot{\zeta}) = \beta_{\text{бал}} \Delta\dot{\zeta} + \dot{\zeta}_{\text{бал}} \Delta\beta \approx \beta_0 \Delta\dot{\zeta},$$

$$\Delta(\beta\dot{\beta}) = \beta_{\text{бал}} \Delta\dot{\beta} + \dot{\beta}_{\text{бал}} \Delta\beta \approx \beta_0 \Delta\dot{\beta},$$

где β_0 — балансировочное значение угла конусности лопастей. Последняя аппроксимация основана на использовании средних значений углов качания и взмаха; для режима висения она становится точным выражением. Таким образом, на лопасть с ненулевым углом конусности действуют момент в плоскости взмаха, вызванный скоростью качания, и момент в плоскости вращения, вызванный скоростью взмаха. Указанные моменты малы, так как они равны произведениям малых величин. Но в плоскости вращения все моменты малы по сравнению с моментами в плоскости взмаха, поэтому кориолисова сила, вызванная скоростью взмаха, является важным фактором в качании лопасти.

Тулка шарнирного винта имеет механический демпфер в ВШ, поэтому в уравнение качания должен быть добавлен член $C_z^* \dot{\zeta}$, где $C_z^* = C_z / I_{\Delta} \Omega$, а C_z — производная момента демпфера по угловой скорости поворота лопасти в ВШ. Для бесшарнирного несущего винта соответствующий член равен $I_z^* g_s \nu_z^* \dot{\zeta}$, где g_s — коэффициент конструкционного демпфирования (обычно $g_s = 0,01 \div 0,03$). Это демпфирование мало, однако может играть важную роль ввиду малости других моментов в плоскости вращения.

9.3.2. ИЗГИБ В ПЛОСКОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим изолированное движение лопасти в плоскости вращения с учетом упругих деформаций и обычных ограничений у комля. Силы в плоскости вращения, вызванные маховым движением, учитывать пока не будем (хотя они значительны) в целях выяснения собственных частот и форм колебаний лопасти в плоскости вращения. Действующие в сечении ρ лопасти силы и их плечи относительно сечения r будут следующими: 1) сила инерции $m\ddot{x}(\rho)$ на плече $(\rho - r)$, 2) центробежная сила $m\Omega^2\rho$ на плече $(r/\rho)x(\rho) - x(r)$, 3) аэродинамическая сила F_x на плече $(\rho - r)$. Следовательно, момент в сечении r в плоскости вращения, вызванный инерционными и аэродинамическими силами, которые действуют в сечениях, внешних по отношению к сечению r , равен

$$M_z(r) = \int_r^R \left[(F_x - m\ddot{x})(\rho - r) - m\Omega^2\rho \left(x(\rho) \frac{r}{\rho} - x(r) \right) \right] d\rho.$$

В сопротивлении материалов изгибающий балку момент вычисляют по формуле $M_x(r) = EI_{xx} d^2x/dr^2$, где E — модуль упругости, а I_{xx} — момент инерции площади сечения относительно главной оси изгиба. Дифференциальное уравнение в частных производных для изгибных колебаний лопасти в плоскости вращения можно получить, приравнявая изгибающий момент в сечении действующим инерционным и аэродинамическим моментам и дважды дифференцируя полученное равенство:

$$\frac{d^2}{dr^2} EI_{xx} \frac{d^2x}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left[\int_r^R m\Omega^2 \rho \, d\rho \frac{dx}{dr} \right] - \Omega^2 mx + m\ddot{x} = F_x.$$

Граничные условия для шарнирной и бесшарнирной лопастей здесь те же, что и для случая изгиба в плоскости взмаха (разд. 9.2.2).

Уравнение формы получим, рассматривая свободные колебания вращающейся лопасти. Подстановка $x = \eta e^{i\omega t}$ в однородное уравнение дает

$$\frac{d^2}{dr^2} EI_{xx} \frac{d^2\eta}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left[\int_r^R m\Omega^2 \rho \, d\rho \frac{d\eta}{dr} \right] - \Omega^2 m\eta - \nu^2 m\eta = 0.$$

Мы вновь пришли к стандартной задаче Штурма — Лиувилля, для которой существует ряд ортогональных собственных решений η_{x_k} и соответствующих собственных значений $\nu_{x_k}^2$. Перемещение в плоскости вращения можно разложить в ряд

$$x(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{x_k}(r) q_{x_k}(t),$$

где q_{x_k} — степени свободы (коэффициенты деформации). Это разложение подставим в дифференциальное уравнение с частными производными и, зная форму колебаний, заменим члены, учитывающие упругие и центробежные восстанавливающие силы, соответствующими выражениями через собственную частоту ν_{x_k} . Применяя операцию $\int_0^R (\dots) \eta_{x_k} \, dr$ и учитывая ортогональность тонов, получаем

$$I_{x_k}^* (\ddot{q}_{x_k} + \nu_{x_k}^2 q_{x_k}) = \nu \int_0^1 \eta_{x_k} \frac{F_x}{ac} \, dr,$$

где $I_{x_k}^* = \int_0^R \eta_{x_k}^2 \, dr / I_x$. Это — уравнение чисто изгибных колебаний лопасти в плоскости вращения. Собственная частота может быть получена по форме тона с использованием энергии

ческого соотношения Штурма — Лиувилля:

$$v^2 = \frac{K_z [\eta'(\theta)]^2 + \int_0^R \left[EI \eta''^2 + \int_r^R m \Omega^2 \rho \, d\rho \eta'^2 - \Omega^2 m \eta^2 \right] dr}{\int_0^R \eta^2 m \, dr}.$$

Отметим, что предположение об одинаковом виде форм колебаний в плоскостях взмаха и вращения приводит к выражению $v_{\Gamma\text{Ш}}^2 = 1 + v_{\text{ВШ}}^2$ (см. разд. 9.2.2). Однако жесткость на изгиб в плоскости вращения EI_{xx} намного (в 20—40 раз) превышает жесткость на изгиб в плоскости взмаха EI_{zz} . Кроме того, формы тонов изгиба в плоскостях взмаха и вращения, вообще говоря, неодинаковы. Поэтому соотношение $v_{\Gamma\text{Ш}}^2 = 1 + v_{\text{ВШ}}^2$ фактически применимо только к основным тонам шарнирной лопасти с совмещенными ГШ и ВШ. Аналогия задач об изгибе в плоскостях взмаха и вращения несколько облегчает численное определение собственных частот и форм колебаний.

9.3.3. СОВМЕСТНЫЙ ИЗГИБ В ПЛОСКОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ И ВЗМАХА

Ниже мы выведем уравнения движения лопасти при совместном изгибе в плоскостях вращения и взмаха. Это — обобщение уравнений совместных движений жесткой лопасти. Предположим, что отсутствует жесткостная взаимосвязь, т. е. перемещение z происходит только в плоскости взмаха, а перемещение x — только в плоскости вращения. Взаимосвязь движений обусловлена лишь кориолисовыми силами, т. е. в уравнениях разд. 9.2.2 и 9.3.2 нужно добавить только соответствующие члены.

При изгибе в плоскости взмаха кориолисова сила $2\Omega \dot{x} m$ направлена радиально внутрь и создает в сечении r момент на плече $z(\rho) - z(r)$. Изгибающий момент в сечении r становится равным

$$M_x(r) = \int_r^R [(F_z - m\ddot{z})(\rho - r) - (m\Omega^2 \rho - 2\Omega \dot{x} m)(z(\rho) - z(r))] \, d\rho,$$

а дифференциальное уравнение в частных производных для изгиба в плоскости взмаха записывается в виде

$$(EI_{zz} z''')'' - \left[\int_r^R m \Omega^2 \rho \, d\rho z' \right]' + m\ddot{z} + \left[z' \int_r^R 2\Omega \dot{x} m \, d\rho \right]' = F_z.$$

Если опустить члены с аэродинамической и кориолисовой силами, то получим то же уравнение формы, что и в разд. 9.2.2.

Отклонение в плоскости взмаха можно разложить в ряд по собственным формам η_{zk} :

$$z = \sum_k \eta_{zk}(r) q_{zk}(t),$$

где q_{zk} — степени свободы (коэффициенты деформации). Это разложение подставим в уравнение с частными производными и, зная форму колебаний, заменим члены, учитывающие упругие и центробежные восстанавливающие силы, соответствующими выражениями через собственную частоту ν_{zk} . Применяя опера-

тор $\int_0^R (\dots) \eta_{zk} dr$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение изгиба вращающейся лопасти в плоскости взмаха по k -му тону:

$$I_{\beta k} (\ddot{q}_{zk} + \nu_{zk}^2 q_{zk}) + \int_0^1 \eta_{zk} \left[z' \int_r^1 2\dot{x} m d\rho \right]' dr = \int_0^1 \eta_{zk} F_z dr.$$

Интегрируя по частям и меняя порядок интегрирования, преобразуем члены с кориолисовыми силами к виду

$$\begin{aligned} \int_0^1 \eta_{zk} \left[z' \int_r^1 2\dot{x} m d\rho \right]' dr &= -2 \int_0^1 \dot{x} m \int_0^r \eta'_{zk} z' d\rho dr \approx \\ &\approx -2\beta_0 \int_0^1 \dot{x} \eta_{zk} m dr. \end{aligned}$$

Последняя аппроксимация вытекает из линеаризации произведения $\dot{x}z'$ относительно средних значений \dot{x} и z' и предположения о том, что упругая линия лопасти в среднем определяется углом конусности β_0 . Для жестких тонов эти кориолисовы силы сводятся к предыдущему результату — $2\beta_0 \dot{x} I_{\beta k}$. Множитель $(1 - e)$ в выражении для $I_{\beta k}$ становится равным единице, если положить $z' \approx \beta_0$ вместо $z' = \eta' \beta = \beta / (1 - e)$.

При рассмотрении изгиба в плоскости вращения нужно учесть две составляющие кориолисовой силы. Одну из них, равную $2\Omega \dot{x} m$, дают скорость \dot{x} и угловая скорость вращения винта Ω ; она направлена радиально вовнутрь. Эта составляющая создает изгибающий момент в плоскости взмаха. Она же создает момент в плоскости вращения на плече $x(\rho) - x(r)$ в сечении r . Отклонения в плоскостях вращения и взмаха дают вторую составляющую, вызываемую нелинейным «укорочением» лопасти, равным

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\rho} (x'^2 + z'^2) d\rho^2.$$

Соответствующая скорость перемещения сечения лопасти к оси вращения равна

$$-\int_0^{\rho} (x' \dot{x}' + z' \dot{z}') d\rho^*$$

Вторая составляющая кориолисовой силы лежит в плоскости вращения и создает относительно сечения лопасти на радиусе r момент на плече $(\rho - r)$ (см. рис. 9.2). Суммарный изгибающий момент в плоскости вращения описывается выражением

$$M_z(r) = \int_r^R \left[(F_x - m\ddot{x})(\rho - r) - m\Omega^2 \rho \left(x(\rho) \frac{r}{\rho} - x(r) \right) + \right. \\ \left. + 2\Omega \dot{x} m (x(\rho) - x(r)) - 2\Omega m \int_0^{\rho} (x' \dot{x}' + z' \dot{z}') d\rho^* (\rho - r) \right] d\rho,$$

а уравнение в частных производных для изгибных деформаций в плоскости вращения имеет вид

$$(EI_{xx} x'')'' - \left[\int_r^R m\Omega^2 \rho d\rho x' \right]' - \Omega^2 m x + m\ddot{x} + \\ + \left[2\Omega x' \int_r^R \dot{x} m d\rho \right]' + 2\Omega m \int_0^r (x' \dot{x}' + z' \dot{z}') d\rho = F_x.$$

После представления отклонений в плоскости вращения в виде ряда $x = \sum_k \eta_{x_k} q_{x_k}$ уже известным способом можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение изгибных колебаний лопасти в плоскости вращения по k -му тону:

$$I_{z_k} (\ddot{q}_{x_k} + v_{x_k}^2 q_{x_k}) + \int_0^1 \eta_{x_k} 2m \int_0^r (x' \dot{x}' + z' \dot{z}') d\rho dr + \\ + \int_0^1 \eta_{x_k} \left[x' \int_r^1 2\dot{x} m d\rho \right]' dr = \int_0^1 \eta_{x_k} F_x dr.$$

Составляющие кориолисовой силы можно записать в виде

$$2 \int_0^1 \eta_{x_k} m \int_0^r (x' \dot{x}' + z' \dot{z}') d\rho dr - 2 \int_0^1 \dot{x} m \int_0^r \eta'_{x_k} x' d\rho dr \approx \\ \approx 2 \int_0^1 \eta_{x_k} m \int_0^r z' \dot{z}' d\rho dr \approx 2\beta_0 \int_0^1 \dot{z}_{x_k} m dr.$$

Для жесткой лопасти, когда x не зависит от r , обе составляющие равны нулю. Они близки к нулю, если установившееся отклонение лопасти в плоскости вращения мало отличается от отклонения жесткой лопасти. Поэтому указанные составляющие, как правило, не учитываются.

Подставив разложение \dot{x} в уравнение движения в плоскости взмаха, а разложение \dot{z} в уравнение движения в плоскости вращения, получим совместные уравнения изгибных колебаний в двух плоскостях:

$$\Gamma_{\beta_k}^* (\ddot{q}_{z_k} + v_{z_k}^2 q_{z_k}) - \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_{x_j} 2\beta_0 \Gamma_{\beta_k \zeta_j}^* = \gamma \int_0^1 \eta_{z_k} \frac{F_z}{ac} dr,$$

$$\Gamma_{\zeta_k}^* (\ddot{q}_{x_k} + v_{x_k}^2 q_{x_k}) + \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_{z_j} 2\beta_0 \Gamma_{\zeta_k \beta_j}^* = \gamma \int_0^1 \eta_{x_k} \frac{F_x}{ac} dr,$$

где
$$\Gamma_{\beta_k}^* = \int_0^R \eta_{z_k}^2 dr / I_n, \quad \Gamma_{\zeta_k}^* = \int_0^R \eta_{x_k}^2 dr / I_n,$$

и
$$\beta_0 \Gamma_{\beta_k \zeta_j}^* = z'_{\text{сан}} \int_0^R \eta_{z_k} \eta_{x_j} dr / I_n.$$

Эта система уравнений не является, однако, хорошей моделью изгиба лопасти в двух плоскостях. Лишь для лопасти, не имеющей крутки и работающей при нулевом угле установки, не будет существенной жесткостной взаимосвязи между изгибом в плоскости вращения и изгибом в плоскости взмаха. При изменении угла установки оси жесткости поворачиваются, тогда как центробежные силы не меняют своего направления относительно осей, связанных с валом винта. Таким образом, если угол установки лопасти не равен нулю, то направление действия центробежной силы не совпадает с осью жесткости и свободные колебания лопасти уже нельзя рассматривать как происходящие независимо в плоскостях взмаха и вращения, как предполагалось выше. Более совершенная модель может быть получена при использовании одного разложения в ряд, описывающего связанные тоны изгибных колебаний в плоскостях взмаха и вращения. В таком анализе следует учесть и крутильные колебания лопасти, поскольку связь между изгибом и углом установки оказывает наибольшее влияние на динамику. Жесткостная взаимосвязь наиболее существенна у комля лопасти, так что эти соображения наиболее существенны применительно к бесшарнирному винту. Для шарнирного несущего винта уравнения движения, приведенные здесь, могут быть удовлетворительными, поскольку часто есть необходимость в более простом

восстанавливающий момент относительно ОШ, равный $K_\theta(\theta - \theta_{уст})$, где K_θ — жесткость системы управления.

Уравнение махового движения лопасти получим, используя условие равновесия моментов относительно ГШ. В центре масс сечения лопасти действуют следующие силы: 1) сила инерции $m(\ddot{z} - x_1\ddot{\theta}) = m(r\ddot{\beta} - x_1\ddot{\theta})$ на плече r относительно ГШ; 2) центробежная сила $m\Omega^2 r$ на плече $z - x_1, \theta = \beta r - x_1\theta$; 3) аэроди-

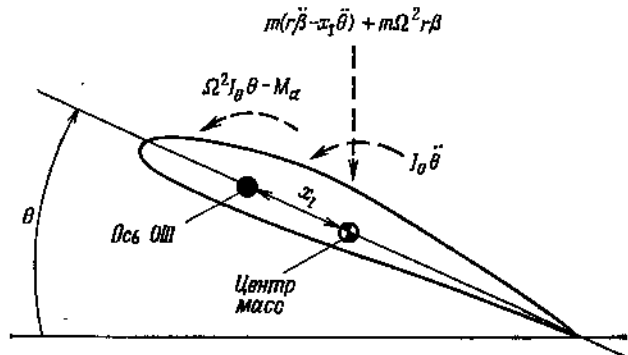


Рис. 9.4. Моменты в сечении лопасти относительно ОШ.

намическая сила F_z на плече r . С учетом пружины в ГШ уравнение движения принимает вид

$$\int_0^R m(\ddot{\beta}r - x_1\ddot{\theta})r dr + \int_0^R m\Omega^2 r(r\beta - x_1\theta) dr + K_\beta\beta = \int_0^R rF_z dr,$$

или

$$\left(\int_0^R r^2 m dr \right) (\ddot{\beta} + \nu^2\beta) - \left(\int_0^R x_1 r m dr \right) (\ddot{\theta} + \Omega^2\theta) = \int_0^R rF_z dr,$$

где ν — собственная частота махового движения. Пусть $I_x = \int_0^R r^2 m dr$ и $I_x = \int_0^R x_1 r m dr$. После деления на I_x и перехода к безразмерным величинам имеем

$$\ddot{\beta} + \nu^2\beta - I_x^* (\ddot{\theta} + \theta) = \nu \int_0^1 r \frac{F_z}{ac} dr,$$

где $I_x^* = I_x/I_x$. Таким образом, движение лопасти в ОШ приводит к появлению инерционных моментов и моментов от центробежных сил относительно ГШ при несовпадении центра масс сечения лопасти с осью ОШ.

Уравнение установочного движения получаем из условия равновесия моментов относительно оси ОШ (рис. 9.4). В сечении лопасти действуют следующие силы и моменты: 1) инерционный момент $I_0 \ddot{\theta}$ относительно центра масс и сила инерции $m(r\ddot{\beta} - x\ddot{\theta})$, приложенная в центре масс на плече x , относительно оси ОШ; 2) пропеллерный момент $I_0 \Omega^2 \theta$ относительно оси ОШ, противодействующий увеличению угла установки, и центробежная сила $m\Omega^2 r\beta$, приложенная в центре масс на плече

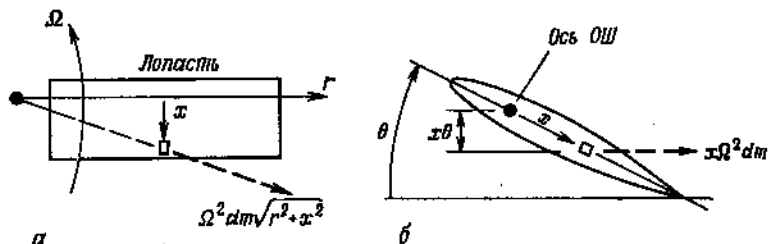


Рис. 9.5. Возникновение пропеллерного момента.

a — центробежная сила, действующая на элемент лопасти с массой dm ; *б* — результирующий момент относительно оси ОШ.

x , относительно оси ОШ; 3) аэродинамический шарнирный момент M_a (положительный в направлении увеличения угла установки) относительно оси ОШ. Здесь I_0 — момент инерции сечения лопасти относительно центра масс, $I_\theta = I_0 + x_1^2 m$ — момент инерции относительно оси ОШ. При взмахе лопасти вверх возникает составляющая $m\Omega^2 r\beta$ центробежной силы, нормальная к оси лопасти. Эта составляющая создает моменты относительно ГШ и ВШ, если центр масс не совпадает с осью ОШ. Пропеллерный момент также возникает от центробежных сил. Центробежная сила, действующая на элемент массы dm лопасти, направлена по линии, проходящей через ось вала винта (рис. 9.5). Для элемента, находящегося на радиусе r позади оси ОШ на расстоянии x от нее, составляющая центробежной силы в направлении хорды равна

$$(\sqrt{r^2 + x^2} \Omega^2 dm) \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} = x\Omega^2 dm.$$

Если лопасть имеет угол установки θ , то указанная составляющая действует по линии, находящейся ниже оси ОШ на расстоянии $x\theta$ от нее (рис. 9.5). Для элемента массы, находящегося впереди оси ОШ, эта составляющая центробежной силы направлена вперед, вдоль линии, лежащей выше оси ОШ. Таким образом, момент от центробежных сил препятствует увеличению угла установки. Этот момент, называемый *пропеллерным*,

определяется путем интегрирования по сечению лопасти:

$$\int_{\text{сечение}} (x\theta) (x\Omega^2 dm) = \theta\Omega^2 \int_{\text{сечение}} x^2 dm = \theta\Omega^2 I_\theta,$$

где I_θ — момент инерции сечения относительно оси ОШ. Условие равновесия моментов относительно оси ОШ имеет вид

$$\int_0^R [I_\theta \ddot{\theta} - (r\ddot{\beta} - x_I \ddot{\theta}) x_I m + I_\theta \Omega^2 \theta - m\Omega^2 r \beta x_I] dr + \\ + K_\theta (\theta - \theta_{\text{упр}}) = \int_0^R M_a dr,$$

или

$$\left(\int_0^R I_\theta dr \right) (\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta) - \left(\int_0^R x_I r m dr \right) (\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta) + K_\theta (\theta - \theta_{\text{упр}}) = \int_0^R M_a dr.$$

Сюда включен восстанавливающий момент системы управления $K_\theta(\theta - \theta_{\text{упр}})$. Пусть суммарный момент инерции лопасти относительно ОШ равен $I_f = \int_0^R I_\theta dr$. Тогда $\omega^2 = K_\theta / I_f \Omega^2$, где ω —

безразмерная собственная частота установочного движения лопасти. После деления на I_f и перехода к безразмерным величинам уравнение установочного движения преобразуется к виду

$$I_f^* [\ddot{\theta} + (\omega^2 + 1)\theta] - I_x^* (\ddot{\beta} + \beta) = \gamma \int_0^1 \frac{M_a}{ac} dr + I_f^* \omega^2 \theta_{\text{упр}},$$

где $I_f^* = I_f / I_x$. Отметим, что ω — собственная частота установочного движения невращающейся лопасти и что пропеллерный момент эквивалентен действию такой пружины, при которой собственная частота равна частоте оборотов. Для вращающейся лопасти, таким образом, собственная частота равна $\sqrt{\omega^2 + 1}$. Обычно жесткость системы управления такова, что $\omega = 3 \div 5$; по сравнению с ней «жесткость», создаваемая пропеллерным моментом, мала.

Резюмируя, запишем уравнения махового и установочного движений жесткой лопасти:

$$\ddot{\beta} + \nu^2 \beta - I_x^* (\ddot{\theta} + \theta) = \gamma \int_0^1 r \frac{F_z}{ac} dr,$$

$$I_f^* [\ddot{\theta} + (\omega^2 + 1)\theta] - I_x^* (\ddot{\beta} + \beta) = \gamma \int_0^1 \frac{M_a}{ac} dr + I_f^* \omega^2 \theta_{\text{упр}},$$

где $I_x^* = \int_0^R x_f r m dr / l_n$ и $I_f^* = \int_0^k I_{ff} dr / l_n$, а x_f — расстояние между центром масс сечения и осью ОШ (положительное, если центр масс находится позади оси ОШ). Маховое и установочное движения связаны через инерционные силы, если центр масс сечения лопасти не лежит на оси ОШ. Для постоянного x_f имеем

$$I_x^* = x_f \int_0^R r m dr / l_n = x_f S_n^* \cong \frac{3}{2} x_f.$$

Поскольку расстояние x_f составляет малую часть хорды, его отношение к R имеет второй порядок малости. Отношение I_f^* моментов инерции лопасти относительно осей ОШ и ГШ приближенно равно $0,1(c/R)^2$. Вообще все моменты относительно оси ОШ на два порядка меньше моментов относительно оси ГШ.

В предельном случае очень жесткой системы управления ($K_\theta \rightarrow \infty$) угол установки лопасти близок к углу, задаваемому системой управления: $\theta \rightarrow \theta_{упр}$. Кинематическая связь между углами установки и взмаха лопасти (компенсатор взмаха) выражается зависимостью $\Delta\theta_{упр} = -K_p\beta$. С ее учетом уравнение движения принимает вид

$$I_f^* [\ddot{\theta} + (\omega^2 + 1)\theta] - I_x^* (\ddot{\beta} + \beta) + K_p I_f^* \omega^2 \beta = \gamma \int_0^l \frac{M_a}{ac} dr + I_f^* \omega^2 \theta_{упр}$$

и в предельном случае бесконечно большой жесткости системы управления сводится к зависимости $\theta = \theta_{упр} - K_p\beta$, как и должно быть.

9.4.2. КОНСТРУКТИВНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ ВЗМАХА И КАЧАНИЯ

Порядок расположения ГШ и ОШ или, для бесшарнирного винта, распределение жесткостей комлевых сечений лопасти сильно влияет на динамику движения лопасти. В предыдущем анализе предполагалось, что ОШ расположен дальше от оси вала винта, чем ГШ, так что при маховом движении ось ОШ меняет свой наклон. Если же ОШ расположен ближе к оси вала, чем ГШ, то ось ОШ остается в плоскости вращения при взмахе лопасти; при этом плечи, на которых в сечении лопасти действуют силы, создающие моменты относительно ОШ, будут другими.

Рассмотрим маховое и установочное движения жесткой шарнирной лопасти при внешнем расположении ГШ и ВШ (ОШ расположен ближе к оси вала винта, чем ГШ и ВШ). При этом момент центробежных сил относительно ОШ становится другим. Центробежная сила $m\Omega^2 r$ не имеет составляющей, создающей момент относительно оси ОШ при взмахе лопасти, поскольку и центробежная сила, и ось ОШ параллельны плоскости

вращения. Однако составляющая центробежной силы, направленная вдоль хорды, создает момент относительно ОШ на плече $x\theta - r\beta$, так что пропеллерный момент равен

$$\int_{\text{сечение}} (x\theta - r\beta)(x\Omega^2 dm) = \theta\Omega^2 I_\theta - (m\Omega^2 r\beta) x_I.$$

Таким образом, величина момента центробежных сил относительно ОШ не меняется, но при внешнем расположении ГШ и ВШ необходимо учитывать влияние ряда нелинейностей на движение лопасти относительно ГШ и ВШ. Установившиеся отклонения лопасти в ГШ и ВШ смещают сечение относительно оси ОШ; при этом все силы, действующие в плоскостях взмаха и вращения, создают моменты относительно ОШ. В частности, установочное движение вызывает ускорение в плоскости вращения при взмахе лопасти и ускорение в плоскости взмаха при качании. Эффективный момент инерции лопасти относительно оси ОШ увеличивается:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R (I_\theta + z_{\text{вал}}^2 m + x_{\text{вал}}^2 m) dr = \\ &= \int_0^R I_\theta dr + \beta_0^2 \int_0^R \eta_\beta^2 m dr + \zeta_0^2 \int_0^R \eta_\zeta^2 m dr \approx I_I + (\beta_0^2 + \zeta_0^2) I_n. \end{aligned}$$

Уменьшение в результате этого собственной частоты колебаний лопасти в ОШ может быть весьма существенным.

При внешнем расположении ГШ и ВШ появляется взаимосвязь момента относительно оси ОШ с моментами в плоскостях взмаха и вращения, имеющая особенное значение для бесшарнирных несущих винтов. Для оценки основных частот движения лопасти рассмотрим момент относительно ОШ, вызываемый движениями в ГШ и ВШ шарнирной жесткой лопасти с пружинами в этих шарнирах. В сечении лопасти действуют следующие силы: 1) сила в плоскости взмаха $F_x - mr\ddot{\beta}$ на плече $r\zeta$ относительно ОШ вследствие качания лопасти; 2) сила в плоскости вращения $F_x - mr\ddot{\zeta} - 2\Omega mr\dot{\beta}\dot{\zeta} + mr\dot{\zeta}\Omega^2$ на плече $r\beta$ относительно ОШ вследствие взмаха лопасти. Тогда момент относительно оси ОШ, уменьшающий угол установки, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta M_\theta &= \zeta \left[\int_0^1 r F_x dr - \dot{\beta} \int_0^1 r^2 m dr \right] - \\ &\quad - \beta \left[\int_0^1 r F_x dr - (\dot{\zeta} + 2\beta\dot{\beta} - \zeta) \int_0^1 r^2 m dr \right]. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\xi}$ из разд. 9.3.1, получим

$$\Delta M_{\theta} = \xi (I_{\beta} v_{\beta}^2 \beta - K_{\beta} \beta_{\text{констр}}) - \beta (I_{\xi} v_{\xi}^2 \xi + I_{\beta} \xi - K_{\xi} \xi_{\text{констр}}) =$$

$$= \beta \xi I_{\beta} (v_{\beta}^2 - 1 - v_{\xi}^2) - \xi K_{\beta} \beta_{\text{констр}} + \beta K_{\xi} \xi_{\text{констр}},$$

где K_{β} и K_{ξ} — жесткости пружин в ГШ и ВШ, а $\beta_{\text{констр}}$ и $\xi_{\text{констр}}$ — конструктивные углы взмаха и качания. Заметим, что здесь β и ξ — полные углы взмаха и качания. Момент относительно оси ОШ, отклоненный на углы $\beta_{\text{констр}}$ и $\xi_{\text{констр}}$, можно выразить через углы взмаха и качания, отсчитываемые от этой оси, если положить $\beta = \tilde{\beta} + \beta_{\text{констр}}$, $\xi = \tilde{\xi} + \xi_{\text{констр}}$.

Обсудим полученный результат. Полный момент относительно оси ГШ у комля лопасти, равный $M_{\beta} = I_{\beta} (v_{\beta}^2 - 1) \times \beta - K_{\beta} \beta_{\text{констр}}$, дает составляющую момента относительно оси ОШ, уменьшающую угол установки при отставании лопасти на угол ξ . Аналогично момент $M_{\xi} = I_{\beta} v_{\xi}^2 \xi - K_{\xi} \xi_{\text{констр}}$ дает составляющую момента относительно оси ОШ, увеличивающую угол установки при взмахе лопасти на угол β . Полный момент относительно оси ОШ, равный $\Delta M_{\theta} = M_{\beta} \xi - M_{\xi} \beta$, нелинейно зависит от углов взмаха и качания и играет существенную роль. Этот момент вызывает статическое изменение угла установки вследствие упругости системы управления $\Delta \theta = -\Delta M_{\theta} / K_{\theta}$. В линеаризованном виде это эквивалентно введению зависимостей угла установки лопасти от углов взмаха и качания (регулированию взмаха и качания). Соответствующие зависимости для заданных конструктивных углов взмаха и качания имеют вид

$$K_{P_{\beta}} = -\frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{1}{K_{\theta}} [I_{\beta} (v_{\beta}^2 - 1 - v_{\xi}^2) \xi + K_{\xi} \xi_{\text{констр}}],$$

$$K_{P_{\xi}} = -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{1}{K_{\theta}} [I_{\beta} (v_{\beta}^2 - 1 - v_{\xi}^2) \beta - K_{\beta} \beta_{\text{констр}}].$$

Вычислив эти величины, зависящие от силы тяги и крутящего момента несущего винта, а также от заданных значений $\beta_{\text{констр}}$ и $\xi_{\text{констр}}$, можно оценить указанные зависимости (см. гл. 5). Для шарнирного несущего винта без пружин в шарнирах и с совмещенными ГШ и ВШ $v_{\beta}^2 = 1 + v_{\xi}^2$, момент относительно оси ОШ равен нулю и упомянутая связь пропадает.

Аналогичный результат можно получить для момента на кручение в произвольном сечении лопасти. Рассмотрим изгиб лопасти в плоскостях взмаха и вращения с отклонениями соответственно $z(r)$ и $x(r)$. Силы, действующие на часть лопасти, внешнюю по отношению к сечению r , создают в сечении r момент кручения, равный

$$\Delta M_r = \int_r^R \{ [z(\rho) - z(r) - (\rho - r) z'(r)] G_x -$$

$$- [x(\rho) - x(r) - (\rho - r) x'(r)] G_z \} d\rho,$$

где G_x — равнодействующая инерционных и аэродинамических сил в плоскости вращения, а G_z — то же в плоскости взмаха. Тогда погонный момент кручения (уменьшающий угол установки) равен

$$\Delta T = \frac{\partial M_r}{\partial r} = x'' \int_r^R (\rho - r) G_z d\rho - z'' \int_r^R (\rho - r) G_x d\rho.$$

Так как $M_x = \int_0^R (\rho - r) G_z d\rho$ и $M_z = \int_0^R (\rho - r) G_x d\rho$ — изгибающие моменты в плоскостях взмаха и вращения, действующие в сечении r , имеем

$$\Delta T = M_x x'' - M_z z''.$$

Если ввести жесткости на изгиб, то последнее выражение принимает вид

$$\Delta T = M_x M_z \left(\frac{1}{EI_{xx}} - \frac{1}{EI_{zz}} \right) = x'' z'' (EI_{zz} - EI_{xx}).$$

Таким образом, погонный момент кручения, характеризующий связь между кручением и изгибом, пропорционален произведению деформаций изгиба и разности между жесткостями лопасти на изгиб в плоскостях взмаха и вращения. Для лопасти, у которой $EI_{zz} = EI_{xx}$, связь кручения с изгибом отсутствует. Это случай лопасти с «настройкой по жесткости», соответствующий условию $v_\beta^2 = 1 + v_\zeta^2$ для жесткой лопасти. Отметим, что у такой лопасти равны частоты движений относительно ГШ и ВШ (в отсутствие вращения). Как правило, жесткость лопасти в плоскости вращения намного выше, чем в плоскости взмаха. Однако для бесшарнирного несущего винта с нежесткими в плоскости вращения лопастями условие «настройки по жесткости» может быть выполнено.

Особенности, рассмотренные в этом разделе, важны главным образом для бесшарнирного винта, для точного анализа которого требуется более полная модель динамики изгиба и кручения. Можно заключить, что если деформации изгиба в плоскостях взмаха и вращения в основном происходят во внешней относительно ОШ части лопасти, то они создают существенные моменты на кручение. Возникающая в результате связь угла установки лопасти с углами качания и взмаха является важным фактором в динамике бесшарнирного несущего винта.

Рассмотренным вопросам, особенно в части связи угла установки лопасти с изгибом в двух плоскостях для бесшарнирных винтов, посвящены работы [М.116, Н.38, Н.101, Н.102, Н.176]; см. также ссылки в гл. 12.

9.4.3. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ В ПЛОСКОСТИ ВЗМАХА

Рассмотрим деформации кручения и изгиба в плоскости взмаха для упругой лопасти. Исключить движения в плоскости вращения из такого анализа не всегда удастся. Как указано в предыдущем разделе, силы в плоскости вращения вызывают момент кручения лопасти, если есть изгиб в плоскости взмаха. Однако эти силы ослабляются вследствие качания лопасти, и их можно не учитывать, если модель винта не содержит движения в плоскости вращения. Для адекватного представления

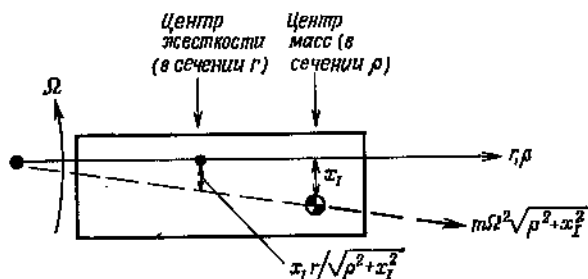


Рис. 9.6. Возникновение изгибающего момента от центробежных сил.

динамики бесшарнирного несущего винта необходим полный учет взаимосвязанных деформаций кручения и изгиба в двух плоскостях. Поэтому сначала займемся обобщением анализа махового и установочного движений жесткой лопасти (разд. 9.4.1) в направлении учета упругости лопасти на изгиб и кручение с целью создания основы для разработки более полных моделей.

Предполагается, что ось жесткости лопасти совпадает с осью ОШ. При этом угол установки лопасти имеет две составляющие: угол поворота жесткой лопасти ρ_0 за счет упругости проводки управления и упругую деформацию кручения θ_e , т. е. $\theta = \rho_0 + \theta_e$. Конструктивная кривка лопасти влияет только на установившиеся значения сил и потому может не учитываться. Обозначение для угла поворота жесткой лопасти выбрано в соответствии с обозначениями в разложении упругой деформации кручения θ_e по собственным формам.

Уравнение изгибных колебаний получается из условия равновесия моментов, действующих на часть лопасти, внешнюю по отношению к сечению на радиусе r . В сечении на радиусе ρ действуют следующие силы: 1) силы инерции $m(\ddot{z} - x_1\ddot{\theta})$ на плече $(\rho - r)$ относительно сечения r ; 2) центробежная сила $m\Omega^2\rho$, приложенная в центре масс сечения на плече $[z - \theta x_1 - z(r)]$ относительно оси жесткости в сечении r ; 3) центробежный

момент $(m\Omega^2 r x_i)\theta(r)$; 4) аэродинамическая сила F_z на плече $(\rho - r)$.

Центробежный момент $m\Omega^2 r x_i \theta(r)$ в сечении r возникает от сил в сечении ρ следующим образом. На рис. 9.6 показано, что центробежная сила $m\Omega^2 \sqrt{\rho^2 + x_i^2}$, приложенная в центре масс сечения, создает на плече $x_i r / \sqrt{\rho^2 + x_i^2}$ относительно центра жесткости в сечении r изгибающий момент в плоскости вращения, равный $m\Omega^2 r x_i$. Поскольку же сечение r имеет угол установки $\theta(r)$, указанный момент дает составляющую в плоскости взмаха, равную $m\Omega^2 r x_i \theta(r)$. Полный изгибающий момент в сечении r равен

$$M(r) = \int_r^R [(F_z - m(\ddot{z} - x_i \ddot{\theta}))(\rho - r) - m\Omega^2 \rho(z - \theta x_i - z(r)) - \theta(r) m\Omega^2 r x_i] d\rho.$$

Приравнявая $M(r) = EI d^2 z / dr^2$ и производя двукратное дифференцирование по r , получаем следующее дифференциальное уравнение в частных производных для деформации изгиба вдоль оси жесткости:

$$\frac{d^2}{dr^2} EI \frac{d^2 z}{dr^2} - \frac{d}{dr} \left[\int_r^R m\Omega^2 \rho d\rho \frac{dz}{dr} \right] + m\ddot{z} - m\dot{x}_i \ddot{\theta} + \frac{d}{dr} \left[\frac{d(r\theta)}{dr} \int_r^R \Omega^2 x_i m d\rho \right] = F_z.$$

Отклонение в плоскости взмаха может быть разложено в ряд по собственным формам, $z(r, t) = \sum_k \eta_k(r) q_k(t)$, где q_k — степени свободы изгибных колебаний. Уравнение для произвольного тона колебаний аналогично полученному в разд. 9.2.2. После подстановки выражения для z и применения оператора $\int_0^R (\dots) \eta_k dr$ получим уравнение изгибных колебаний по k -му тону:

$$I_{q_k} (\ddot{q}_k + \nu_k^2 q_k) - \int_0^R \eta_k x_i \ddot{\theta} m dr + \int_0^R \eta_k \frac{d}{dr} \left[\frac{d(r\theta)}{dr} \int_r^R x_i \Omega^2 m d\rho \right] dr = \int_0^R \eta_k F_z dr.$$

Выражение, содержащее θ , можно преобразовать к виду

$$\int_0^R \eta_k \frac{d}{dr} \left[\frac{d(r\theta)}{dr} \int_r^R x_i \Omega^2 m dp \right] dr = - \int_r^R x_i \Omega^2 m \int_0^r \eta'_k (p\theta)' dp dr.$$

Для махового и установочного движений жесткой лопасти ($\eta = r$ и θ не зависят от r) это уравнение сводится к полученному в разд. 9.4.1.

Уравнения движения лопасти относительно ОШ получаются из условий равновесия крутящих моментов относительно оси жесткости. В сечении лопасти ρ действуют следующие силы: 1) инерционный момент $I_0 \ddot{\theta}$ и сила инерции $m(\ddot{z} - x_i \ddot{\theta})$, приложенная в центре масс на плече x_i относительно оси жесткости; 2) пропеллерный момент $I_0 \theta \Omega^2 - x_i \Omega^2 m [z - z(r)]$, уменьшающий угол установки, и противоположный ему центробежный момент $m \Omega^2 x_i r z'(r)$; 3) аэродинамический шарнирный момент M_a , увеличивающий угол установки. Пропеллерный момент создает составляющая центробежной силы $x \Omega^2 dm$ в плоскости вращения (см. рис. 9.5), действующая на плече $z(r) - (z - x\theta)$ относительно оси жесткости в сечении r . Поэтому он равен

$$\int_{\text{сечение}} [z(r) - (z - x\theta)] x \Omega^2 dm = I_0 \theta \Omega^2 - x_i \Omega^2 m [z - z(r)].$$

Центробежный момент $m \Omega^2 x_i r z'(r)$ создается изгибающим моментом в плоскости вращения $m \Omega^2 x_i r$, рассмотренным при выводе уравнения махового движения (см. рис. 9.6). При взмахе лопасти вверх на угол $z'(r)$ этот момент имеет составляющую относительно оси жесткости в сечении r . Полный момент кручения (увеличивающий угол установки) в сечении r равен

$$M_r = \int_0^R [M_a - I_0 \ddot{\theta} - I_0 \theta \Omega^2 + m x_i \ddot{z} + x_i \Omega^2 m (z - z(r) + r z'(r))] dp.$$

Уравнение движения жесткой лопасти относительно ОШ получается из условия равновесия моментов относительно ОШ в комлевом сечении ($r = 0$). Инерционный и аэродинамический моменты относительно ОШ уравновешиваются моментом со стороны проводки управления:

$$M_r(0) = K_\theta [\theta(0) - \theta_{\text{упр}}],$$

где K_θ — жесткость проводки управления, $\theta_{\text{упр}}$ — угол установки комлевого сечения, задаваемый системой управления, а $\theta(0)$ — фактический угол установки комлевого сечения.

Положим упругую деформацию кручения лопасти у комля равной нулю, $\theta_s(0) = 0$; при этом угол установки у комля соответствует жесткой лопасти, т. е. $\theta(0) = \rho_0$. Дифференциальное

уравнение для жесткой на кручение лопасти имеет вид

$$\int_0^k [I_\theta \ddot{\theta} + I_\theta \theta \Omega^2 - m x_l \ddot{z} - m x_l z \Omega^2] dr + K_\theta (\rho_0 - \theta_{\text{упр}}) = \int_0^R M_a dr.$$

Для лопасти, жесткой на изгиб и кручение, оно сводится к результату разд. 9.4.1.

Теория упругой балки связывает крутящий момент с деформацией кручения соотношением $M_r = GJ(d\theta_s/dr)$, где GJ — жесткость сечения лопасти на кручение. После подстановки выражения для упругого момента в сечении, приравнивания ему действующих инерционного и аэродинамического моментов и дифференцирования по радиусу получаем следующее дифференциальное уравнение движения в частных производных для крутильных деформаций вращающейся лопасти:

$$-\frac{d}{dr} GJ \frac{d\theta_s}{dr} + I_\theta \ddot{\theta} + I_\theta \theta \Omega^2 - m x_l \ddot{z} + r \frac{d}{dr} \left[\frac{dz}{dr} \int_r^R m \Omega^2 x_l dp \right] = M_a.$$

Граничными условиями являются $d\theta_s/dr = 0$ при $r = R$ (на конце лопасти) и $\theta_s = 0$ при $r = 0$ (фиксированное комлевое сечение).

Рассмотрим свободные крутильные колебания невращающейся лопасти, описываемые однородным уравнением

$$-\frac{d}{dr} GJ \frac{d\theta_s}{dr} + I_\theta \ddot{\theta}_s = 0.$$

Решим это уравнение методом разделения переменных, для чего положим $\theta_s = \xi(r) e^{i\omega t}$, что дает

$$\frac{d}{dr} GJ \frac{d\xi}{dr} + \omega^2 I_\theta \xi = 0$$

с граничными условиями $\xi(0) = 0$ и $\xi'(R) = 0$. Это стандартная задача Штурма—Лиувилля за нахождение собственных значений, для которой существует ряд собственных решений $\xi_k(r)$ и соответствующих собственных значений ω_k^2 . Поскольку формы тонов ортогональны с весовой функцией I_θ , то

$$\int_0^R \xi_k \xi_i I_\theta dr = 0, \text{ если } k \neq i. \text{ Собственные значения нумеруются}$$

в порядке возрастания (ω_1 — низшая собственная крутильная частота), а формы тонов нормализуются так, что отклонение на конце лопасти равно единице, т. е. $\xi(R) = 1$. В соответствии с теорией Штурма—Лиувилля (разд. 9.1) собственные час-

тоны могут быть найдены по формам тонов из выражения

$$\omega^2 = \frac{\int_0^R GJ \xi^2 dr}{\int_0^R I_\theta \xi^2 dr}.$$

Для свободных крутильных колебаний невращающейся лопасти с постоянным распределением GJ и I_θ по радиусу имеется точное решение

$$\xi_k = \sin \left[\left(k - \frac{1}{2} \right) \pi \frac{r}{R} \right];$$

соответствующие собственные частоты равны

$$\omega_k = \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi \sqrt{\frac{GJ}{I_\theta R^2}}$$

для k , меняющегося от 1 до ∞ . Эти выражения полезны при нахождении собственных частот, если известны точные формы тонов, как это делается в методе Галеркина, а также если используются приближенные формы. В качестве аппроксимации для формы первого тона крутильных колебаний можно использовать простую функцию $\xi_1 = r/R$. Отметим, что здесь используются выражения для форм свободных крутильных колебаний невращающейся лопасти. Результаты для вращающейся лопасти можно получить при учете восстанавливающего (пропеллерного) момента центробежных сил в уравнении свободных колебаний. Для типичных значений жесткости на кручение лопастей несущих винтов вращение мало влияет на частоты и формы тонов свободных колебаний. В рассматриваемом случае тоны крутильных колебаний вращающейся и невращающейся лопастей идентичны. Поэтому целесообразно использовать тоны невращающейся лопасти, поскольку вычисления для них проще.

Далее рассмотрим разложение деформации кручения в ряд по ортогональным тонам:

$$\theta_s(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(r) p_k(t).$$

Здесь p_k — степени свободы (коэффициенты деформации) кручения. Если формы тонов нормализованы условием $\xi_k = 1$ на конце лопасти, то p_k есть угол установки на конце для k -го тона. Используя для жесткого тона форму $\xi_0 = 1$, запишем полный угол установки лопасти в виде

$$\theta = p_0 + \theta_s = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(r) p_k(t).$$

Затем подставим разложение θ в дифференциальное уравнение с частными производными для деформации кручения, заменим член с жесткостью на кручение собственной частотой ω_k^2 с учетом ξ_k и проделаем над уравнением операцию $\int_0^R (\dots) \xi_k dr$. С

учетом свойства ортогональности упругих тонов кручения (заметьте, что жесткий тон поворота в ОШ и упругие тоны кручения не ортогональны) получим следующее дифференциальное уравнение для k -го тона:

$$I_{p_k} [\ddot{p}_k + (\omega_k^2 + \Omega^2) p_k] + \left(\int_0^R I_{\theta} \xi_k^2 dr \right) (\ddot{p}_0 + \Omega^2 p_0) - \int_0^R \xi_k m x_{,z} \ddot{z} dr + \\ + \int_0^R \xi_k r \frac{d}{dr} \left[\frac{dz}{dr} \int_0^R \Omega^2 m x_{,z} d\rho \right] dr = \int_0^R \xi_k M_a dr,$$

где $I_{p_k} = \int_0^R \xi_k^2 I_{\theta} dr$ — обобщенная масса тона. Член, соответствующий изгибу, можно записать в виде

$$\int_0^R \xi_k r \frac{d}{dr} \left[\frac{dz}{dr} \int_r^R \Omega^2 m x_{,z} d\rho \right] dr = - \int_0^R x_{,z} \Omega^2 m \int_0^r z' (\rho \xi_k)' d\rho dr.$$

Подстановка разложения $\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k p_k$ в уравнение установочных колебаний жесткой лопасти дает

$$I_{p_0} [\ddot{p}_0 + (\omega_0^2 + 1) \Omega^2 p_0] + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^R I_{\theta} \xi_j^2 dr \right) (\ddot{p}_j + \Omega^2 p_j) - \\ - \int_0^R m x_{,z} \ddot{z} dr - \int_0^R m x_{,z} z \Omega^2 dr = \int_0^R M_a dr + I_{p_0} \omega_0^2 \Omega^2 \theta_{упр},$$

где $I_{p_0} = \int_0^R I_{\theta} dr$ — момент инерции лопасти относительно оси

ОШ, а ω_0 — собственная частота установочных колебаний жесткой лопасти вследствие упругости проводки управления, $\omega_0^2 = = K_{\theta} / (I_{p_0} \Omega^2)$.

Теперь подставим разложение для z в уравнения крутильных и установочных колебаний лопасти, а разложение для θ — в уравнение изгибных колебаний. После деления на I_x и перехода к безразмерным величинам получим следующие уравнения движения для изгибных колебаний в плоскости взмаха, устано-

вочных колебаний жесткой лопасти и крутильных деформаций упругой вращающейся лопасти:

$$\begin{aligned}
 I_{q_k}^* (\ddot{q}_k + v_k^2 q_k) - \sum_{j=0}^{\infty} (I_{q_k \bar{p}_j}^* \ddot{\bar{p}}_j + I_{q_k p_j}^* \ddot{p}_j) &= \gamma \int_0^l \eta_k \frac{F_z}{ac} dr, \\
 I_{p_0}^* [\ddot{\bar{p}}_0 + (\omega_0^2 + 1) p_0] + \sum_{j=1}^{\infty} I_{p_0 p_j}^* (\ddot{\bar{p}}_j + \ddot{p}_j) - \sum_{j=1}^{\infty} (I_{q_j \bar{p}_0}^* \ddot{q}_j + I_{q_j p_0}^* \ddot{q}_j) &= \\
 &= \gamma \int_0^l \frac{M_a}{ac} dr + I_{p_0}^* \omega_0^2 \theta_{\text{упр}} - \sum_{j=1}^{\infty} I_{p_0}^* \omega_0^2 K_{p_j} q_j, \\
 I_{p_k}^* [\ddot{\bar{p}}_k + (\omega_k^2 + 1) p_k] + I_{p_0 p_k}^* (\ddot{\bar{p}}_0 + \ddot{p}_0) - \\
 &- \sum_{j=1}^{\infty} (I_{q_j \bar{p}_k}^* \ddot{q}_j + I_{q_j p_k}^* \ddot{q}_j) = \gamma \int_0^l \xi_k \frac{M_a}{ac} dr,
 \end{aligned}$$

где обозначено: $I_{q_k}^* = \frac{1}{I_x} \int_0^l \eta_k^2 m dr$,

$$I_{q_k \bar{p}_j}^* = \frac{1}{I_x} \int_0^l \eta_k \xi_j x_j m dr, \quad I_{q_k p_j}^* = \frac{1}{I_x} \int_0^l x_j m \int_0^r \eta_k' (\rho \xi_j)' dp dr,$$

$$I_{p_k}^* = \frac{1}{I_x} \int_0^l \xi_k^2 I_{\theta} dr, \quad I_{p_0 p_k}^* = \frac{1}{I_x} \int_0^l \xi_k I_{\theta} dr.$$

Уравнения изгибных и крутильных колебаний связаны между собой инерционными и центробежными силами, если центр масс сечения не совпадает с центром жесткости. Отметим, что сюда включена кинематическая связь между углом установки лопасти и изгибом в форме $\Delta \theta_{\text{упр}} = - \sum_j K_{p_j} q_j$. Для лопасти, жесткой на изгиб и кручение, эти уравнения сводятся к полученным в разд. 9.4.1.

Из-за того что жесткая форма кручения не ортогональна упругим тонам изгиба, уравнения для p_0 и p_k ($k \geq 1$) связаны инерционными и центробежными силами. Можно также поставить задачу без выделения установочных колебаний. При этом следует опустить степень свободы p_0 и соответствующее уравнение движения. Тогда деформация θ_e будет представлять все движения кручения, включая и вызванное упругостью проводки управления. Граничное условие для уравнения кручения в этом случае имеет вид

$$GJ \frac{d\theta_e}{dr} = K_{\theta} (\theta_e - \theta_{\text{упр}} + \sum_k K_{p_k} q_k) \text{ при } r = 0.$$

Уравнение свободных колебаний можно решать при граничном условии $G I (d\xi/dr) = K \theta \xi$ для общего случая закрепления конца. Решением является ряд ортогональных тонов с учетом упругости проводки управления и упругости лопасти на кручение. Однако это разложение дает равенство $G I \theta'_0 = K \theta \theta_0$ у комля лопасти, что предполагает равенство нулю заданного системой управления угла установки и обратной связи от изгиба к углу установки. Это типичный результат для нормальных тонов; он означает, что сосредоточенные силы и моменты в конечных точках лопасти не могут быть учтены. Возникает также проблема учета демпфера ВШ шарнирной лопасти, поскольку нормальность тона предполагает, что момент в шарнире всегда равен нулю. По этой причине установочные и упругие крутильные колебания в представленном анализе разделены. Вообще говоря, установочные колебания достаточно хорошо описывают крутильные колебания лопасти многих несущих винтов. Связанные жесткий и упругие тоны кручения могут быть использованы при анализе несущего винта методами Рэлея — Ритца или Галеркина (см. разд. 9.9) с надлежащим представлением граничных условий.

9.4.4. НЕВРАЩАЮЩАЯСЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Система управления несущим винтом связывает установочные колебания различных лопастей. Каждому тону установочного движения невращающейся лопасти соответствует своя нагрузка на невращающуюся проводку управления и, следовательно, своя эффективная жесткость. Указанную связь можно учесть введением различных собственных частот для каждой степени свободы в невращающейся системе координат. Рассмотрим уравнение установочного движения m -й лопасти во вращающейся системе координат:

$$I_f^m \ddot{\theta}^{(m)} + (\omega^2 + 1) \theta^{(m)} = \gamma \int_0^1 \frac{M_a}{ac} dr = \gamma M_f^{(m)}.$$

Соответствующие уравнения движения в невращающейся системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} I_f^0 [\ddot{\theta}_0 + (\omega_0^2 + 1) \theta_0] &= \gamma M_{f_0}, \\ I_f^{nc} [\ddot{\theta}_{nc} + 2n\dot{\theta}_{nc} + (\omega_{nc}^2 + 1 - n^2) \theta_{nc}] &= \gamma M_{f_{nc}}, \\ I_f^{ns} [\ddot{\theta}_{ns} - 2n\dot{\theta}_{nc} + (\omega_{ns}^2 + 1 - n^2) \theta_{ns}] &= \gamma M_{f_{ns}}, \\ I_f^{N/2} [\ddot{\theta}_{N/2} + (\omega_{N/2}^2 + 1) \theta_{N/2}] &= \gamma M_{f_{N/2}}, \end{aligned}$$

где каждому уравнению соответствует своя собственная частота. Это эквивалентно предположению о том, что восстанавли-

ливающий момент, создаваемый проводкой управления, связан с тонами невращающейся лопасти следующим соотношением:

$$M_{\theta}^{(m)} = K_{\theta}(\theta_0 - \theta_{0np}) + \\ + \sum_n [K_{nc}(\theta_{nc} - \theta_{nc}^{ynp}) \cos n\psi_m + K_{ns}(\theta_{ns} - \theta_{ns}^{ynp}) \sin n\psi_m] + \\ + K_{N/2}(\theta_{N/2} - \theta_{N/2}^{ynp})(-1)^m$$

вместо соотношения $M_{\theta} = K_{\theta}(\theta - \theta_{np})$, как в разд. 9.4.1. В приведенных выше выражениях ω_0 — жесткость проводки управления общим шагом, а ω_{1c} и ω_{1s} — жесткости проводки управления циклическим шагом. Высшие тоны не создают усилий в невращающейся проводке управления и вызваны только упругостью поводка лопасти, тяги поводка и кольца автомата перекося. Частоты безреакционных тонов ω_{2c} , ω_{2s} , ..., $\omega_{N/2}$ обычно намного выше, чем для тонов общего и циклического шагов.

Способ использования различных собственных частот в невращающейся системе координат полезен и при рассмотрении движения лопасти относительно ГШ и ВШ. Для карданного несущего винта можно принять $\nu = 1$ для степеней свободы β_{1c} и β_{1s} взмаха жесткой лопасти и соответствующие частоты и формы колебаний для угла конусности и других степеней свободы. Аналогично можно использовать угол отставания ζ_0 для учета возмущений частоты вращения несущего винта, полагая собственную частоту качания равной нулю.

9.5. РЕАКЦИЯ ВТУЛКИ

Суммарные силы и моменты у комля вращающейся лопасти передаются на фюзеляж вертолета. Постоянные составляющие этих реакций втулки в невращающейся системе координат представляют силы и моменты, необходимые для балансировки вертолета. Высокочастотные составляющие вызывают вибрации вертолета. Если в модели винта учтено движение вала, то эти силы и моменты определяют характеристики устойчивости и управляемости вертолета. На рис. 9.7 показаны силы и моменты, действующие на вращающуюся лопасть, а также силы и моменты, действующие на втулку в невращающейся системе координат. Вертикальная сила S_z участвует в создании тяги, а силы в плоскости вращения S_x и S_y — в создании продольной и поперечной сил несущего винта. Момент в плоскости взмаха N_F создает продольный и поперечный моменты несущего винта, а момент в плоскости вращения N_L — крутящий момент на валу винта. Условимся, что положительные реакции втулки действуют на вертолет, за исключением аэродинамического крутящего момента Q , который по определению воздействует на винт (реактивный момент, передаваемый от винта на втулку, поло-

жителен, если он действует в направлении, противоположном вращению винта). На рис. 9.7 показаны положительные на-

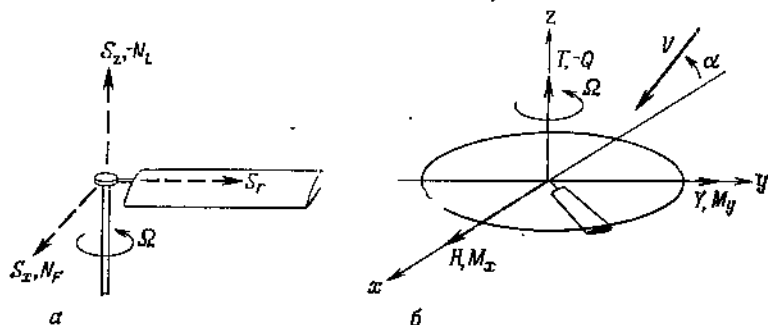


Рис. 9.7. Силы и моменты, действующие на втулку несущего винта. а—вращающаяся система координат; б—невращающаяся система координат.

правления силы тяги несущего винта T , продольной силы H , поперечной силы Y , продольного момента M_y и поперечного момента M_x .

9.5.1. ВРАЩАЮЩИЕСЯ НАГРУЗКИ

Суммарные силы и моменты в комлевом сечении вращающейся лопасти можно определить путем интегрирования инерционных и аэродинамических сил, как при выводе уравнений движения лопасти. Рассмотрим шарнирный несущий винт без отнoса ГШ, как в разд. 9.2.1. В сечении лопасти действуют по вертикали инерционная сила $m\ddot{z} = mr\ddot{\beta}$ и аэродинамическая сила F_z . Центробежная сила всегда параллельна плоскости вращения (рис. 9.8). Вертикальная перерезывающая сила у комля, следовательно, равна

$$S_z = \int_0^R F_z dr - \ddot{\beta} \int_0^R r m dr.$$

Момент в плоскости взмаха у комля лопасти, создаваемый инерционной, центробежной и аэродинамическими силами, был получен в разд. 9.2.1 при выводе уравнения махового движения:

$$N_F = \int_0^R r F_z dr - (\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta) \int_0^R r^2 m dr.$$

Момент у комля, если нет отнoса ГШ, одновременно является и моментом в шарнире; он не равен нулю только при наличии пружины в шарнире. Момент, создаваемый на втулке пружиной

в шарнире, равен $N_F = K_\beta (\beta - \beta_{\text{констр}})$ или, поскольку $v_\beta^2 = \Gamma + K_\beta / (I_a \Omega^2)$,

$$N_F = I_a \Omega^2 (v_\beta^2 - 1) (\beta - \beta_{\text{констр}}).$$

В разд. 5.14 было показано, что это выражение справедливо и при отnose ГШ.

Рассмотрим теперь общий случай изгибных колебаний лопасти как шарнирного, так и бесшарнирного винта. Силы, действующие в сечении лопасти, были рассмотрены в разд. 9.2.2,

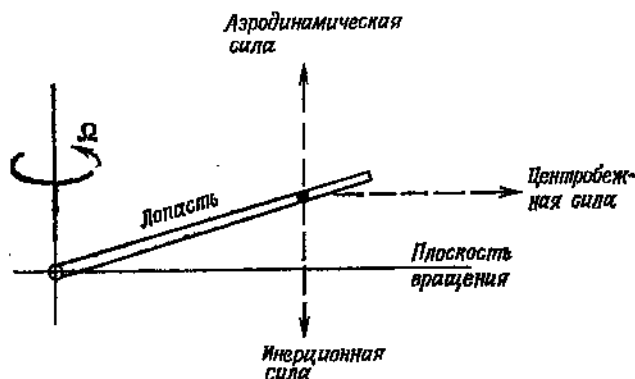


Рис. 9.8. Силы в сечении лопасти, вызывающие появление вертикальной силы у комля и момента относительно ГШ.

там же было выведено уравнение движения для нормальных изгибных тонов. Вертикальную перерезывающую силу у комля можно определить интегрированием аэродинамических и инерционных сил по лопасти:

$$S_z = \int_0^R (F_z - m\ddot{z}) dr.$$

Подстановка разложения $z = \sum_k \eta_k q_k$ по нормальным формам дает

$$S_z = \int_0^R F_z dr - \sum_k \ddot{q}_k \int_0^R \eta_k m dr.$$

Момент у комля получается суммированием моментов в плоскости взмаха от аэродинамических, инерционных и центробежных сил в сечении лопасти (см. рис. 9.8) или просто путем расчета изгибающего момента в плоскости взмаха по формуле

разд. 9.2.2 при $r = 0$:

$$N_F = \int_0^R [(F_z - m\ddot{z})r - m\Omega^2 rz] dr = \\ = \int_0^R rF_z dr - \sum_k (\ddot{q}_k + \Omega^2 q_k) \int_0^R r\eta_k m dr.$$

Вспомним дифференциальное уравнение движения для q_k .

$$I_{q_k}(\ddot{q}_k + v_k^2 q_k) = \int_0^R \eta_k F_z dr.$$

Таким образом, аэродинамическая сила F_z непосредственно участвует в создании вертикальной силы и момента у комля; она также возбуждает изгибное движение лопасти, которое в свою очередь приводит к уравниванию части реакции втулки. Действительно, ГШ введен для того, чтобы моменты у комля уравнивались в основном за счет движения лопасти, а не моментами сил упругости. Поскольку формы тонов η_k образуют полную систему, аэродинамическую нагрузку можно представить в виде $F_z = \sum_k F_{z_k} \eta_k m$. Легко показать, что

$$F_{z_k} = \int_0^R \eta_k F_z dr / \int_0^R \eta_k^2 m dr.$$

После подстановки разложения F_z выражение для момента у комля принимает вид

$$N_F = \sum_k (F_{z_k} - \ddot{q}_k - \Omega^2 q_k) \int_0^R r\eta_k m dr.$$

Уравнение движения для q_k дает зависимость $F_{z_k} = \ddot{q}_k + v_k^2 q_k$. Тогда

$$N_F = \sum_k q_k \Omega^2 (v_k^2 - 1) \int_0^R r\eta_k m dr.$$

Отметим, что в случае шарнирного винта без отбоя ГШ $v_1 = 1$ и $\eta_1 = r$ для первого тона, а формы всех высших тонов ортогональны к $r = \eta_1$, следовательно, $N_F = 0$, как и требуется. Если учитывается только первый тон и его форма соответствует $\eta \approx r$, то приведенное выше выражение сводится к формуле

$$N_F = I_x \Omega^2 (v_\beta^2 - 1) \beta,$$

применявшейся ранее. Таким образом, момент на втулке можно определить, зная форму и собственную частоту основного тона

махового движения. Простота полученного результата делает его весьма полезным. Аналогичным образом вертикальную перерезывающую силу у комля можно выразить как

$$S_z = \sum_k (F_{z_k} - \dot{q}_k) \int_0^R \eta_k m dr = \sum_k q_k \Omega^2 v_k^2 \int_0^R \eta_k m dr.$$

Более удобно, однако, выразить вертикальную силу, а следовательно, и тягу винта через аэродинамическую силу.

Если число рассматриваемых тонов велико, то независимо от того, интегрируются ли силы вдоль лопасти или применяется выражение

$$N_F = \sum_k q_k \Omega^2 (v_k^2 - 1) \int_0^R r \eta_k m dr,$$

будет получен один и тот же результат. В последнем случае использование конечного числа тонов эквивалентно усечению ряда $F_z = \sum_k F_{z_k} \eta_k m$, что может и не дать адекватного представле-

ния нагрузки, особенно при малом числе тонов. Поэтому в общем случае лучшие результаты при определении реакций втулки получаются путем интегрирования сил по лопасти, хотя в некоторых случаях увеличение точности не так ценно, как простота уравнения.

Теперь подвергнем анализу силы в плоскости вращения и крутящий момент у комля лопасти с учетом движения лопасти в плоскости вращения. Рассмотрим шарнирную лопасть, перемещение сечения которой в плоскости вращения описывается выражением $x = \eta \zeta \xi$. В радиальном направлении на сечение лопасти действуют три силы: аэродинамическая сила F_r , вызванная радиальным сопротивлением и составляющей силы тяги в плоскости вращения при взмахе лопасти; центробежная сила $m\Omega^2 r$; направленная внутрь кориолисова сила $2\Omega \dot{x} m = 2\Omega \eta \zeta \dot{\xi} m$. Последняя равна удвоенному векторному произведению угловой скорости вращения винта Ω и скорости \dot{x} в плоскости вращения; эта сила создает момент относительно ГШ, пропорциональный $\beta \dot{\xi}$ (см. разд. 9.3.1). Таким образом, радиальная перерезывающая сила у комля лопасти описывается выражением

$$\begin{aligned} S_r &= \int_0^R (F_r + m\Omega^2 r - 2\Omega \eta \zeta \dot{\xi} m) dr = \\ &= \int_0^k F_r dr + \Omega^2 \int_0^R r m dr - 2\Omega \dot{\xi} \int_0^R \eta \zeta m dr. \end{aligned}$$

Центробежная сила постоянна и уравновешивается центробежными силами других лопастей. Следовательно, только аэродинамическая и кориолисова силы участвуют в создании реакций втулки в невращающейся системе координат.

На рис. 9.9 показаны силы в плоскости вращения, действующие в сечении лопасти: аэродинамическая сила F_x , состоящая из профильного и индуктивного сопротивлений, инерционная сила $m\ddot{x} = m\eta\zeta\ddot{\xi}$ и центробежная сила $m\Omega^2 x = m\Omega^2\eta\zeta\xi$. Последняя возникает вследствие того, что центробежная сила

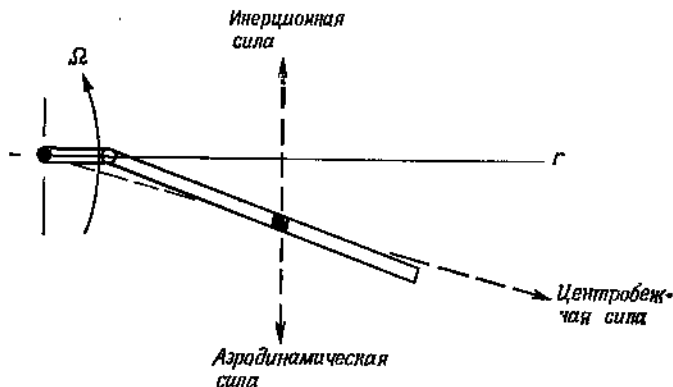


Рис. 9.9. Силы в сечении лопасти, вызывающие появление сил в плоскости вращения у комля.

$m\Omega^2 r$ имеет нормальную к оси r составляющую $(m\Omega^2 r)(x/r)$, действующую в направлении увеличения качания лопасти. Кориолисовы силы в плоскости вращения, вызванные маховым движением, малы по сравнению с центробежной силой и не учитываются. Таким образом, полная перерезывающая сила в плоскости вращения у комля лопасти равна

$$S_x = \int_0^R (F_x - m\eta\zeta\ddot{\xi} + m\Omega^2\eta\zeta\xi) dr = \\ = \int_0^R F_x dr - (\ddot{\xi} - \Omega^2\xi) \int_0^R \eta\zeta m dr.$$

Крутящий момент на втулке винта создается действующими в сечении лопасти силами, рассмотренными при выводе уравнения движения лопасти в плоскости вращения: аэродинамической F_x , инерционной $m\ddot{x}$ и кориолисовой $2\Omega\dot{z}'m$. Эти силы действуют на плече r относительно вала винта. Центробежная сила всегда проходит через ось вала и не создает крутящего

момента. Момент у коня описывается выражением

$$\begin{aligned} N_L &= \int_0^R r (F_x - m\eta_c \ddot{\xi} - 2\Omega m \beta \dot{\beta} \eta_\beta \eta'_\beta) dr = \\ &= \int_0^R r F_x dr - \ddot{\xi} \int_0^R r \eta_c m dr - 2\Omega \beta \dot{\beta} \int_0^R \eta_\beta \eta'_\beta r m dr. \end{aligned}$$

Эти результаты легко можно распространить на общий случай изгиба в плоскости вращения. Как в разд. 9.3.2, разложим отклонение лопасти в плоскости вращения в ряд по нормальным формам: $x = \sum_k \eta_{x_k} q_{x_k}$. Тогда радиальная и лежащая в плоскости вращения перерезывающие силы равны

$$\begin{aligned} S_r &= \int_0^R (F_r + m\Omega^2 r - 2\Omega \dot{x} m) dr = \\ &= \int_0^R F_r dr + \Omega^2 \int_0^R r m dr - 2\Omega \sum_k \dot{q}_{x_k} \int_0^R \eta_{x_k} m dr, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= \int_0^R (F_x - m\ddot{x} + m\Omega^2 x) dr = \\ &= \int_0^R F_x dr - \sum_k (\ddot{q}_{x_k} - \Omega^2 q_{x_k}) \int_0^R \eta_{x_k} m dr. \end{aligned}$$

Пренебрегая кориолисовыми силами, запишем выражение для крутящего момента в виде

$$N_L = \int_0^R r (F_x - m\ddot{x}) dr = \int_0^R r F_x dr - \sum_k \ddot{q}_{x_k} \int_0^R r \eta_{x_k} m dr.$$

При разложении аэродинамической нагрузки F_x в ряд по собственным формам изгиба, как и для момента на втулке, перерезывающую силу в плоскости вращения и крутящий момент можно записать следующим образом:

$$S_x = \sum_k q_{x_k} \Omega^2 (v_{x_k}^2 + 1) \int_0^R \eta_{x_k} m dr,$$

$$N_L = \sum_k q_{x_k} \Omega^2 v_{x_k}^2 \int_0^R r \eta_{x_k} m dr.$$

Эти результаты, однако, не столь полезны, как соответствующее выражение для момента в плоскости взмаха, поскольку для

оценки таким способом S_x и N_L нужно определить функции q_{xk} . Если перерезывающая сила в плоскости вращения и крутящий момент выражены через интегралы от аэродинамических сил, то их можно оценить, даже не рассматривая движение лопасти в плоскости вращения.

9.5.2. НАГРУЗКИ В НЕВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Суммарные силы и моменты, действующие на втулку винта, определяются путем перехода к невращающейся системе координат и суммирования по N лопастям:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{m=1}^N S_z, & H &= \sum_{m=1}^N (S_r \cos \psi_m + S_x \sin \psi_m), \\ Y &= \sum_{m=1}^N (S_r \sin \psi_m - S_x \cos \psi_m), & M_x &= \sum_{m=1}^N N_F \sin \psi_m, \\ & & M_y &= - \sum_{m=1}^N N_F \cos \psi_m, \\ & & Q &= \sum_{m=1}^N N_L, \end{aligned}$$

где ψ_m — азимутальный угол m -й лопасти. Реакции втулки удобно выразить через аэродинамические коэффициенты несущего винта. Заметим, что в безразмерных величинах

$$\frac{T}{NI_x} = \frac{T/\rho R^4 \Omega^2}{NI_x/\rho R^5} = \frac{\rho ac R^4}{I_x} \frac{T/\rho A (\Omega R)^2}{(Nc/\pi R) a} = \gamma \frac{C_T}{\sigma a}.$$

Тогда при делении выражений для реакций втулки на NI_x получим

$$\gamma \frac{C_T}{\sigma a} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{S_z}{I_x} = \gamma \sum_{m=1}^N \frac{S_z}{ac}$$

и аналогичные формулы для других сил и моментов.

Рассмотрим вначале силу тяги несущего винта. В предыдущем разделе было получено с использованием безразмерных величин следующее выражение для вертикальной силы m -й лопасти:

$$\frac{S_z}{I_x} = \gamma \int_0^1 \frac{F_z}{ac} dr - \sum_k S_{q_k}^* q_k^{(m)},$$

где $S_{q_k}^* = \int_0^1 \eta_k m dr / I_x$. Таким образом,

$$\gamma \frac{C_T}{\sigma a} = \gamma \sum_{m=1}^N \int_0^1 \frac{F_z}{ac} dr - \sum_k S_{q_k}^* \left(\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N q_k^{(m)} \right).$$

Далее, из определения степеней свободы в невращающейся системе координат (см. Фурье-преобразование координат, разд. 8.4.1) следует, что ускорение угла конусности для k -го тона изгиба равно

$$\ddot{\beta}_0^{(k)} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \ddot{q}_k^{(m)}.$$

Тогда сила тяги винта определяется выражением

$$\gamma \frac{C_T}{\sigma a} = \frac{\gamma}{N} \sum_{m=1}^N \int_0^1 \frac{F_x}{ac} dr - \sum_k S_{q_k}^* \ddot{\beta}_0^{(k)}.$$

Первый его член — суммарная аэродинамическая подъемная сила, а второй — вертикальное ускорение вследствие изменения угла конусности лопастей.

Момент в плоскости взмаха у комля вращающейся лопасти равен

$$\frac{N_P}{I_x} = \sum_k q_k^{(m)} (v_k^2 - 1) I_{q_k a}^*.$$

где $I_{q_k a}^* = \int_0^1 r \eta_k m dr / I_x$. Продольный и поперечный моменты на втулке определяются выражениями

$$-\gamma \frac{2C_{M_y}}{\sigma a} = \sum_k (v_k^2 - 1) I_{q_k a}^* \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N q_k^{(m)} \cos \psi_m,$$

$$\gamma \frac{2C_{M_x}}{\sigma a} = \sum_k (v_k^2 - 1) I_{q_k a}^* \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N q_k^{(m)} \sin \psi_m.$$

Для несущего винта с тремя и более лопастями с учетом определения степеней свободы $\beta_{1c}^{(k)}$ и $\beta_{1s}^{(k)}$ имеем

$$\begin{bmatrix} -\gamma \frac{2C_{M_y}}{\sigma a} \\ \gamma \frac{2C_{M_x}}{\sigma a} \end{bmatrix} = \sum_k (v_k^2 - 1) I_{q_k a}^* \begin{bmatrix} \beta_{1c}^{(k)} \\ \beta_{1s}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Если учитывать только один тон махового движения, то моменты на втулке пропорциональны наклону плоскости концов лопастей:

$$\begin{bmatrix} -\gamma \frac{2C_{M_y}}{\sigma a} \\ \gamma \frac{2C_{M_x}}{\sigma a} \end{bmatrix} = I_{\beta}^* (v_{\beta}^2 - 1) \begin{bmatrix} \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix}.$$

Этот результат был получен в разд. 5.13 для более простой модели движения лопасти. Если выражение

$$\frac{N_F}{I_x} = \gamma \int_0^l r \frac{F_z}{ac} dr - \sum_k (\ddot{q}_k^{(m)} + q_k^{(m)}) I_{q_k^* a}$$

использовать в выражениях моментов, то получим

$$-\gamma \frac{2C_{My}}{\sigma a} = \frac{2\gamma}{N} \sum_{m=1}^N \cos \psi_m \int_0^l r \frac{F_z}{ac} dr - \sum_k (\ddot{\beta}_{ic}^{(k)} + 2\dot{\beta}_{is}^{(k)}) I_{q_k^* a},$$

$$\gamma \frac{2C_{Mx}}{\sigma a} = \frac{2\gamma}{N} \sum_{m=1}^N \sin \psi_m \int_0^l r \frac{F_z}{ac} dr - \sum_k (\ddot{\beta}_{is}^{(k)} - 2\dot{\beta}_{ic}^{(k)}) I_{q_k^* a}.$$

На установившемся режиме полета наклон плоскости концов лопастей постоянен. В создании продольного и поперечного моментов на втулке участвуют только аэродинамические силы. Этот же результат был получен в разд. 5.3.

Продольную и поперечную силы несущего винта определим, переходя к невращающейся системе координат и используя выражения для лежащей в плоскости вращения и радиальной перерезывающих сил в корневом сечении вращающейся лопасти:

$$\frac{S_x}{I_x} = \gamma \int_0^l \frac{F_x}{ac} dr - S_{\xi}^* (\ddot{\xi}^{(m)} - \xi^{(m)}),$$

$$\frac{S_r}{I_x} = \gamma \int_0^l \frac{F_r}{ac} dr - 2S_{\xi}^* \dot{\xi}^{(m)},$$

где $S_{\xi}^* = \int_0^l \eta_{\xi} m dr / I_x$. Для простоты рассмотрим только один

основной тон движения лопасти в плоскости вращения. В выражении для S_r опустим центробежную силу как не участвующую в создании суммарных сил на втулке. Применение фурье-преобразования координат к степеням свободы лопасти в плоскости вращения дает

$$\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N [(\ddot{\xi} - \xi) \sin \psi_m + 2\dot{\xi} \cos \psi_m] =$$

$$= (\ddot{\xi}_{is} - 2\dot{\xi}_{ic} - \xi_{is} - \xi_{is}) + 2(\dot{\xi}_{ic} + \xi_{is}) = \ddot{\xi}_{is}$$

и

$$\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N [(\ddot{\xi} - \xi) \cos \psi_m - 2\dot{\xi} \sin \psi_m] =$$

$$= (\ddot{\xi}_{ic} + 2\dot{\xi}_{is} - \xi_{ic} - \xi_{ic}) - 2(\dot{\xi}_{is} - \xi_{ic}) = \ddot{\xi}_{is}$$

(снова в предположении, что несущий винт имеет три лопасти или более). Продольная и поперечная силы равны

$$\gamma \frac{2C_H}{\sigma a} = \frac{2\gamma}{N} \sum_{m=1}^N \left[\cos \psi_m \int_0^1 \frac{F_r}{ac} dr + \sin \psi_m \int_0^1 \frac{F_x}{ac} dr \right] - S_{\xi}^* \ddot{\xi}_{1s},$$

$$\gamma \frac{2C_Y}{\sigma a} = \frac{2\gamma}{N} \sum_{m=1}^N \left[\sin \psi_m \int_0^1 \frac{F_r}{ac} dr - \cos \psi_m \int_0^1 \frac{F_x}{ac} dr \right] + S_{\xi}^* \ddot{\xi}_{1c}.$$

На втулке имеются инерционные реакции в плоскости вращения, вызванные смещением центра масс несущего винта в продольном и поперечном направлениях из-за движения лопастей в плоскости вращения. Напомним, что в гл. 5 для постоянных составляющих сил на винте были получены следующие зависимости: $H = \beta_{1c} T + H_{ПКЛ}$ и $Y = -\beta_{1s} T + Y_{ПКЛ}$. Для того чтобы выразить представленные выше результаты через наклон вектора тяги и плоскости концов лопастей, требуется детальное рассмотрение аэродинамических сил F_x и F_r , которое будет дано в гл. 11. Наконец, если пренебречь кориолисовой силой, то крутящий момент от одной лопасти определяется выражением

$$\frac{N_L}{I_{л}} = \gamma \int_0^1 r \frac{F_x}{ac} dr - I_{\xi a}^* \ddot{\xi}_0^{(m)},$$

где $I_{\xi a}^* = \int_0^1 r \eta_{\xi} m dr / I_{л}$. Тогда суммарный крутящий момент равен

$$\gamma \frac{C_Q}{\sigma a} = \frac{\gamma}{N} \sum_{m=1}^N \int_0^1 r \frac{F_x}{ac} dr - I_{\xi a}^* \ddot{\xi}_0,$$

поскольку по определению угла качания $(1/N) \sum_m \ddot{\xi}^{(m)} = \ddot{\xi}_0$.

Для двухлопастного несущего винта результаты оказываются несколько другими, поскольку в невращающейся системе координат для него нет степеней свободы взмаха и движения лопастей в плоскости вращения. Вместо β_{1c} и β_{1s} он имеет одну степень свободы — поворот β_1 относительно общего ГШ. Определение моментов на втулке двухлопастного винта требует оценки сумм вида

$$\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \sin \psi_m = 2 \sin \psi \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} (-1)^m = 2\beta_1 \sin \psi,$$

$$\frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} \cos \psi_m = 2 \cos \psi \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \beta^{(m)} (-1)^m = 2\beta_1 \cos \psi,$$

где $\beta_1 = \frac{1}{2}(\beta^{(2)} - \beta^{(1)})$ — угол поворота в общем ГШ. Тогда моменты на втулке равны

$$-\gamma \frac{2C_{My}}{\sigma a} = I_{\beta}^* (v_{\beta}^2 - 1) 2\beta_1 \cos \psi,$$

$$\gamma \frac{2C_{Mx}}{\sigma a} = I_{\beta}^* (v_{\beta}^2 - 1) 2\beta_1 \sin \psi.$$

Аналогично продольная и поперечная силы винта зависят от полуразности $\xi_1 = (\xi^{(2)} - \xi^{(1)})/2$ углов качания:

$$\gamma \frac{2C_H}{\sigma a} = \frac{2\gamma}{N} \sum_{m=1}^N \left[\cos \psi_m \int_0^1 \frac{F_r}{ac} dr + \sin \psi_m \int_0^1 \frac{F_x}{ac} dr \right] -$$

$$- 2S_{\xi}^* [(\xi_1 - \zeta_1) \sin \psi + 2\zeta_1 \cos \psi],$$

$$\gamma \frac{2C_Y}{\sigma a} = \frac{2\gamma}{N} \sum_{m=1}^N \left[\sin \psi_m \int_0^1 \frac{F_r}{ac} dr - \cos \psi_m \int_0^1 \frac{F_x}{ac} dr \right] +$$

$$+ 2S_{\xi}^* [(\xi_1 - \zeta_1) \cos \psi - 2\zeta_1 \sin \psi].$$

Следовательно, хотя установившееся периодическое движение двухлопастного несущего винта аналогично таковому для винтов с тремя или более лопастями, динамика переходных процессов существенно отличается ввиду отсутствия степеней свободы, соответствующих наклону конуса лопастей.

9.6. ДВИЖЕНИЕ ВАЛА НЕСУЩЕГО ВИНТА

До сих пор в анализе динамики рассматривалось только движение самого несущего винта. Движение вала винта также является важным фактором как с точки зрения проблем устойчивости и управляемости вертолета, в которых рассматриваются степени свободы фюзеляжа как жесткого тела, так и в отношении проблем аэроупругости, включающих связанное движение упругого фюзеляжа и винта. На рис. 9.10 показаны линейные и угловые движения втулки. Возмущенное линейное смещение втулки относительно установившейся траектории полета обозначается перемещениями $x_{вт}$, $y_{вт}$ и $z_{вт}$; возмущенное угловое смещение — углами α_x , α_y и α_z . В данном случае используется инерциальная система координат, которая остается неподвижной в пространстве при возмущенном движении втулки.

Движение вала создает дополнительные ускорения в плоскостях взмаха и вращения, которые следует учесть в уравнениях движения изгиба. Рассмотрим модель движения жесткой лопасти в плоскостях взмаха и вращения, представленную в разд. 9.2.1 и 9.3.1.

Сечение лопасти испытывает следующие дополнительные ускорения, ведущие к появлению моментов в плоскости взмаха: 1) угловое ускорение $r(\ddot{\alpha}_x \sin \psi_m - \ddot{\alpha}_y \cos \psi_m)$; 2) кориолисово ускорение $2\Omega r(\dot{\alpha}_x \cos \psi_m + \dot{\alpha}_y \sin \psi_m)$; 3) вертикальное ускорение $\ddot{z}_{вт}$.

Каждое из этих ускорений создает в сечении лопасти направленную вниз инерционную силу, которая действует на плече

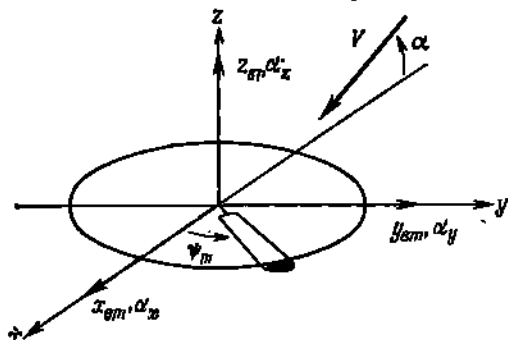


Рис. 9.10. Линейные и угловые перемещения вала несущего винта.

$(r - e)$ относительно оси ГШ. Угловое ускорение $(\ddot{\alpha}_x \sin \psi_m - \ddot{\alpha}_y \cos \psi_m)$ является составляющей в плоскости взмаха угловых ускорений втулки по тангажу и крену. Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению угловой скорости диска винта $(\dot{\alpha}_x \cos \psi_m + \dot{\alpha}_y \sin \psi_m)$ относительно продольной оси лопасти и окружной скорости сечения Ωr . Интегрирование этих сил по радиусу лопасти дает дополнительный момент в плоскости взмаха

$$\left(\int_0^R \eta_B r m dr \right) [(\ddot{\alpha}_x + 2\Omega \dot{\alpha}_y) \sin \psi_m - (\ddot{\alpha}_y - 2\Omega \dot{\alpha}_x) \cos \psi_m] + \left(\int_0^R \eta_B m dr \right) \ddot{z}_{вт}.$$

Уравнение махового движения становится следующим:

$$I_{\beta\alpha}^* (\ddot{\beta} + v_{\beta}^2 \beta) - I_{\beta z}^* 2\beta \dot{z} + I_{\beta\alpha}^* [(\ddot{\alpha}_x + 2\dot{\alpha}_y) \sin \psi_m - (\ddot{\alpha}_y - 2\dot{\alpha}_x) \cos \psi_m] + S_{\beta}^* \ddot{z}_{вт} = \gamma \int_0^1 \eta_B \frac{F_{\beta}}{ac} dr = \gamma M_F,$$

где $I_{\beta\alpha}^* = \int_0^1 r \eta_B m dr / l_n$ и $S_{\beta}^* = \int_0^1 \eta_B m dr / l_n$. Заметим, что движение вала проявляется в уравнении движения лопасти в виде

периодических коэффициентов, так как оно задано в невращающейся системе координат.

Дополнительными ускорениями в плоскости вращения, порождающими моменты относительно оси ВШ, являются 1) угловое ускорение втулки $r\ddot{\alpha}_z$ и 2) линейное ускорение втулки $(\ddot{x}_{вт} \sin \psi_m - \ddot{y}_{вт} \cos \psi_m)$. Угловое ускорение создает инерционную силу в плоскости вращения в направлении отставания лопасти, а линейное ускорение — силу противоположного направления; обе действуют на плече $(r - e)$ относительно оси ВШ. Интегрирование по радиусу дает момент в плоскости вращения:

$$-\left(\int_0^R r \eta_{\zeta} m dr\right) \ddot{\alpha}_z + \left(\int_0^R \eta_{\zeta} m dr\right) (\ddot{x}_{вт} \sin \psi_m - \ddot{y}_{вт} \cos \psi_m).$$

Таким образом, уравнение качания приобретает вид

$$I_{\zeta}^* (\ddot{\zeta} + \nu_{\zeta}^2 \zeta) + I_{\beta\zeta}^* 2\beta\dot{\beta} - I_{\zeta\alpha}^* \ddot{\alpha}_z + S_{\zeta}^* (\ddot{x}_{вт} \sin \psi_m - \ddot{y}_{вт} \cos \psi_m) = \\ = \gamma \int_0^1 \eta_{\zeta} \frac{F_x}{ac} dr = \gamma M_L,$$

$$\text{где } I_{\zeta\alpha}^* = \int_0^1 r \eta_{\zeta} m dr / I_x \text{ и } S_{\zeta}^* = \int_0^1 \eta_{\zeta} m dr / I_x.$$

Запишем уравнения движения лопасти в плоскостях взмаха и вращения в невращающейся системе координат. Ускорение и скорость втулки не зависят от номера лопасти, так что оператор суммирования воздействует только на множители $\sin \psi_m$ и $\cos \psi_m$. Отсюда следует, что движение втулки влияет только на уравнения общего и циклического шагов в невращающейся системе координат (по крайней мере для инерционных сил). В результате получаем следующие уравнения для коэффициентов махового движения:

$$I_{\beta}^* (\ddot{\beta}_0 + \nu_{\beta}^2 \beta_0) - I_{\beta\zeta}^* 2\beta_{\text{вал}} \dot{\zeta}_0 + S_{\beta}^* \ddot{z}_{вт} = \gamma M_{F_0},$$

$$I_{\beta}^* [\ddot{\beta}_{1c} + 2\dot{\beta}_{1s} + (\nu_{\beta}^2 - 1)\beta_{1c}] - I_{\beta\zeta}^* 2\beta_{\text{вал}} (\dot{\zeta}_{1c} + \zeta_{1s}) - \\ - I_{\beta\alpha}^* (\ddot{\alpha}_y - 2\dot{\alpha}_x) = \gamma M_{F_{1c}},$$

$$I_{\beta}^* [\ddot{\beta}_{1s} - 2\dot{\beta}_{1c} + (\nu_{\beta}^2 - 1)\beta_{1s}] - I_{\beta\zeta}^* 2\beta_{\text{вал}} (\dot{\zeta}_{1s} - \zeta_{1c}) + \\ + I_{\beta\alpha}^* (\ddot{\alpha}_x + 2\dot{\alpha}_y) = \gamma M_{F_{1s}}$$

и коэффициентов качания:

$$I_z^* (\ddot{\zeta}_0 + v_z^2 \zeta_0) + I_{\beta z}^* 2\beta_{\text{бал}} \dot{\beta}_0 - I_{z\alpha}^* \ddot{\alpha}_z = \gamma M_{L_0},$$

$$I_z^* [\ddot{\zeta}_{1c} + 2\dot{\zeta}_{1s} + (v_z^2 - 1)\zeta_{1c}] + I_{\beta z}^* 2\beta_{\text{бал}} (\dot{\beta}_{1c} + \beta_{1s}) - S_z^* \ddot{y}_{\text{вт}} = \gamma M_{L_{1c}},$$

$$I_z^* [\ddot{\zeta}_{1s} - 2\dot{\zeta}_{1c} + (v_z^2 - 1)\zeta_{1s}] + I_{\beta z}^* 2\beta_{\text{бал}} (\beta_{1c} - \dot{\beta}_{1s}) + S_z^* \ddot{x}_{\text{вт}} = \gamma M_{L_{1s}}.$$

В невращающихся осях инерционная взаимосвязь между движениями несущего винта и его вала сильно ограничена. Угол конусности реагирует на вертикальное ускорение, циклический шаг — на движения тангажа и крена, угол качания — на угловое ускорение рыскания, а циклические составляющие угла качания — на продольное и поперечное ускорения втулки. Вообще отсутствует влияние движения вала на безреакционные степени свободы (с номерами $2c, 2s, \dots, nc, ns, N/2$).

Все три появляющиеся при движении вала вертикальные инерционные силы, которые создают моменты в плоскости взмаха, следует включить в выражение для вертикальной перерезывающей силы у комля, так что

$$S_z = \int_0^R F_z dr - \beta \int_0^R \eta_\beta m r - \ddot{z}_{\text{вт}} \int_0^R m dr -$$

$$- [(\ddot{\alpha}_x + 2\dot{\alpha}_y) \sin \psi_m - (\ddot{\alpha}_y - 2\dot{\alpha}_x) \cos \psi_m] \int_0^R r m dr.$$

Аналогично момент в плоскости взмаха у комля равен

$$N_F = \int_0^R r F_z dr - (\beta + \Omega^2 \beta) \int_0^R r \eta_\beta m dr - \ddot{z}_{\text{вт}} \int_0^R r m dr -$$

$$- [(\ddot{\alpha}_x + 2\dot{\alpha}_y) \sin \psi_m - (\ddot{\alpha}_y - 2\dot{\alpha}_x) \cos \psi_m] \int_0^R r^2 m dr.$$

Здесь можно использовать и выражение $N_F = I_n \Omega^2 (v_\beta^2 - 1) \beta$. Радиальное ускорение $(\ddot{x}_{\text{вт}} \cos \psi_m + \ddot{y}_{\text{вт}} \sin \psi_m)$ из-за движения втулки в плоскости вращения следует учесть в выражении для радиальной перерезывающей силы:

$$S_r = \int_0^R F_r dr - 2\Omega \dot{\zeta} \int_0^R \eta_\zeta m dr - (\ddot{x}_{\text{вт}} \cos \psi_m + \ddot{y}_{\text{вт}} \sin \psi_m) \int_0^R m dr.$$

Вызванные движением вала инерционные силы в плоскости вращения, которые создают моменты относительно оси ВШ, необходимо учесть в выражениях для перерезывающей силы в

плоскости вращения и крутящего момента:

$$S_x = \int_0^R F_x dr - (\ddot{\xi} - \Omega^2 \xi) \int_0^R \eta \zeta m dr + \ddot{\alpha}_z \int_0^R r m dr - \\ - (\ddot{x}_{вт} \sin \psi_m - \ddot{y}_{вт} \cos \psi_m) \int_0^R m dr, \\ N_L = \int_0^R r F_x dr - \ddot{\xi} \int_0^R r \eta \zeta m dr - 2\Omega \beta \dot{\beta} I_{\beta \xi} + \\ + \ddot{\alpha}_z \int_0^R r^2 m dr - (\ddot{x}_{вт} \sin \psi_m - \ddot{y}_{вт} \cos \psi_m) \int_0^R r m dr.$$

При суммировании реакций от N лопастей результаты для сил и моментов упрощаются из-за взаимного уничтожения многих новых членов. Сила тяги несущего винта равна

$$\gamma \frac{C_T}{\sigma a} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{S_x}{I_x} = \left(\gamma \frac{C_T}{\sigma a} \right)_{\text{аэро}} - S_{\beta}^* \ddot{\beta}_0 - M_n^* \ddot{z}_{вт},$$

где $S_{\beta}^* = \int_0^R \eta_{\beta} m dr / I_x$ и $M_n^* = \int_0^R m dr / I_x$ (выражение для аэродинамической составляющей см. в разд. 9.5.2). Заметим, что M_n^* — нормированная масса одной лопасти. Для моментов тангажа и крена используем, как и раньше, матричное выражение

$$\begin{bmatrix} -\gamma \frac{2C_{M_y}}{\sigma a} \\ \gamma \frac{2C_{M_x}}{\sigma a} \end{bmatrix} = I_{\beta}^* (\nu_{\beta}^2 - 1) \begin{bmatrix} \beta_{1c} \\ \beta_{1s} \end{bmatrix},$$

или

$$-\gamma \frac{2C_{M_y}}{\sigma a} = -\left(\gamma \frac{2C_{M_y}}{\sigma a} \right)_{\text{аэро}} - I_{\beta a}^* (\beta_{1c} + 2\dot{\beta}_{1s}) + I_0^* (\ddot{\alpha}_y - 2\dot{\alpha}_x), \\ \gamma \frac{2C_{M_x}}{\sigma a} = \left(\gamma \frac{2C_{M_x}}{\sigma a} \right)_{\text{аэро}} - I_{\beta a}^* (\beta_{1s} - 2\dot{\beta}_{1c}) - I_0^* (\ddot{\alpha}_x + 2\dot{\alpha}_y),$$

где

$$I_{\beta a}^* = \int_0^R r \eta_{\beta} m dr / I_x \quad \text{и} \quad I_0^* = \int_0^R r^2 m dr / I_x$$

Продольная и поперечная силы несущего винта описываются выражениями

$$\begin{aligned} \gamma \frac{2C_H}{\sigma a} &= \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left(\frac{S_r}{I_x} \cos \psi_m + \frac{S_x}{I_y} \sin \psi_m \right) = \\ &= \left(\gamma \frac{2C_H}{\sigma a} \right)_{\text{аэро}} - S_{\xi_0}^* \xi_{10}^* - 2M_{\lambda}^* \ddot{\alpha}_{\text{вт}} \\ \gamma \frac{2C_Y}{\sigma a} &= \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left(\frac{S_r}{I_x} \sin \psi_m - \frac{S_x}{I_y} \cos \psi_m \right) = \\ &= \left(\gamma \frac{2C_Y}{\sigma a} \right)_{\text{аэро}} + S_{\xi_0}^* \xi_{10}^* - 2M_{\lambda}^* \ddot{\alpha}_{\text{вт}} \end{aligned}$$

Наконец, крутящий момент равен

$$\gamma \frac{C_Q}{\sigma a} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{N_L}{I_L} = \left(\gamma \frac{C_Q}{\sigma a} \right)_{\text{аэро}} - I_{\xi_0}^* \xi_{10}^* + I_0^* \ddot{\alpha}_{\text{вт}}$$

Единственными инерционными добавлениями к тяге и продольной и поперечной силам являются реакции общей массы винта на линейные ускорения. Моменты на втулке представляют собой реакции всего винта на угловые ускорения.

Связь между несущим винтом и невращающейся системой координат осуществляется посредством фурье-преобразования координат. Во вращающейся системе движение вала винта проявляется в виде периодических коэффициентов в уравнениях движения, которые исчезают при переходе к невращающейся системе координат. Суммирование сил у комля лопасти для получения суммарных реакций втулки, естественно, ведет к рассмотрению степеней свободы винта в невращающихся осях. Связь между винтом и невращающейся системой ограничена, поскольку степени свободы винта в невращающихся осях определяют движение винта в целом; в отдельных случаях это выражается в связи только некоторых параметров движения вала и сил на втулке. В частности, наклон плоскости концов лопастей происходит только при движениях вала по тангажу и крену и связан с моментами тангажа и крена на втулке. Циклические изменения углов отставания лопастей, вызывающие смещение центра масс винта в плоскости вращения, связаны с перемещениями втулки и силами на ней в плоскости вращения. Изменение угла конусности появляется при вертикальном перемещении вала и изменении силы тяги, а общий угол отставания — при изменениях угла рыскания и крутящего момента винта. Наконец, безреакционные тоны винта вообще не связаны с движением вала и силами на втулке. В условиях осевого потока имеются некоторые дополнительные взаимосвязи из-за аэродинамических сил, но движение все же разделяется на

вертикальное ($z_{вт}$ и α_z), продольно-поперечное ($x_{вт}$, $y_{вт}$, α_x и α_y) и безреакционные тоны. При полете вперед аэродинамические силы связывают все степени свободы вертолета, но возможность разделения движений остается важнейшей характеристикой анализа.

Влияние движения вала имеет отличия в случае двухлопастного винта с общим ГШ из-за отсутствия циклических степеней свободы. В этом случае уравнения для β_{1c} и β_{1s} заменяются уравнением для угла поворота в общем ГШ, которое с учетом движения вала имеет вид

$$I_{\beta}^* (\ddot{\beta}_1 + v_{\beta}^2 \dot{\beta}_1) - I_{\beta\zeta}^* 2\beta_{\text{вал}} \dot{\zeta}_1 + I_{\beta\alpha}^* [(\ddot{\alpha}_x + 2\ddot{\alpha}_y) \sin \psi - (\ddot{\alpha}_y - 2\ddot{\alpha}_x) \cos \psi] = \gamma M_{F\beta}.$$

Аналогично уравнение для полуразности ζ_1 углов качания заменяет уравнения для ζ_{1c} и ζ_{1s} :

$$I_{\zeta}^* (\ddot{\zeta}_1 + v_{\zeta}^2 \dot{\zeta}_1) + I_{\beta\zeta}^* 2\beta_{\text{вал}} \dot{\beta}_1 + S_{\zeta}^* (\ddot{x}_{вт} \sin \psi - \ddot{y}_{вт} \cos \psi) = \gamma M_{L\zeta}.$$

Уравнения движения для β_0 и ζ_0 , приведенные выше, справедливы и в случае $N \geq 3$, и для двухлопастного винта, как и результаты для тяги и крутящего момента винта. В выражения сил на втулке в плоскости вращения (разд. 9.5.2) необходимо добавить инерционную реакцию на ускорение вала:

$$\Delta \left(\gamma \frac{2C_H}{\sigma a} \right) = - 2M_{L\beta}^* \ddot{x}_{вт},$$

$$\Delta \left(\gamma \frac{2C_Y}{\sigma a} \right) = - 2M_{L\zeta}^* \ddot{y}_{вт}.$$

Моменты тангажа и крена на двухлопастном несущем винте были выражены через углы поворота плоскости концов лопастей и поэтому не изменяются; движение вала влияет на моменты на втулке через решение для β_1 . Наиболее важная особенность двухлопастного винта — появление периодических коэффициентов в уравнениях в невращающейся системе координат для сил на втулке при движениях вала в связи с отсутствием осевой симметрии этого винта. В результате анализ динамики двухлопастного винта существенно отличается от такового для винтов с тремя или более лопастями.

При анализе устойчивости и управляемости вертолетов (как и самолетов) наиболее часто применяется связанная система координат. В связанной системе координатные оси жестко связаны с фюзеляжем при его возмущенном движении, тогда как инерциальная система координат неподвижна в пространстве. Поскольку установившаяся скорость вертолета определена относительно связанных осей, при их повороте будет менять направление и вектор скорости, что приводит к появлению центробеж-

ного ускорения в инерциальной системе координат:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{ин} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{св} + \dot{\alpha} \times v.$$

Чтобы использовать результаты, полученные в этом разделе для движения вала, нужно знать ускорения втулки в инерциальном пространстве. Составляющие скорости несущего винта в установившемся полете равны μ в плоскости диска и $\mu \operatorname{tg} \alpha$ в плоскости, нормальной к диску. Инерциальные ускорения, выраженные через параметры движения вертолета в связанной системе координат, равны:

$$\begin{aligned}(\bar{x}_{вт})_{ин} &= (\bar{x}_{вт} + \dot{\alpha}_y \mu \operatorname{tg} \alpha)_{св}, \\(\bar{y}_{вт})_{ин} &= (\bar{y}_{вт} - \dot{\alpha}_z \mu - \dot{\alpha}_x \mu \operatorname{tg} \alpha)_{св}, \\(\bar{z}_{вт})_{ин} &= (\bar{z}_{вт} + \dot{\alpha}_y \mu)_{св}.\end{aligned}$$

На режиме висения, когда установившаяся скорость вертолета равна нулю, между инерциальными и связанными осями нет разницы с точки зрения учета инерционных сил. Выражения для аэродинамических сил, вызванных движением вала винта, зависят от выбора системы координат (см. разд. 11.6).

9.7. СВЯЗАННЫЕ МАХОВОЕ, ВРАЩАТЕЛЬНОЕ И КРУТИЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ЛОПАСТИ

Задачей настоящей главы является исследование основ динамики вращающейся лопасти, и модели, рассмотренные здесь, не более сложны, чем необходимо для решения этой задачи. Однако имеются несущие винты и проблемы, для анализа которых полученных здесь уравнений недостаточно.

В настоящей главе уже был приведен ряд замечаний, касающихся потребности в более совершенном анализе; соответствующие указания будут даны и ниже. В частности, необходимо дальнейшее развитие анализа в направлении учета полностью взаимосвязанного движения изгиба в двух плоскостях, установочного движения и кручения лопасти. Имеются и другие степени свободы, учет которых может потребоваться, например поворот двухлопастного винта в общем ГШ и изменение частоты вращения винта. Во многих случаях необходим учет детальных геометрических, инерционных и упругих характеристик несущего винта, например упругости участка лопасти, внутреннего относительно ОШ, или стреловидности части лопасти, внешней относительно ОШ. Наиболее часто потребность в более совершенном анализе динамики появляется при проектировании бесшарнирных несущих винтов.

Вывод уравнений связанного движения лопасти с учетом изгиба в двух плоскостях и кручения является длительным и

сложным. Количество взаимосвязей, подлежащих учету, увеличивается по меньшей мере пропорционально квадрату числа степеней свободы, а многие из этих взаимосвязей существенно нелинейны. Более того, динамика вертолета все еще является объектом исследования с точки зрения полного определения того, какие силы следует учитывать и какие аппроксимации еще могут быть приняты. Вопросы, связанные с более полными уравнениями движения, здесь не рассматриваются; с ними можно ознакомиться по литературе [А.43, Р.66, Н.100, J.50] и ссылкам в гл. 12 и 14.

9.8. ИЗГИБНЫЕ ТОНЫ ЛОПАСТИ НЕСУЩЕГО ВИНТА

9.8.1. ТЕОРИЯ УПРУГОЙ БАЛКИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАКРУЧЕННОЙ ЛОПАСТИ

Изменение угла установки и крутка лопасти вводят упругую связь между изгибом в плоскостях взмаха и вращения. Свободные колебания вращающейся лопасти в поле центробежных сил происходят одновременно в плоскостях взмаха и вращения, что существенно влияет на динамику несущего винта. В связи с этим в теории упругой балки применительно к лопасти несущего винта необходимо учесть влияние изменения углов установки и крутки. Задача состоит в определении связи изгибающих моментов, действующих в сечении лопасти, с изгибными деформациями. В модели будет включено и упругое кручение лопасти. Этот анализ основан на работе [Н.159].

Предположим, что упругая линия недеформированной лопасти является прямой и что лопасть имеет большое удлинение, позволяющее применить теорию упругой балки. На рис. 9.11 показана рассматриваемая схема лопасти. Координата r отсчитывается вдоль радиуса лопасти от оси вращения. Сечение лопасти имеет главные оси x и z с началом координат, совпадающим с осью жесткости. Тогда по определению $\int xzE dA = 0$. Заметим, что весовой функцией в этом интеграле служит модуль упругости. Назовем центром растяжения точку, лежащую на оси x , на расстоянии x_c от оси жесткости, определяемом интегралами $\int zE dA = 0$ и $\int xE dA = x_c \int E dA$. Угол между главной осью сечения x и плоскостью вращения представляет собой угол установки лопасти θ . Существование оси жесткости означает, что кручение относительно этой оси происходит без изгиба лопасти. Таким образом, составляющими угла установки являются угол установки комлевого сечения θ_0 , конструктивная крутка $\theta_{кр}$ и упругий поворот сечения θ_e : $\theta = \theta_0 + \theta_{кр} + \theta_e$. Крутка $\theta_{кр}$ изменяется с радиусом r и равна нулю у комля. Касательные

напряжения в лопасти обусловлены только деформацией θ_e . Предполагается, что θ_e мало, хотя балансирующий угол θ_0 и крутка $\theta_{кр}$ могут быть большими.

Единичными векторами в системе координат, вращающейся вместе со втулкой, являются i_l , j_l и k_l (рис. 9.11). Единичные

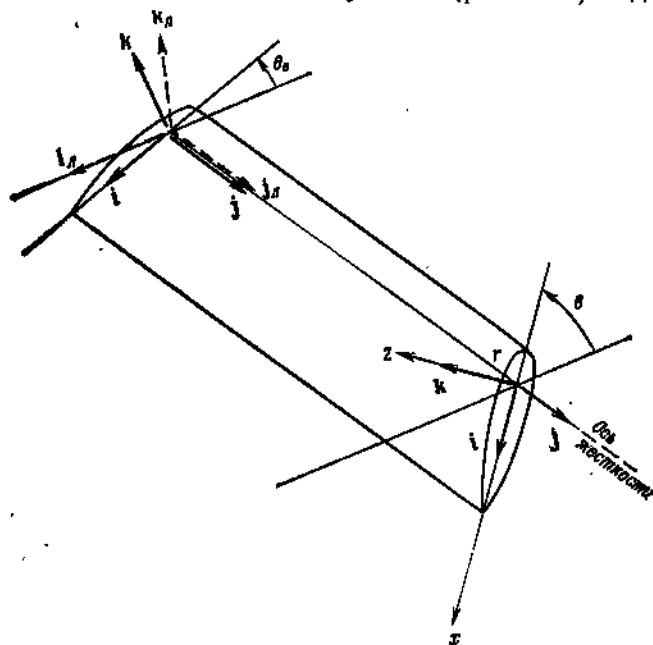


Рис. 9.11. Геометрия лопасти несущего винта, имеющей конструктивную крутку (деформации изгиба отсутствуют).

векторы в главных осях сечения i , j и k повернуты на угол θ относительно плоскости вращения, т. е.

$$i = i_l \cos \theta - k_l \sin \theta, \quad j = j_l, \quad k = i_l \sin \theta + k_l \cos \theta.$$

Отметим, что кручение в отличие от изгиба входит в определение i и k . Из определения следует, что $\partial i / \partial r = -\theta' k$ и $\partial k / \partial r = \theta' i$.

Деформация лопасти описывается отклонением оси жесткости, имеющим составляющие x_0 , r_0 и z_0 (рис. 9.12). Изгиб оси жесткости приводит к повороту сечения на углы φ_x и φ_z . Кручение θ_e уже вошло в θ . В теории упругой балки предполагается, что сечения лопасти, нормальные к оси жесткости, остаются нормальными к ней и после изгиба. Это предположение достаточно для определения деформаций всех элементов сечения. Предположим еще, что величины x_0 , r_0 , z_0 , φ_x , φ_z и θ_e малы. Единичные векторы i_{xs} , j_{xs} и k_{xs} деформированного сечения

(рис. 9.12) повернуты на углы φ_x и φ_z относительно недеформированного сечения, так что

$$i_{xs} = i + \varphi_z j, \quad j_{xs} = j - \varphi_z i + \varphi_x k, \quad k_{xs} = k - \varphi_x j.$$

Вектор j_{xs} направлен по касательной к деформированной оси жесткости. Тогда по определению $j_{xs} = dr/ds$, где $r = x_0 i + (r + r_0) j + z_0 k$ — радиус-вектор отклонения, а s — длина дуги

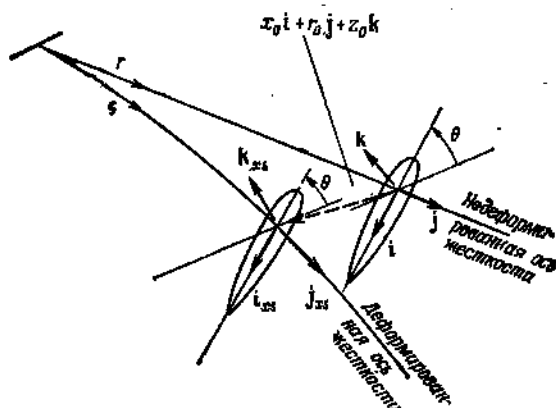


Рис. 9.12. Деформация лопасти.

вдоль деформированной оси жесткости, и в первом приближении имеем

$$\begin{aligned} j_{xs} &= j + (x_0 i + z_0 k)' = \\ &= j + (x_0' + z_0 \theta') i + (z_0' + x_0 \theta') k. \end{aligned}$$

Сравнение двух выражений для j_{xs} показывает, что углы поворота сечения равны $-\varphi_z = x_0' + z_0 \theta'$ и $\varphi_x = z_0' - x_0 \theta'$, или

$$\varphi_x i + \varphi_z k = (z_0 i - x_0 k)'.$$

Положение элемента лопасти до деформации определяется вектором $r = r j + x i + z k$, а после деформации — вектором

$$\begin{aligned} r &= (r + r_0) j + x_0 i + z_0 k + x i_{xs} + z k_{xs} = \\ &= r j + x_0 i + r_0 j + z_0 k + (x \varphi_z - z \varphi_x) j + x i + z k. \end{aligned}$$

Теперь мы пренебрежем упругим растяжением r_0 . Анализ напряжений при этом упрощается, поскольку в первом приближении $s = r$. Растяжение r_0 дает лишь равномерно распределенные напряжения в сечении, которые легко учесть впоследствии.

Фундаментальный метрический тензор g_{mn} недеформированной лопасти записывается в виде

$$(ds)^2 = dr \cdot dr = \left(\frac{\partial r}{\partial x_m} dx_m \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x_n} dx_n \right) = g_{mn} dx_m dx_n.$$

где ds — дифференциал дуги, проведенной внутри лопасти, а x_m — обобщенные криволинейные координаты. Аналогично метрический тензор G_{mn} деформированной лопасти равен

$$(dS)^2 = dr \cdot dr = \left(\frac{\partial r}{\partial x_m} dx_m \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x_n} dx_n \right) = G_{mn} dx_n dx_n.$$

Тогда тензор деформаций γ_{mn} определяется приращением $(ds)^2$ вследствие деформации, т. е.

$$2\gamma_{mn} dx_m dx_n = (dS)^2 - (ds)^2,$$

или

$$\gamma_{mn} = \frac{1}{2} (G_{mn} - g_{mn}).$$

В теории упругой балки рассматривается только осевая составляющая напряжений. В частном случае закрученной лопасти несущего винта тензор g_{mn} находят, рассматривая радиус-вектор $r = xi + rj + zk$ точек недеформированной лопасти. Осевая компонента тензора равна

$$g_{rr} = \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r} = 1 + \theta'_{кр} (x^2 + z^2).$$

Тензор G_{mn} деформированной лопасти находят по радиусу-вектору $r = (x + x_0)i + (r + x\varphi_z - z\varphi_x)j + (z + z_0)k$ и получают

$$G_{rr} = \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial r} = (1 + x\varphi'_z - z\varphi'_x)^2 + \\ + [x'_0 + \theta'(z + z_0)]^2 + [z'_0 - \theta'(x + x_0)]^2.$$

Следовательно, осевая компонента тензора деформаций равна

$$\gamma_{rr} = \frac{1}{2} (G_{rr} - g_{rr}) = \frac{1}{2} [(1 + x\varphi'_z - z\varphi'_x)^2 - 1 + (x'_0 + \theta'(z + z_0))^2 - \\ - \theta'^2_{кр} z^2 + (z'_0 - \theta'(x + x_0))^2 - \theta'^2_{кр} x^2].$$

В этой формуле можно оставить только линейную часть, т. е. положить

$$\gamma_{rr} \approx \varepsilon_{rr} = x\varphi'_z - z\varphi'_x + \theta'^2_{кр} (xx_0 + zz_0) + \\ + \theta'_{кр} [zx'_0 - xz'_0 + \theta'_e (x^2 + z^2)],$$

поскольку величины x_0 , z_0 , φ_x , φ_z и θ_e малы.

Деформация растяжения ε_r — постоянная величина, определяемая выражением $T = \int E \varepsilon_{rr} dA = \varepsilon_r \int E dA$, где T — растягивающая сила, действующая в сечении. Подставляя выражение для ε_{rr} и снова учитывая деформацию, соответствующую растяжению r_0 , получаем

$$\varepsilon_r = \varphi'_z x_c + \theta'^2_{кр} x_0 x_c - \theta'_{кр} z'_0 x_c + \theta'_{кр} \theta'_e k_p^2 - r'_0,$$

где $\int zE dA = 0$, $\int xE dA = x_C \int E dA$ и $\int (x^2 + z^2) E dA = k_p^2 \int E dA$ (k_p — взвешенный по модулю упругости радиус инерции относительно оси жесткости). Отсюда следует, что деформацию можно определить по формуле

$$e_{rr} = e_T + (x - x_C)(\varphi'_x - \theta'_{кр}\varphi_x) - z(\varphi'_x + \theta'_{кр}\varphi_x) + \theta'_{кр}\theta'_s(x^2 + z^2 - k_p^2),$$

где e_T определяется растягивающей силой.

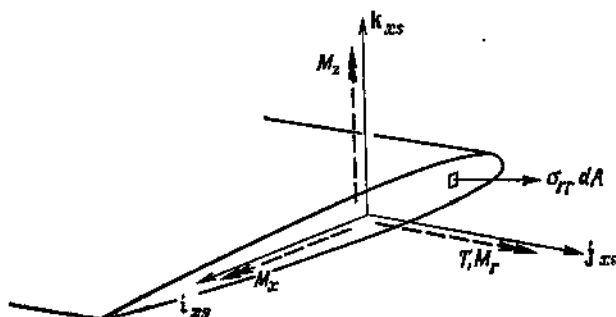


Рис. 9.13. Моменты изгиба и кручения в сечении лопасти.

В теории упругой балки предполагается, что все напряжения изгиба, за исключением осевой составляющей $\sigma_{rr} = E e_{rr}$, пренебрежимо малы. Направление σ_{rr} задано единичным вектором

$$\hat{e} = \frac{\partial r / \partial r}{|\partial r / \partial r|},$$

где r — вектор, характеризующий положение сечения после деформации (рис. 9.13). Момент в сечении относительно оси жесткости от элементарной силы $\sigma_{rr} dA$ равен

$$dM = (x i_{xs} + z k_{xs}) \times (\sigma_{rr} \hat{e}) dA = \\ = [-z i_{xs} + x k_{xs} + \theta'_{кр}(x^2 + z^2) j_{xs}] \sigma_{rr} dA.$$

Суммарный же момент, составляющие которого, показанные на рис. 9.13, равны M_x , M_z и M_r , получим путем интегрирования по сечению:

$$M_x i_{xs} + M_z j_{xs} + M_r k_{xs} = \int_{\text{сечение}} dM,$$

или

$$(M_x)_{EA} = - \int_{\text{сечение}} z \sigma_{rr} dA, \quad (M_z)_{EA} = \int_{\text{сечение}} x \sigma_{rr} dA, \\ M_r = G / \theta'_s + \int_{\text{сечение}} (x^2 + z^2) \theta'_s \sigma_{rr} dA.$$

К моменту M_r здесь добавлен момент $GJ\theta'_c$ от упругих касательных сил. При рассмотрении изгиба удобно ввести моменты относительно центра растяжения x_C :

$$M_x = - \int z \sigma_{rr} dA, \quad M_z = \int (x - x_C) \sigma_{rr} dA.$$

После подстановки выражения для σ_{rr} и интегрирования получаем моменты изгиба и кручения в виде

$$M_x = EI_{zz} (\varphi'_x + \theta' \varphi'_z) - \theta'_{кр} \theta'_c EI_{zp},$$

$$M_z = EI_{xx} (\varphi'_z - \theta' \varphi'_x) + \theta'_{кр} \theta'_c EI_{xp},$$

$$M_r = (GJ + k_p^2 T + \theta_{кр}^2 EI_{pp}) \theta'_c + \theta'_{кр} k_p^2 T + \\ + \theta'_{кр} [EI_{xp} (\varphi'_z - \theta' \varphi'_x) - EI_{zp} (\varphi'_x + \theta' \varphi'_z)],$$

где

$$EI_{zz} = \int z^2 E dA, \quad EI_{xx} = \int (x - x_C)^2 E dA,$$

$$EI_p = k_p^2 \int E dA = \int (x^2 + z^2) E dA,$$

$$EI_{xp} = \int (x - x_C)(x^2 + z^2) E dA,$$

$$EI_{zp} = \int z(x^2 + z^2) E dA, \quad EI_{pp} = \int (x^2 + z^2 - k_p^2) E dA.$$

Поскольку растягивающая сила T приложена в центре растяжения, изгибающие моменты относительно оси жесткости можно определить из их выражений относительно этого центра:

$$(M_z)_{EA} = M_z + x_C T, \quad (M_x)_{EA} = M_x.$$

Этот результат более удобно выразить с помощью векторного представления изгиба лопасти. Определим векторы изгибающего момента в сечении M и деформации в плоскостях взмаха и вращения и следующим образом:

$$M = M_x i + M_z k, \quad u = z_0 i - x_0 k.$$

Производные вектора u равны

$$u' = (z_0 i - x_0 k)' = (z'_0 - x_0 \theta') i - (x'_0 + z_0 \theta') k = \varphi_x i + \varphi_z k,$$

$$u'' = (z_0 i - x_0 k)'' = (\varphi'_x + \theta' \varphi_z) i + (\varphi'_z - \theta' \varphi_x) k.$$

Тогда моменты изгиба и кручения можно записать в виде

$$M = (EI_{xx} i i + EI_{xx} k k) (z_0 i - x_0 k)'' + \theta'_{кр} \theta'_c (EI_{xp} k - EI_{zp} i),$$

$$M_r = (GJ + k_p^2 T + \theta_{кр}^2 EI_{pp}) \theta'_c + \theta'_{кр} k_p^2 T + \\ + \theta'_{кр} (EI_{xp} k - EI_{zp} i) (z_0 i - x_0 k)'.$$

Это — результат теории упругой балки, связывающий моменты упругих сил и деформации лопасти. Для лопасти с нулевым углом установки он сводится к известным зависимостям для изолированных изгиба и кручения:

$$M_x = EI_{zz}z_0', \quad M_z = EI_{xx}x_0', \quad M_r = (GI + k_p^2 T)\theta_0'.$$

Записывая диаду жесткостей на изгиб в виде $EI = EI_{zz}ii + EI_{xx}kk$, приходим к выражению $M = EIu''$ для одного изгиба — элементарному обобщению случая нулевого угла установки. Векторная форма дает возможность значительно упростить анализ связанного изгиба в плоскостях взмаха и вращения.

В упомянутой работе [Н.159] деформации изгиба определялись в системе координат, связанной с плоскостью вращения. Полученные в ней результаты можно вывести из представленных здесь путем подстановки $u = w i_n - v k_n$. При этом

$$u'' = w'' i_n - v'' k_n = (w'' \cos \theta + v'' \sin \theta) i + (x'' \sin \theta - v'' \cos \theta) k.$$

Изгибающий момент в осях, связанных с плоскостью втулки, можно определить из соотношения $M = M_x i_n + M_z k_n$, а выражение для диады жесткостей на изгиб записывается в виде

$$\begin{aligned} EI &= EI_{zz}ii + EI_{xx}kk = \\ &= (EI_{zz} \cos^2 \theta + EI_{xx} \sin^2 \theta) i_n i_n + \\ &+ (EI_{zz} \sin^2 \theta + EI_{xx} \cos^2 \theta) k_n k_n + \\ &+ (EI_{xx} - EI_{zz}) \cos \theta \sin \theta (i_n k_n + k_n i_n). \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения в частных производных для совместных изгиба и кручения лопасти обычно получают из условий равновесия сил и моментов, действующих на элемент лопасти, лежащий между сечениями на радиусах r и $r + dr$. В системе координат, связанной с плоскостью вращения, рассмотрим перерезывающие силы, изгибающие моменты, растягивающую силу и момент кручения, действующие в сечении лопасти (рис. 9.14). На элемент лопасти действуют также распределенные силы (составляющие p_x , p_z и p_r) и моменты (составляющие q_x , q_z и q_r). Выпишем условия равновесия сил и моментов, действующих на элемент лопасти:

$$\begin{aligned} S_x' + p_x &= 0, \quad S_z' + p_z = 0, \\ T' + p_r &= 0, \quad M_x' - Tw' + S_x + q_x = 0, \\ M_z' + Tv' - S_x + q_z &= 0, \quad M_r' + S_x w' - S_z v' + q_r = 0. \end{aligned}$$

Здесь w и v — деформации изгиба в указанной системе координат. Исключая перерезывающие силы, приведем уравнения

к виду

$$\begin{aligned}M_x'' - (T\omega')' + q_x' - p_z &= 0, \\M_z'' + (T\nu')' + q_z' + p_x &= 0, \\M_r' - \omega' \int p_x dr + \nu' \int p_z dr + q_r &= 0,\end{aligned}$$

где растягивающая сила равна $T = - \int p_r dr$. Расчет на прочность дает значения моментов в сечении M_x , M_z и M_r . Распределенные силы и моменты определяются, исходя из инерцион-

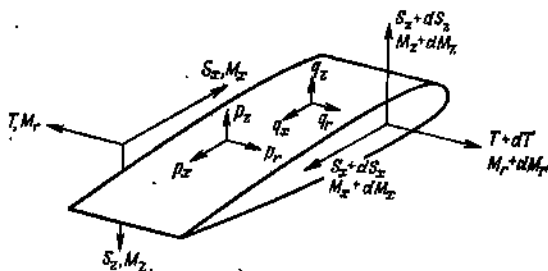


Рис. 9.14. Силы и моменты, действующие на элемент лопасти, заключенный между сечениями r и $r + dr$.

ных и аэродинамических нагрузок на лопасть. Чтобы вновь написать уравнения совместного изгиба в плоскостях вращения и взмаха, определим следующие двумерные векторы:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= M_x \mathbf{i}_l + M_z \mathbf{k}_l, \quad \mathbf{u} = \omega \mathbf{i}_l - \nu \mathbf{k}_l, \\ \mathbf{q} &= q_x \mathbf{i}_l + q_z \mathbf{k}_l, \quad \mathbf{p} = p_x \mathbf{i}_l - p_z \mathbf{k}_l.\end{aligned}$$

Тогда условие равновесия для изгиба приобретает вид

$$\mathbf{M}'' - (T\mathbf{u}')' + \mathbf{q}' - \mathbf{p} = 0.$$

Напомним, что теория упругой балки дает $\mathbf{M} = E I \mathbf{u}''$ (в отсутствие кручения), так что

$$(E I \mathbf{u}'')'' - (T\mathbf{u}')' + \mathbf{q}' - \mathbf{p} = 0$$

и есть уравнение в частных производных для изгиба лопасти.

9.8.2. УРАВНЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Уравнение собственных колебаний для изгиба в двух плоскостях закрученной вращающейся лопасти получается из условий равновесия упругих, инерционных и центробежных изгибающих моментов. В предыдущем разделе было выведено

следующее дифференциальное уравнение в частных производных для изгиба:

$$(EIu''')' - (Tu')' + q' - p = 0,$$

где EI — диада жесткости на изгиб, а $u = z_0i - x_0k$ — вектор перемещения. Теперь необходимо определить центробежную и инерционную составляющие растягивающей силы и распределенные нагрузки на лопасть. В уравнение собственных колебаний входят только члены, связанные с деформациями изгиба.

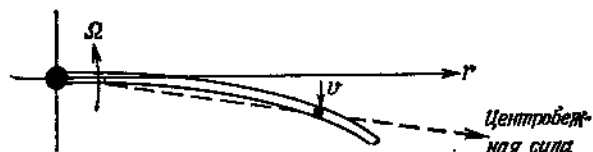


Рис. 9.15. Составляющая центробежной силы в плоскости вращения, вызывающая появление в сечении лопасти момента в плоскости вращения.

Растяжение обусловлено центробежной силой $T = \Omega^2 \int_r^R \rho m dr$.

Ускорения в плоскостях взмаха и вращения создают инерционную силу $p = -m\ddot{u}$, действующую в сечении. Центробежная сила $m\Omega^2\rho$ имеет в плоскости вращения составляющую $m\Omega^2\rho(v/\rho)$ вследствие смещения v (рис. 9.15). Таким образом, полный момент в плоскости вращения в сечении на радиуса r

равен $q_z = - \int_r^R m\Omega^2 v dr$. Отсюда $q' = -k_n \Omega^2 m k_n w = -\Omega m \Omega w$,

где $\Omega = \Omega k_n$. Теперь дифференциальное уравнение в частных производных для вращающейся лопасти запишем в виде

$$\begin{aligned} & [(EI_{zz}ii + EI_{xx}kk)(z_0i - x_0k)''']' - \\ & - \Omega^2 \left[\int_r^R \rho m dr (z_0i - x_0k)' \right]' - \\ & - \Omega m \Omega (z_0i - x_0k) + m (z_0i - x_0k)'' = 0. \end{aligned}$$

Для более детального ознакомления с выводом этого уравнения см. работы [Н.159, Н.100, J.40].

Используя метод разделения переменных, запишем деформацию изгиба в виде $z_0i - x_0k = \eta(r)e^{i\Omega t}$. В результате получаем следующее уравнение для векторной формы тона:

$$(EI\eta''')' - \Omega^2 \left(\int_r^R \rho m dr \eta' \right)' - \Omega m \Omega \eta - m v^2 \eta = 0,$$

которое представляет собой уравнение свободных совместных изгибных колебаний вращающейся лопасти в плоскостях взмаха и вращения. Для лопасти с нулевым углом установки и без крутки это векторное уравнение распадается на два уравнения для отклонений только в плоскости взмаха (η_z) и только в плоскости вращения (η_x):

$$(EI_{xx}\eta_z)'' - \Omega^2 \left(\int_r^R \rho m dr \eta_z' \right)' - m v_z^2 \eta_z = 0,$$

$$(EI_{xx}\eta_x)'' - \Omega^2 \left(\int_r^R \rho m dr \eta_x' \right)' - m (\Omega^2 + v_x^2) \eta_x = 0,$$

которые были получены в разд. 9.2.2 и 9.3.2. Имеем следующие граничные условия:

на конце лопасти ($r = R$), где нет касательных сил и момента, $EI\eta'' = (EI\eta'')' = 0$;

у комля шарнирной лопасти ($r = e$ с учетом разнеса ГШ) отклонение равно нулю ($\eta = 0$), а момент равен моменту пружины ГШ $EI\eta'' = K_s \eta'$ (K_s — диада жесткости пружины);

у комля бесшарнирной лопасти ($r = e$ в предположении очень жесткой втулки) отклонение и угол поворота равны нулю, $\eta = \eta' = 0$.

Задача решения уравнений свободных колебаний при указанных граничных условиях представляет собой стандартную задачу Штурма—Лиувилля о собственных значениях (см. разд. 9.1). Решение этой задачи дает форму $\eta_k(r)$ и соответствующие собственные значения v_k^2 . Тоны ортогональны с весом

m , так что $\int_e^R \eta_i \cdot \eta_k m dr = 0$, если $i \neq k$. Собственные частоты

v_k могут быть найдены по формам тонов с использованием энергетического соотношения

$$v^2 = \frac{\eta'(e) K_s \eta'(e) + \int_e^R \left[\eta'' EI \eta'' + \Omega^2 \int_r^R \rho m dr \eta'^2 - m (\Omega \cdot \eta)^2 \right] dr}{\int_e^R \eta^2 m dr}.$$

Эта формула дает оценки собственных частот по приближенным формам тонов. Заметим, что для учета отнеса ГШ e можно заменить переменную r таким образом, чтобы она равнялась нулю в ГШ, а не в центре втулки. Тогда центробежная растя-

вычисляемая сила вычисляется по формуле $T = \Omega^2 \int_0^{R-e} (\rho + e) m dr$, учитывающей второстепенное влияние e .

Для вычисления форм тонов и собственных частот колебаний вращающейся лопасти часто используют метод Хольцера — Миклестада. Можно использовать также метод Галеркина или метод конечных элементов.

9.8.3. СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Для собственной частоты совместных изгибных колебаний вращающейся лопасти в плоскостях взмаха и вращения имеется выражение

$$v^2 = K_1 + K_2 \Omega^2,$$

где K_1 и K_2 — коэффициенты Саутвелла, учитывающие жесткость конструкции лопасти и жесткость за счет центробежных сил соответственно

$$K_1 = \left[\eta'(e) K_e \eta'(e) + \int_e^R \eta'' E I \eta'' dr \right] / \left(\int_e^R \eta^2 m dr \right),$$

$$K_2 = \left[\int_e^R \eta'^2 \int_e^R \rho m dr - \int_e^R (\eta \cdot k_{\pi})^2 m dr \right] / \left(\int_e^R \eta^2 m dr \right).$$

Приведенное выше выражение было получено в 1921 г. Саутвеллом и Гоу [S.159] из энергетической формулы Рэлея. На

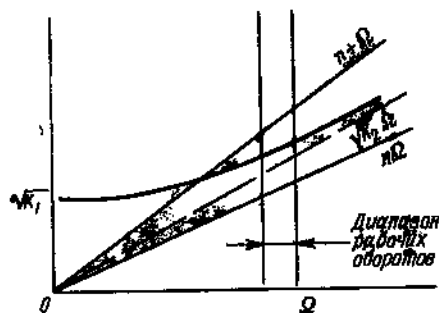


Рис. 9.16. Резонансная диаграмма лопасти.

рис. 9.16 показано изменение собственной частоты в зависимости от угловой скорости вращения винта. Во избежание резонанса собственные частоты лопасти должны не быть кратными частоте вращения винта, поэтому на график обычно наносят линии $v = n\Omega$ и называют его резонансной диаграммой лопасти. В пределе, при $\Omega = 0$, собственная частота лопасти равна $v^2 = K_1$. Следовательно, для невращающейся лопасти частота, обусловленная только собственной ее упругостью, равна $\sqrt{K_1}$.

В предельном случае большого значения Ω частота лопасти приближается к значению $(v/\Omega)^2 = K_2$. Следовательно, $\sqrt{K_2}$ — без-

размерная (отнесенная к частоте вращения) собственная частота лопасти при высоких оборотах винта, обусловленная центробежными силами. В действительности, поскольку формы тонов сами зависят от частоты вращения, коэффициенты Саутвелла, строго говоря, не являются постоянными. Тем не менее формула Саутвелла отражает относительное влияние упругих и центробежных сил.

Рассмотрим предельный случай нулевой собственной жесткости, которому соответствует минимально возможное значение собственной частоты лопасти, обусловленное только жесткостью от центробежных сил. При $EI = 0$ уравнение собственных колебаний приобретает вид

$$\left(\int_0^1 \rho m dr \eta' \right)' + m k_n k_d \cdot \eta + m v^2 \eta = 0$$

и разделяется на два уравнения изгиба в плоскости взмаха и в плоскости вращения:

$$\left(\int_0^1 \rho m dr \eta'_s \right)' + m v_s^2 \eta_s = 0,$$

$$\left(\int_0^1 \rho m dr \eta'_x \right)' + m (v_x^2 + 1) \eta_x = 0.$$

Видно, что без собственной жесткости взаимосвязь движений изгиба исчезает. Движения в плоскостях взмаха и вращения приобретают одинаковую форму, а собственные частоты определяются зависимостью $v_{\text{III}}^2 = 1 + v_{\text{вн}}^2$. Это особый случай, поскольку отбрасывание собственной жесткости понижает порядок уравнений. Для малого EI граничные условия удовлетворяются на небольших участках вблизи конца лопасти. Для $EI = 0$ необходимо учитывать два граничных условия на конце. При равномерном распределении масс уравнение для η сводится к уравнению Лежандра

$$[(1 - r^2) \eta']' + 2v^2 \eta = 0.$$

Решения, удовлетворяющие граничным условиям и являющиеся конечными на конце лопасти, суть полиномы Лежандра нечетных порядков, т. е. $\eta_k(r) = P_{2k-1}(r)$, с собственными значениями $v_k^2 = k(2k-1)$. Эти полиномы можно получить из выражения

$$P_k = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dr^k} (r^2 - 1)^k,$$

которое дает $\eta_1 = P_1 = r$, $\eta_2 = P_3 = \frac{1}{2}(5r^3 - 3r)$ и т. д. Соответствующие частоты равны для махового движения $v_1 = 1$, $v_2 = 2,45$ и $v_3 = 3,87$ и для движения в плоскости вращения

$v_1 = 0$, $v_2 = 2,24$ и $v_3 = 3,74$. Для третьего и высших тонов кривизна достаточно велика, и собственная жесткость становится доминирующей в решении, начиная с v_3 (или даже с v_2 для движения в плоскости вращения).

Для шарнирных несущих винтов основными тонами являются движения жесткой лопасти в шарнирах. Эти тоны не связаны между собой. Энергетическое соотношение дает хорошую оценку собственных частот с использованием формы $\eta = (r - e)/(1 - e)$. Для второго и следующих тонов собственная жесткость играет все более важную роль, а крутка лопасти связывает изгиб в плоскости взмаха с изгибом в плоскости вращения. Вообще говоря, крутка не должна сильно влиять на собственные частоты, если только она не связывает два тона, имеющие близкие частоты. Если точная форма первого упругого тона неизвестна, то хорошим приближением может служить $\eta = 4r^2 - 3r$.

Основные тоны бесшарнирной лопасти определяются упругим изгибом у комля. Центробежные силы создают жесткость всегда в плоскости, проходящей через ось вала, главная же ось собственной жесткости определяется углом установки лопасти. Только при нулевом угле установки свободные колебания изгиба лопасти в двух плоскостях не связаны между собой. Угол установки корневого сечения лопасти вводит существенную взаимосвязь основных тонов изгиба. Для многих бесшарнирных винтов, особенно жестких в плоскости вращения, жесткость от центробежных сил доминирует в маховом движении, а собственная жесткость — в движении в плоскости вращения. Даже небольшие углы установки ($5-10^\circ$) сильно влияют на тоны. Нежесткие в плоскости вращения лопасти близки к лопастям с настройкой по жесткости вблизи комля, что ослабляет связь, вызванную общим шагом. Центробежные силы доминируют в основных тонах взмаха и движения в плоскости вращения для внешних частей лопасти. Следовательно, во внешних частях изгиб мал, а влияние крутки невелико по сравнению с влиянием угла установки комлевого сечения. Для высших тонов изгиба роль собственной жесткости сильно возрастает, и крутка в большей мере, чем угол установки у комля, влияет на форму тона.

9.8.4. ЛИТЕРАТУРА

Собственные колебания вращающейся лопасти рассматриваются в работах: [S.159, P.86, K.20, H.155, S.115, M.147, D.32, Y.12, H.159, T.34, B.146, I.5, I.6, C.100, J.73, W.88, L.93, W.2, P.66, G.70, Y.20, Y.21, R.20, S.3, P.49, R.84, B.133, B.134, D.70, J.39, J.40, K.13, T.58, B.55, D.71, H.105, W.75, K.38, L.28, M.166, M.167, D.72, G.81, M.34, W.90, C.15, G.42, W.38].

9.9. К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

При выведении уравнений движения лопасти несущего винта в этой главе использовались интегральные уравнения Ньютона; на их основе получены дифференциальные уравнения в частных производных для изгиба или кручения лопасти, которые далее разлагались по собственным формам и частотам с целью получения обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальных координатах. Выбор такого подхода обусловлен большей его наглядностью, поскольку он требует непосредственного учета сил и ускорений на лопасти. Для вывода уравнений движения, необходимых при анализе динамики несущего винта, часто применяют и другие методы. Для пояснения того, что может встретиться в литературе, в настоящую главу введен краткий обзор альтернативных методов.

Динамику несущего винта часто анализируют, основываясь на уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i,$$

где T и U — кинетическая и потенциальная энергии системы в целом, q_i — обобщенные координаты (степени свободы) и Q_i — обобщенные силы. Обычно в T входят силы инерции, в U — упругие силы, а в Q_i — аэродинамические силы. Вывод уравнений движения с помощью уравнений Лагранжа достаточно прост (хотя довольно трудоемок). Он часто используется при анализе наиболее сложных моделей винта, встречающихся в литературе.

Для иллюстрации различных методов вывода уравнений рассмотрим консольно закрепленную балку (рис. 9.17), нагруженную распределенной нагрузкой $p(r)$, а также силой F_K и моментом M_K на конце. Продольная координата обозначена r , деформация изгиба — z . Принято, что балка не вращается, поскольку здесь рассматриваются методы анализа, а не поведение лопасти. Поставим задачу получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (с временем в качестве аргумента), описывающих движение изгиба $z(r, t)$ консольной балки.

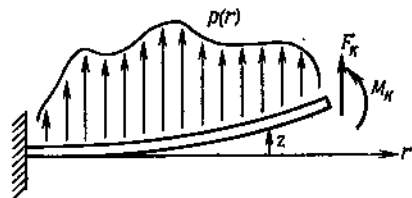


Рис. 9.17. Изгиб невращающейся консольной балки.

9.9.1. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПОДХОД ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ НЬЮТОНА

Уравнения движения по этому методу получаются из условий равновесия сил, действующих на тело. Момент в сечении r

складывается из концевой момента M_k , момента от концевой силы F_k на плече $(R-r)$ и момента от распределенной нагрузки $(p-m\ddot{z})$, определяемого интегралом по внешней относительно r части лопасти:

$$M(r) = \int_r^R (p - m\ddot{z})(\rho - r) d\rho + M_k + (R - r)F_k.$$

Приравнивая $M(r) = Elz''$ в соответствии с теорией упругой балки и дважды дифференцируя, получаем искомое дифференциальное уравнение в частных производных для изгиба:

$$(Elz'')'' + m\ddot{z} = p.$$

Для полной постановки задачи нужны еще граничные условия. Оценка величин $M(r)$ и $M'(r)$ на конце дает условия $Elz'' = M_k$ и $(Elz'')' = -F_k$ при $r = R$. При $r = 0$ для консольной балки $z = z' = 0$.

9.9.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ НЬЮТОНА

Уравнение движения также может быть получено из условий равновесия сил и моментов, действующих на элемент балки, лежащий между сечениями r и $r + dr$. Пусть S и M — перерезывающая сила и момент в сечении r , а $S + dS = S + S'dr$ и $M + dM = M + M'dr$ — реакции в сечении $r + dr$. Условие равновесия сил на элементе балки записывается в виде

$$p dr + (S + S'dr) - S = m\ddot{z} dr,$$

или $p + S' = m\ddot{z}$.

Для равновесия моментов имеем

$$(M + M'dr) - M + S dr = 0,$$

или $M' + S = 0$.

Исключение силы S дает уравнение в частных производных

$$M'' + m\ddot{z} = p,$$

которое при $M = Elz''$ приобретает вид

$$(Elz'')'' + m\ddot{z} = p.$$

9.9.3. МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ТОНАМ КОЛЕБАНИИ

В настоящей главе для получения обыкновенных дифференциальных уравнений движения использовалось разложение деформации изгиба в ряд собственных форм и частот. Рассмотрим консольную балку без силы и момента на конце. Дифференци-

альное уравнение ее свободных колебаний записывается в виде $(EIz'')'' + m\ddot{z} = 0$. Если предположить, что $z = \eta(r)e^{ivt}$, то получим уравнение собственных форм и частот в виде $(EI\eta'')'' - v^2m\eta = 0$ с граничными условиями $\eta = \eta' = 0$ при $r = 0$ и $\eta'' = \eta''' = 0$ при $r = R$. Это стандартная задача Штурма — Лиувилля, приводящая к ряду собственных форм η_k и собственных значений v_k^2 . Формы ортогональны с весом m , так

что $\int_0^R \eta_i \eta_k m dr = 0$ при $i \neq k$. Теория Штурма — Лиувилля дает также собственные значения:

$$v^2 = \int_0^R EI \eta''^2 dr / \int_0^R \eta^2 m dr.$$

Наконец, теория Штурма — Лиувилля показывает, что ряд по формам η_k , в который разлагается решение, сходится.

Деформацию изгиба также можно представить в виде ряда по формам свободных колебаний:

$$z(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(r) q_k(t),$$

где q_k — степень свободы k -го тона. Подстановка этого разложения в дифференциальное уравнение в частных производных дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(EI\eta_k'')'' q_k + m\eta_k \ddot{q}_k] = p.$$

Используя уравнение, которому удовлетворяет η_k , заменяем член, учитывающий упругость, его выражением через собственную частоту:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [m\eta_k (\ddot{q}_k + v_k^2 q_k)] = p.$$

Применяя операторы $\int_0^R (\dots) \eta_k dr$ и используя ортогональность форм, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение изгибных колебаний по k -му тону:

$$\left(\int_0^R \eta_k^2 m dr \right) (\ddot{q}_k + v_k^2 q_k) = \int_0^R \eta_k p dr.$$

Заметим, что это уравнение можно записать в виде

$$\left(\int_0^R \eta_k^2 m dr \right) \ddot{q}_k + \left(\int_0^R EI \eta_k''^2 dr \right) q_k = \int_0^R \eta_k p dr,$$

если используется энергетическое выражение для v_k^2 . При использовании ортогональных форм свободных колебаний упругие и инерционные силы в уравнениях движения не связаны.

Ограничение, присущее данному методу, заключается в том, что поскольку каждый из тонов удовлетворяет однородному граничному условию, ему же должно удовлетворять и решение z . Таким образом, в этом методе невозможен непосредственный учет силы и момента на конце лопасти.

§ 9.4. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

В этом методе также используется разложение деформации изгиба по ортогональным формам для получения обыкновенных дифференциальных уравнений движения, но эти формы не обязательно являются нормальными формами свободных колебаний. Положим $z = \sum_k \eta_k(r) q_k(t)$, где q_k — обобщенные координаты, а η_k — ряд форм. Требуется, чтобы каждая форма η_k удовлетворяла граничным условиям у комля, а полное отклонение z — граничным условиям на конце лопасти. Решение удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(EIz'')'' + m\ddot{z} = p.$$

Решение Галеркина, вообще говоря, не удовлетворяет уравнению точно, поскольку используется конечное число тонов. В связи с этим можно определить невязку:

$$\varepsilon = p - (EIz'')'' - m\ddot{z}.$$

Уравнения движения получают из условия малости невязки ε , а именно из условия $\int_0^R \eta_i \varepsilon dr = 0$. При подстановке ε и разложении z по собственным тонам имеем

$$\sum_k \int_0^R m \eta_i \eta_k dr \ddot{q}_k + \sum_k \int_0^R \eta_i (EI \eta_k'')'' dr q_k = \int_0^R \eta_i p dr.$$

Далее, дважды интегрируя по частям и учитывая граничные условия, можно записать

$$\begin{aligned} \sum_k \int_0^R \eta_i \left(EI \dot{\eta}_k \right)' dr q_k &= \\ &= \sum_k \left[\eta_i \left(EI \dot{\eta}_k \right)' q_k - \eta_i' \left(EI \dot{\eta}_k \right) q_k \right]_0^R + \sum_k \int_0^R EI \dot{\eta}_i \dot{\eta}_k'' dr q_k = \\ &= [\eta_i (EI z') - \eta_i' (EI z'')]_0^R + \sum_k \int_0^R EI \dot{\eta}_i \dot{\eta}_k'' dr q_k = \\ &= -\eta_i(R) F_x - \eta_i'(R) M_x + \sum_k \int_0^R EI \dot{\eta}_i \dot{\eta}_k'' dr q_k. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение движения для i -го тона имеет вид

$$\sum_k M_{ik} \ddot{q}_k + \sum_k K_{ik} q_k = \int_0^R \eta_i p dr + \eta_i(R) F_x + \eta_i'(R) M_x,$$

где $M_{ik} = \int_0^R \eta_i \eta_k m dr$ и $K_{ik} = \int_0^R EI \dot{\eta}_i'' \dot{\eta}_k'' dr$. Разложение по нормальным формам дает аналогичный результат. В методе Галеркина матрицы масс и жесткостей не являются диагональными, поскольку не обязательно использование тонов свободных колебаний, но зато можно учесть силу и момент на конце лопасти. Метод Галеркина эквивалентен методу Рэлея — Ритца, рассматриваемому ниже, при надлежащем выборе весовой функции в интеграле невязки (η_i в данном случае). Метод Рэлея — Ритца имеет более строгую физическую и математическую основу, зато метод Галеркина допускает использование уравнений Ньютона для получения уравнений движения.

Отметим, что если в методе Галеркина используются формы свободных колебаний, то матрицы масс и жесткостей диагональны, и уравнения движения приобретают вид

$$\left(\int_0^R \eta_k^2 m dr \right) (\ddot{q}_k + v_k^2 q_k) = \int_0^R \eta_k p dr + \eta_k(R) F_x + \eta_k'(R) M_x.$$

Этот же результат был получен методом разложения по нормальным формам, но без учета нагрузок на конце лопасти. Таким образом, уравнения движения несущего винта могут быть получены методом разложения по нормальным формам, а затем могут быть учтены сосредоточенные нагрузки на лопасти

методом Галеркина. Такой подход полезен, например, при исследовании влияния демпфера ВШ или силы и момента от системы управления в ОШ.

9.9.5. МЕТОД ЛАГРАНЖА

В методе Лагранжа уравнения движения получают из энергетических соображений, а не из условия равновесия сил. Согласно принципу Гамильтона, движение динамической системы определяется условием

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0,$$

где T — кинетическая энергия системы, U — потенциальная энергия, а δW — виртуальная работа неконсервативных сил. Поскольку для консервативной системы критерием является минимальное значение интеграла $\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt$, этот принцип также называется *принципом наименьшего действия*.

Для консольной балки кинетическая и потенциальная энергии равны соответственно

$$T = \int_0^R \frac{1}{2} m \dot{z}^2 dr, \quad U = \int_0^R \frac{1}{2} Elz''^2 dr,$$

а виртуальная работа распределенных сил и нагрузок на конце дается выражением

$$\delta W = M_x \delta z'(R) + F_x \delta z(R) + \int_0^R p \delta z dr.$$

Согласно принципу Гамильтона,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^R (p - m\ddot{z} - (Elz''')') \delta z dr + (-Elz'' + M_x) \delta z'(R) + ((Elz'')' + F_x) \delta z(R) \right] dt = 0.$$

(Члены, соответствующие кинетической энергии, необходимо интегрировать по частям во времени, а соответствующие потенциальной энергии — дважды по частям по радиусу.) Поскольку вариация δz произвольна, можно записать

$$(Elz''')' + m\ddot{z} = p, \quad (Elz'')|_{r=R} = M_x, \quad (Elz')|_{r=R} = -F_x.$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение в частных производных для изгиба балки и граничные условия на конце. Далее, по желанию, можно использовать метод разложения по нормальным формам или метод Галеркина.

9.9.6. МЕТОД РЭЛЕЯ — РИТЦА

Если энергия и виртуальная работа выражены через обобщенные координаты q_i , то

$$T = T(q_i, \dot{q}_i), \quad U = U(q_i), \quad \delta W = \sum_i Q_i \delta q_i.$$

Применение принципа Гамильтона приводит к уравнениям Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i.$$

С помощью уравнений Лагранжа обыкновенные дифференциальные уравнения движения лопасти в обобщенных координатах получаются непосредственно из выражений для энергии системы без использования дифференциального уравнения в частных производных.

Рассмотрим разложение $z = \sum_k \eta_k q_k$ деформации изгиба по ортогональным формам, как в методе Галеркина. Подстановка этого разложения дает следующие выражения для энергии и виртуальной работы через обобщенные координаты:

$$T = \sum_i \sum_k \frac{1}{2} \int_0^R \eta_i \eta_k m dr \dot{q}_i \dot{q}_k = \sum_i \sum_k \frac{1}{2} M_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k,$$

$$U = \sum_i \sum_k \frac{1}{2} \int_0^R EI \eta_i'' \eta_k'' dr q_i q_k = \sum_i \sum_k \frac{1}{2} K_{ik} q_i q_k,$$

$$\delta W = \sum_i Q_i \delta q_i = \left[\int_0^R \eta_i p dr + \eta_i(R) F_k + \eta_i'(R) M_k \right] \delta q_i.$$

Если эти выражения в свою очередь подставить в уравнения Лагранжа, то получаются уравнения

$$\sum_i M_{ik} \ddot{q}_k + \sum_k K_{ik} q_k = \int_0^R \eta_i p dr + \eta_i(R) F_k + \eta_i'(R) M_k,$$

которые идентичны полученным с помощью метода Галеркина.

9.9.7. МЕТОДЫ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

В методах сосредоточенных параметров или конечных элементов реальная физическая система с распределенными параметрами заменяется ее моделью в виде совокупности дискретных элементов. Например, рассмотренная здесь консольная балка представляется в виде конечного числа сосредоточенных масс, расположенных в ряде точек и соединенных между собой невесомыми упругими элементами с одинаковыми свойствами. При этом уравнения движения обычно получают методом Лагранжа. Важнейшим преимуществом методов конечных элементов является их гибкость, позволяющая применять их при анализе сложных конструкций. Таким образом, при исследовании новой системы проблема заключается в выборе для нее наиболее подходящей модели с сосредоточенными параметрами, а не в разработке совершенно нового метода анализа.

Аэродинамика несущего винта I

В настоящей главе на основе сочетания теории несущей линии и теории профиля рассматриваются вопросы нестационарной аэродинамики несущего винта. Вращение лопасти вносит в это исследование ряд моментов, требующих особого рассмотрения, таких, как повторное влияние вихревой пелены, изменение скорости набегающего на лопасть потока во времени, радиальное течение и, конечно, весьма сложная картина течения, допускающая лишь приближенные или численные решения.

10.1. ТЕОРИЯ НЕСУЩЕЙ ЛИНИИ

Когда крыло конечного размаха создает подъемную силу, на нем возникает система присоединенных вихрей, условие сохранения которых определяет появление продольных и поперечных свободных вихрей. Продольные вихри параллельны скорости набегающего потока, а их интенсивность определяется изменением циркуляции присоединенных вихрей по размаху крыла. Поперечные свободные вихри параллельны размаху крыла и возникают вследствие изменения циркуляции присоединенных вихрей во времени. После схождения с крыла элементы свободных вихрей перемещаются со скоростью набегающего потока, образуя отходящую от задней кромки крыла пелену вихрей.

В классической теории несущей линии рассматривается плоское неподвижное крыло большого удлинения в установившемся потоке. Применяется линеаризация, состоящая в том, что крыло и пелена описываются плоскими слоями вихрей. Допущение большого удлинения позволяет разделить задачу на две. Первая (внутренняя) задача касается аэродинамики сечения крыла. Обтекание принимается локально двумерным, а влияние остальных частей крыла и пелены описывается постоянной по сечению индуктивной скоростью, вызывающей изменение его угла атаки. Для определения аэродинамических нагрузок сечения (подъемной силы, сопротивления и момента) используются либо теория профиля, либо экспериментальные данные. Вторая (внешняя) задача состоит в определении индуктивных скоростей. Крыло изображается присоединенным вихрем, с которого

Аэродинамика несущего винта I

В настоящей главе на основе сочетания теории несущей линии и теории профиля рассматриваются вопросы нестационарной аэродинамики несущего винта. Вращение лопасти вносит в это исследование ряд моментов, требующих особого рассмотрения, таких, как повторное влияние вихревой пелены, изменение скорости набегающего на лопасть потока во времени, радиальное течение и, конечно, весьма сложная картина течения, допускающая лишь приближенные или численные решения.

10.1. ТЕОРИЯ НЕСУЩЕЙ ЛИНИИ

Когда крыло конечного размаха создает подъемную силу, на нем возникает система присоединенных вихрей, условие сохранения которых определяет появление продольных и поперечных свободных вихрей. Продольные вихри параллельны скорости набегающего потока, а их интенсивность определяется изменением циркуляции присоединенных вихрей по размаху крыла. Поперечные свободные вихри параллельны размаху крыла и возникают вследствие изменения циркуляции присоединенных вихрей во времени. После схождения с крыла элементы свободных вихрей перемещаются со скоростью набегающего потока, образуя отходящую от задней кромки крыла пелену вихрей.

В классической теории несущей линии рассматривается плоское неподвижное крыло большого удлинения в установившемся потоке. Применяется линеаризация, состоящая в том, что крыло и пелена описываются плоскими слоями вихрей. Допущение большого удлинения позволяет разделить задачу на две. Первая (внутренняя) задача касается аэродинамики сечения крыла. Обтекание принимается локально двумерным, а влияние остальных частей крыла и пелены описывается постоянной по сечению индуктивной скоростью, вызывающей изменение его угла атаки. Для определения аэродинамических нагрузок сечения (подъемной силы, сопротивления и момента) используются либо теория профиля, либо экспериментальные данные. Вторая (внешняя) задача состоит в определении индуктивных скоростей. Крыло изображается присоединенным вихрем, с которого

сходят, продольные свободные вихри, образующие тянущуюся за крылом пелену. Индуктивные скорости вычисляются в точках присоединенного вихря. Внутренняя задача состоит в установлении связи между нагрузкой в сечении крыла и индуктивной скоростью, а внешняя — в определении зависимости индуктивной скорости от распределения нагрузки по размаху крыла, поскольку оно определяет интенсивность свободных вихрей. В результате совместного решения этих двух задач теории несущей линии определяется нагрузка на крыле.

Для крыла конечного размаха характерно сопротивление, связанное с образованием подъемной силы; оно называется *индуктивным* и возникает вследствие затрат энергии на образование вихревой пелены, отходящей от крыла вниз по потоку. Для крыльев большого удлинения индуктивное сопротивление зависит от распределения индуктивных скоростей, причем теория несущей линии позволяет при заданных распределениях углов атаки и хорд сечений находить как нагрузки, так и индуктивные скорости.

Теория элемента лопасти представляет собой распространение теории несущей линии на вращающееся крыло. В линеаризованной вихревой модели пелена вихрей состоит из спиральных продольных вихрей, тянущихся за каждой лопастью. В случае невращающегося крыла деформациями вихревой пелены и сворачиванием концевых вихрей обычно можно пренебречь, поскольку элементы вихрей уносятся вниз по потоку и удаляются от крыла. Вращающаяся же лопасть, напротив, постоянно приближается к элементам пелены вихрей, сходящих с лопасти винта, идущей впереди рассматриваемой. Поэтому модель пелены вихрей, используемая для расчета индуктивных скоростей на лопасти, должна быть более детальной и точной, чем в случае крыла. Сходящие с концов лопастей участки вихревой пелены быстро сворачиваются в концевые вихревые жгуты, которые лучше описываются вихревой нитью, чем пеленой вихрей. Для многих режимов полета требуется учитывать деформации концевых вихревых жгутов, вызываемые созданными этими жгутами индуктивными скоростями, так как без этого не удастся произвести достаточно точный расчет нагрузок. В излагаемых далее простых способах расчета индуктивной скорости используется схема активного диска. Это позволяет определять среднюю индуктивную скорость по закону сохранения количества движения.

Вследствие того что сходящие с лопасти вихри имеют форму винтовых линий, аналитическое решение задачи, как в случае крыла, оказывается невозможным. Исключение составляет лишь частный случай непрерывно распределенных вихрей в схеме активного диска. При численном решении пелену обычно за-

меняют множеством конечных вихревых элементов, что эквивалентно предположению о ступенчатом изменении интенсивности присоединенного вихря по азимуту и радиусу. Такая схема хорошо отображает наличие концевых вихревого жгута, возникающего при сворачивании пелены. Замена сходящих с внутренних участков лопасти продольных и поперечных распределенных вихрей дискретными приводит к особенностям поля индуктивных скоростей вблизи каждого элемента вихря. Однако путем специального выбора точек, в которых вычисляются индуктивные скорости, могут быть получены достаточно точные результаты. Периодическое приближение к лопасти свободных вихрей, созданных другими лопастями, приводит к тому, что аэродинамические нагрузки сильно изменяются во времени. Даже в случае установившегося полета вперед нагрузки вращающихся лопастей оказываются периодическими, и для их определения требуется применение нестационарной теории. Более подробное обсуждение расчетов переменных индуктивных скоростей проведено в гл. 13.

Лопасть несущего винта вертолета обычно имеет большое удлинение, так что это условие применимости теории несущей линии соблюдается практически всегда. Однако для справедливости такой теории необходимо еще одно, более тонкое требование, а именно — резкие изменения местных условий обтекания не допускаются. Это условие для лопасти несущего винта обычно не выполняется, несмотря на большое удлинение. Имеются важные случаи нарушений указанного условия; во-первых, при обтекании концевых сечений лопастей и, во-вторых, при обтекании участков лопасти, к которым приближаются концевые вихри. Конечно, вблизи конца крыла на небольшом участке нагрузка тоже всегда резко падает до нуля. Однако в случае лопасти винта, где из-за больших скоростей вращения концевые сечения существенно более нагружены, градиент изменения подъемной силы вблизи конца особенно велик, и даже небольшие изменения нагрузок вследствие пространственности обтекания оказываются важными. На некоторых режимах полета лопасти подходят очень близко к концевому вихрю, сходящему с впереди идущей лопасти. В таких случаях индуктивные скорости весьма резко изменяются по длине лопасти, и теория несущей линии существенно завышает соответствующие нагрузки. Таким образом, для описания ряда важных явлений обтекания лопастей винта теория несущей линии должна быть несколько модифицирована. Требуемые поправки могут быть как весьма простыми (например, введение коэффициента концевых потерь), так и весьма сложными (например, переход к теории несущей поверхности при расчете характеристик винта).

10.2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ПРОФИЛЯ

Поскольку условия обтекания лопасти несущего винта при полете вперед и при неустановившихся движениях меняются во времени, в теории несущей линии приходится использовать нестационарные аэродинамические характеристики профиля. Сначала рассмотрим задачу обтекания профиля равномерным невозмущенным потоком. Будем следовать обычным допущениям линейной теории тонкого профиля в несжимаемой среде, когда профиль и его след заменяются слоем точечных вихрей, расположенным вдоль прямой, параллельной скорости невозмущенного потока. Нагрузки, обусловленные толщиной и формой профиля в линейной теории, могут быть определены независимо

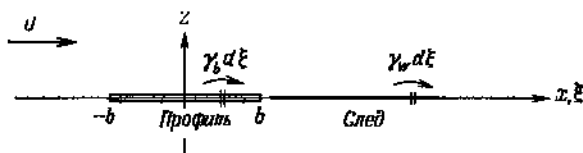


Рис. 10.1. Модель профиля и следа в нестационарной теории тонкого профиля.

от нагрузок, связанных с наличием угла атаки или нестационарным движением. Здесь рассматриваются только последние. Линейная теория нестационарного движения тонкого профиля будет обобщена на случай вращающейся лопасти. Эти обобщения рассмотрены в последующих разделах данной главы.

Рассмотрим профиль с хордой $2b$, который находится в равномерном потоке, имеющем скорость U . Поскольку циркуляция присоединенных вихрей изменяется во времени, профиль и его след описываются слоем плоских вихрей, показанных на рис. 10.1. За профилем вниз по потоку тянется пелена, состоящая из поперечных вихрей. Погонную интенсивность слоя вихрей на профиле обозначим γ_b , а в следе — γ_w . Движение профиля зададим, указав вертикальное перемещение h (положительное вниз) точки профиля с координатой $x = ab$ и геометрический угол атаки α (положительный при движении носка профиля вверх, см. рис. 10.2). Аэродинамический момент профиля также будем определять относительно точки с координатой $x = ab$. Вследствие движения профиля возникает относительная скорость протекания w_a (положительная вверх), равная

$$w_a = Ua + \dot{h} + \alpha(x - ab).$$

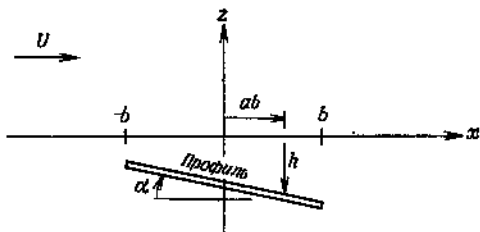
Кроме этой скорости в плоскости сечения лопасти имеются еще индуктивная скорость λ , вызванная поперечными вихрями следа, и скорость w_b , индуцируемая вихрями на профиле (положительная вниз). Интегрируя скорости от вихрей профиля

и следа, получим

$$\omega_b(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma_b d\xi}{x - \xi}, \quad \lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_b^{\infty} \frac{\gamma_w d\xi}{x - \xi}.$$

Граничным условием непротекания потока через поверхность профиля является равенство $\omega_b + \lambda - \omega_a = 0$, которое дает сле-

Рис. 10.2. Нестационарное движение профиля по вертикали и углу атаки.



дующее интегральное уравнение для полной интенсивности γ_b вихрей на профиле¹⁾:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma_b d\xi}{x - \xi} = \omega_a - \lambda.$$

Зная интенсивность вихрей на профиле, можно определить и нагрузки. Интенсивность γ_b вихрей следа определяется производной по времени от суммарной циркуляции $\Gamma = \int_{-b}^b \gamma_b dx$

вихрей на профиле, согласно формуле

$$\gamma_w = -\frac{1}{U} \frac{d\Gamma}{dt},$$

написанной для момента времени $t - (x - b)/U$ схода с профиля данного вихревого элемента. Таким образом, индуцированная вихрями следа скорость λ также определяется интенсивностью вихрей на лопасти. Условие отсутствия перепада давлений поперек пелены требует, чтобы после схода с лопасти вихри следа перемещались со скоростью невозмущенного потока, из чего следует равенство $\gamma_w = \gamma_b(x - Ut)$. Наконец, условие Кутта — Жуковского о конечности скорости на задней кромке дает $\gamma_b = 0$. С учетом этого условия²⁾ приведенное

¹⁾ Хотя автор всюду называет γ_b интенсивностью присоединенных (bound) вихрей, это — полная интенсивность вихрей, в состав которых входят и образующиеся на поверхности профиля свободные вихри. — Прим. перев.

²⁾ В действительности на задней кромке соблюдается условие $\gamma_w(b+0) = \gamma_w(b-0)$, которое и обеспечивает конечность скорости на ней. В противном случае из-за скачка в $\gamma(x)$ при $x = b$ там имелась бы логарифмическая особенность скорости. — Прим. перев.

выше интегральное уравнение имеет следующее решение:

$$\gamma_b = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{b-x}{b+x}} \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+\xi}{b-\xi}} \frac{w_a - \lambda}{x-\xi} d\xi.$$

Индуктивную скорость следа и скорость протекания от движения профиля представим выражениями

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos n\theta, \quad w_a = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos n\theta,$$

где $x = b \cos \theta$. В этом случае решение для γ_b получается в виде

$$\gamma_b = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (w_n - \lambda_n) f_n(\theta),$$

где f_n — функции в ряде Глауэрта:

$$f_n(\theta) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\theta/2) & \text{при } n=0, \\ \sin n\theta & \text{при } n \geq 1. \end{cases}$$

Если перейти от θ к x , то разложение нормальной скорости принимает вид

$$w_a = w_0 + w_1(x/b) + w_2(2x^2/b^2 - 1) + \dots$$

Для рассматриваемого движения лопасти имеем $w_0 = U\alpha + \dot{h} - ab\dot{\alpha}$ ($w_0 = w_a$ в центре профиля), $w_1 = b\dot{\alpha}$ и $w_n = 0$ при $n \geq 2$. Первые несколько функций f_n в ряде Глауэрта таковы:

$$f_0 = \sqrt{\frac{b-x}{b+x}}, \quad f_1 = \sqrt{1-(x/b)^2}, \\ f_2 = 2(x/b) \sqrt{1-(x/b)^2}.$$

Коэффициенты w_n определяются движением профиля. Для завершения решения задачи нужно определить коэффициенты разложения скорости λ , индуцированной пеленой.

Используя разложение γ_b , получим для циркуляции вихрей на профиле выражение

$$\Gamma = \int_{-b}^b \gamma_b dx = 2\pi b \left[\left(w_0 + \frac{1}{2} w_1 \right) - \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) \right].$$

Представим теперь γ_b в виде суммы двух частей — циркуляционной интенсивности $\gamma_{b, \text{ц}}$ (для которой $\Gamma \neq 0$, но $w_b = 0$, так что граничные условия не затрагиваются) и бесциркуляционной $\gamma_{b, \text{бц}}$ (которая удовлетворяет граничным условиям, но для нее $\Gamma = 0$). Согласно определению, $\gamma_b = \gamma_{b, \text{ц}} + \gamma_{b, \text{бц}}$. Как нетрудно убедиться, сформулированным условиям удовле-

творяют выражения

$$\gamma_{b,u} = \frac{2b}{\sqrt{b^2 - x^2}} \left[(\omega_0 + \frac{1}{2} \omega_1) - (\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1) \right],$$

$$\gamma_{b,\sigma} = -\frac{2}{\sin \theta} \left[(\omega_0 - \lambda_0) \cos \theta + \frac{1}{2} (\omega_1 - \lambda_1) \cos 2\theta \right] +$$

$$+ 2 \sum_{n=2}^{\infty} (\omega_n - \lambda_n) f_n(\theta),$$

ибо

$$\int_{-b}^b \gamma_{b,u} dx = \Gamma, \quad \int_{-b}^b \gamma_{b,\sigma} dx = 0, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma_{b,u}}{x - \xi} d\xi = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\gamma_{b,\sigma}}{x - \xi} d\xi = \omega_a - \lambda.$$

Справедливость двух последних равенств устанавливается с использованием соотношения

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos n\theta d\theta / (\cos \theta - \cos \varphi) = \sin n\varphi / \sin \varphi.$$

Линеаризация интеграла Коши — Лагранжа приводит к соотношению

$$p = -\rho \left(U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right),$$

где φ — потенциал скорости. Отсюда можно определить разность давлений на верхней и нижней поверхностях профиля:

$$-\Delta p = \rho \left(U \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} \right).$$

Поскольку касательная скорость u на профиле равна $\partial \varphi / \partial x$, а интенсивность вихрей γ_b равна Δu , имеем

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial x} = \Delta u = \gamma_b,$$

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^x \Delta u dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^x \gamma_b dx,$$

так что выражение для разности давлений принимает вид

$$-\Delta p = \rho \left(U \gamma_b + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b}^x \gamma_{b,\sigma} dx \right).$$

Отметим, что в $\partial \varphi / \partial t$ входит только интенсивность вихрей бесциркуляционного решения. Интенсивность вихрей циркуляционного решения влияет на давление через индуцируемую следом скорость λ .

Суммарные аэродинамические силы на профиле представим в виде подъемной силы L (положительна вверх) и момента относительно точки $x = ab$ (положителен на кабрирование), для которых имеем

$$L = \int_{-b}^b (-\Delta p) dx, \quad M = \int_{-b}^b (-\Delta p)(-x + ab) dx$$

Подстановка Δp дает

$$L = \rho \left(U\Gamma - \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{\delta\alpha}^{(1)} \right),$$

$$M = -\rho \left(U\Gamma^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{\delta\alpha}^{(2)} \right),$$

где

$$\Gamma^{(n)} = \int_{-b}^b x^n \gamma_b dx,$$

$$\Gamma_{\delta\alpha}^{(n)} = \int_{-b}^b x^n \gamma_{b, \delta\alpha} dx.$$

Подставляя выражения для γ_b , получим

$$\Gamma = 2\pi b \left[\left(w_0 + \frac{1}{2} w_1 \right) - \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) \right],$$

$$\Gamma^{(1)} = 2\pi b^2 \left[-\left(\frac{1}{2} + a \right) \left(\left(w_0 + \frac{1}{2} w_1 \right) - \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left((w_1 + w_2) - (\lambda_1 + \lambda_2) \right) \right],$$

$$\Gamma_{\delta\alpha}^{(1)} = 2\pi b^2 \left[-\frac{1}{2} \left(w_0 - \frac{1}{2} w_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\lambda_0 - \frac{1}{2} \lambda_2 \right) \right],$$

$$\Gamma_{\delta\alpha}^{(2)} = 2\pi b^3 \left[a \left(\left(w_0 - \frac{1}{2} w_2 \right) - \left(\lambda_0 - \frac{1}{2} \lambda_2 \right) \right) - \frac{1}{8} \left((w_1 - w_3) - \right. \right. \\ \left. \left. - (\lambda_1 - \lambda_3) \right) \right].$$

Для рассматриваемого здесь движения профиля имеем

$$w_0 + \frac{1}{2} w_1 = U\alpha + \dot{h} + \left(\frac{1}{2} - a \right) b\dot{\alpha} = w_a \text{ на трех четвертях хорды,}$$

$$w_0 - \frac{1}{2} w_2 = U\alpha + \dot{h} - ab\dot{\alpha} = w_a \text{ в центре профиля,}$$

$$w_1 + w_2 = b\dot{\alpha}, \quad w_1 - w_3 = b\dot{\alpha}.$$

Выражая коэффициенты λ_n в разложении распределения индуцированной скорости по хорде через интенсивность вихрей

В следе, получим

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \lambda \cos n\theta d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_b^\infty \frac{\gamma_w d\xi}{x - \xi} \right] \cos n\theta d\theta = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_b^\infty \gamma_w \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\xi - b \cos \theta} d\theta \right] d\xi = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_b^\infty \gamma_w \left[\frac{(\xi - \sqrt{\xi^2 - b^2})^n}{b^n \sqrt{\xi^2 - b^2}} \right] d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 &= -\frac{1}{2\pi b} \int_b^\infty \gamma_w \left[\sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} - 1 \right] d\xi, \\ \lambda_0 - \frac{1}{2} \lambda_1 &= -\frac{1}{\pi b^2} \int_b^\infty \gamma_w [\xi - \sqrt{\xi^2 - b^2}] d\xi, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= -\frac{1}{\pi b^2} \int_b^\infty \gamma_w (\xi - \sqrt{\xi^2 - b^2}) \left(\sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} - 1 \right) d\xi, \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= -\frac{2}{\pi b^3} \int_b^\infty \gamma_w (\xi - \sqrt{\xi^2 - b^2})^2 d\xi. \end{aligned}$$

В результате получаем требуемые для определения подъемной силы циркуляцию и производную от нее:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\pi b \left(U\dot{a} + \dot{h} + b\ddot{a} \left(\frac{1}{2} - a \right) \right) + \int_b^\infty \left(\sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} - 1 \right) \gamma_w d\xi, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{\text{об}}^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[-\pi b^2 (U\dot{a} + \dot{h} - ab\ddot{a}) - \int_b^\infty (\xi - \sqrt{\xi^2 - b^2}) \gamma_w d\xi \right] = \\ &= -\pi b^2 (U\dot{a} + \dot{h} - ab\ddot{a}) - U \int_b^\infty \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi - \sqrt{\xi^2 - b^2}) \gamma_w d\xi = \\ &= -\pi b^2 (U\dot{a} + \dot{h} - ab\ddot{a}) - U \int_b^\infty \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \right) \gamma_w d\xi. \end{aligned}$$

так что выражение для подъемной силы будет следующим:

$$L = \rho U 2\pi b \left(U\alpha + \dot{h} + b\dot{\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) \right) + \rho \pi b^2 (U\dot{\alpha} + \dot{h} - ab\ddot{\alpha}) + \\ + \rho U \int_b^{\infty} \frac{b}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w d\xi = L_Q + L_{\text{сн}} + L_W.$$

Здесь L_Q — квазистационарная подъемная сила, сохраняющаяся и в стационарном случае ($L = 2\pi\rho U^2 b\alpha$), когда другие составляющие исчезают. Величина $L_{\text{сн}}$ — бесциркуляционная подъемная сила, соответствующая $\partial\Gamma_{\text{сн}}^{(1)}/\partial t$, а L_W — подъемная сила вследствие индукции следа. Примечательно, что в нестационарном случае величина L_Q зависит лишь от угла атаки, подсчитанного по скорости в точке, расположенной на трех четвертях хорды. Поскольку циркуляция вокруг профиля определяется выражением

$$\Gamma = \frac{L_Q}{\rho U} + \int_b^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} - 1 \right) \gamma_w d\xi,$$

а условие сохранения завихренности дает $\Gamma = - \int_b^{\infty} \gamma_w d\xi$, получаем

$$L_Q = -\rho U \int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} \gamma_w d\xi$$

и

$$L_{\text{сн}} = L_Q + L_W = -\rho U \int_b^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w d\xi.$$

Отсюда выражение для подъемной силы может быть записано в следующем виде:

$$L = \frac{\int_b^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w d\xi}{\int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} \gamma_w d\xi} L_Q + L_{\text{сн}}.$$

Таким образом, влияние следа вихрей проявляется в умножении квазистационарной подъемной силы L_Q на коэффициент, зависящий от γ_w (т. е. от движения профиля). Для подсчета этого коэффициента необходимо задать конкретную зависимость параметров движения профиля от времени. Рассмотрим чисто гармоническое движение с частотой ω , для которого $\alpha = \bar{\alpha}e^{i\omega t}$ и $\dot{h} = \bar{h}\dot{e}^{i\omega t}$. При таком движении интенсивность пелены γ_w

также является периодической функцией времени и может быть представлена в виде $\gamma_w = \bar{\gamma}_w e^{i\omega(t - \xi/U)}$, соответствующем условию переноса вихрей со скоростью потока. Вынося в выражении для L величину $\bar{\gamma}_w e^{i\omega t}$ за знак интеграла, получим

$$L = C(k) L_Q + L_{\text{от}} = 2\pi\rho U b C(k) \left(U\dot{a} + \dot{h} + b\dot{a} \left(\frac{1}{2} - a \right) \right) + \rho\pi b^2 (U\dot{a} + \dot{h} - a\ddot{a}),$$

где $C(k)$ — некоторая функция, зависящая только от безразмерной частоты $k = \omega b/U$. Функция $C(k)$, определяющая нестационарное уменьшение (дефект) подъемной силы, носит название *функции Теодорсена*. Поскольку функция $C(k)$ при малых частотах близка к 1, а при больших падает до 0,5, влияние пелены состоит в уменьшении циркуляционной составляющей подъемной силы по сравнению с ее квазистационарным значением.

Аналогичным путем выводятся и следующие выражения, определяющие момент относительно точки $x = ab$:

$$\Gamma^{(1)} = -b \left(\frac{1}{2} + a \right) \Gamma + \frac{1}{2} \pi b^3 \dot{a} + \frac{1}{2} \int_b^{\infty} \gamma_w (\xi - \sqrt{\xi^2 - b^2}) \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} - 1 \right) d\xi, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{\text{от}}^{(2)} = -b \left(\frac{1}{2} + a \right) \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{\text{от}}^{(1)} - \frac{1}{2} \pi b^3 (U\dot{a} + \dot{h} + b \left(\frac{1}{4} - a \right) \ddot{a}) + \\ + \frac{U}{2} \int_b^{\infty} \gamma_w (\xi - \sqrt{\xi^2 - b^2}) \left(\sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} - 1 \right) d\xi,$$

так что

$$M = b \left(\frac{1}{2} + a \right) L + M_Q = \\ = b \left(\frac{1}{2} + a \right) L - \frac{1}{2} \rho\pi b^3 \left(2U\dot{a} + \dot{h} + b \left(\frac{1}{4} - a \right) \ddot{a} \right) = \\ = b \left(\frac{1}{2} + a \right) C(k) L_Q + \rho\pi b^3 \left(a\dot{h} - \left(\frac{1}{2} - a \right) U\dot{a} - b \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{a} \right).$$

Величина M_Q представляет собой момент относительно точки, лежащей на расстоянии четверти хорды от носка профиля и соответствующей положению аэродинамического фокуса по линейной теории. Если поворот профиля происходит относительно оси, отстоящей от носка профиля на четверть хорды ($a = -1/2$), то подъемная сила не создает момента. Члены, обусловленные влиянием присоединенных масс (\dot{h} и \ddot{a}), входят как в M_Q , так и в $L_{\text{от}}$. Демпфирующий момент создается силой,

действующей в точке, отстоящей от носка профиля на $3/4$ хорды, и при $a = 1/2$ обращается в нуль.

Рассмотрим теперь подробнее функцию Теодорсена $C(k)$, которая определяет уменьшение подъемной силы при нестационарном движении, вызванное влиянием вихревого следа. Поскольку для рассматриваемого гармонического движения $\gamma_w = \bar{\gamma}_w e^{i\omega(t-\xi/U)}$, получаем следующее выражение для $C(k)$:

$$C(k) = \frac{\int_b^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w d\xi}{\int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} \gamma_w d\xi} = \frac{\int_1^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-ik\xi} d\xi}{\int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} e^{-ik\xi} d\xi} = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)},$$

где $H_n^{(2)} = J_n - iY_n$ — функция Ганкеля, а $k = \omega b/U$ — приведенная частота. Модуль и аргумент функции Теодорсена при значениях приведенной частоты вплоть до $k = 1$ приведены на

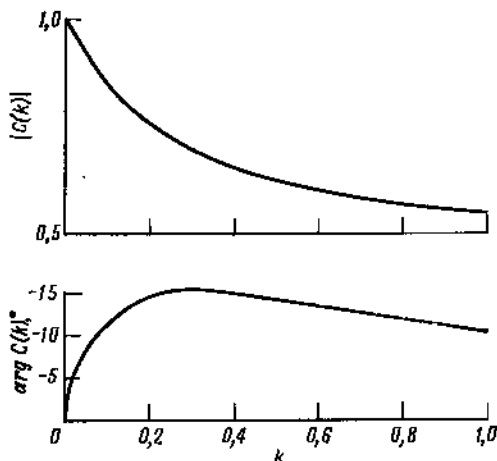


Рис. 10.3. Функция Теодорсена, описывающая нестационарное уменьшение коэффициента подъемной силы.

рис. 10.3. Имеем $C(0) = 1$, что соответствует стационарным условиям. При больших значениях приведенной частоты k модуль $|C(k)|$ функции Теодорсена приближается к предельному значению 0,5, т. е. вихревой след уменьшает подъемную силу при колебательном движении до половины ее стационарного значения. Определяемый аргументом $C(k)$ сдвиг фаз невелик. Он достигает максимального значения, несколько превышающего 15° , при $k \approx 0,3$ и снова уменьшается до нуля при высоких

частотах. При малых значениях k имеем приближенно

$$C(k) \simeq \left(1 - \frac{\pi}{2} k\right) + ik \left(\ln \frac{k}{2} + \gamma\right),$$

где $\gamma = 0,5772156$ — постоянная Эйлера.

Если лопасть несущего винта совершает n колебаний за оборот, то частота ее колебаний ω равна $n\Omega$, где Ω — угловая скорость вращения винта. Поскольку при этом скорость набегающего на сечение потока равна Ωr , а полухорда — $c/2$, для приведенной частоты получаем выражение $k = nc/2r$. В случае винтов с лопастями большого удлинения приближенно можно принять $k \simeq 0,05n$. Для низких гармоник, когда приведенная частота мала, функция уменьшения подъемной силы близка к 1. Так, для первой гармоники вихревой след уменьшает подъемную силу примерно на 5%. Поэтому пренебрежение влиянием следа и другими нестационарными эффектами при выполненном в предыдущих главах анализе аэродинамических коэффициентов несущего винта и махового движения вполне оправдано. Однако для высших гармоник приведенная частота довольно велика, и влияние следа поперечных вихрей необходимо принимать во внимание при точном расчете нагрузок.

Чикала разработал еще одну форму представления результатов решения задачи о нестационарном обтекании профиля, которая связана с разложением Δp в ряд Глауэрта. Разность давлений на профиле определяется в виде

$$-\Delta p = \rho U^2 e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(\theta),$$

где $x = b \cos \theta$. При этом скорость протекания, обусловленная движением профиля, должна быть представлена рядом Фурье по косинусам:

$$w_a = U e^{i\omega t} \left(A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n \theta \right).$$

При заданных коэффициентах этого ряда коэффициенты ряда для Δp , определяющего решение задачи, находятся по следующим формулам:

$$a_0 = 2(A_0 + A_1) C(k) - 2A_1,$$

$$a_n = -\frac{2ik}{n} (A_{n+1} - A_{n-1}) + 4A_n.$$

Тогда подъемная сила и момент равны

$$L = \rho U^2 b \pi \left(a_0 + \frac{1}{2} a_1 \right) e^{i\omega t},$$

$$M_Q = -\rho U^2 b^2 \frac{\pi}{4} (a_1 + a_2) e^{i\omega t}.$$

В качестве примера применения этих формул рассмотрим вхождение профиля в движущийся со скоростью потока синусоидальный вертикальный порыв с длиной волны $2\pi b/k$. Порыв

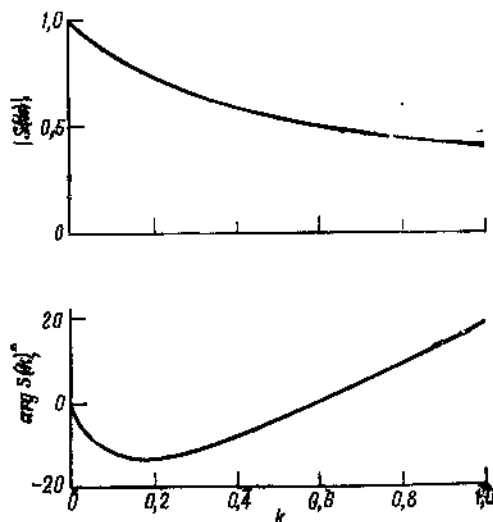


Рис. 10.4. Функция Сирса, описывающая нагрузки профиля при вхождении в порыв.

вызывает на профиле скорость протекания, определяемую выражением

$$\omega_a = \omega_0 e^{i\omega(t-x/U)} = \omega_0 e^{i\omega t} e^{-ikx/b} = \omega_0 e^{i\omega t} e^{-ik \cos \theta}.$$

Разлагая функцию $e^{-ik \cos \theta}$ в ряд по косинусам, получаем

$$A_n = \frac{\omega_0}{U} (-1)^n J_n(k),$$

где J_n — функция Бесселя. Таким образом,

$$a_0 = \frac{\omega_0}{U} 2 [(J_0(k) - iJ_1(k))C(k) + iJ_1(k)],$$

$$a_n = \frac{\omega_0}{U} \frac{2ik}{n} (-1)^{n-1} (J_{n+1} + J_{n-1} - \frac{2n}{k} J_n) = 0.$$

Давление в рассматриваемом случае определяется только одним членом ряда Глауэрта:

$$-\frac{\Delta p}{\rho U^2} = e^{i\omega t} \frac{\omega_0}{U} 2S(k) \sqrt{\frac{b-x}{b+x}},$$

где через $S(k)$ обозначена функция Сирса $S(k) = (J_0(k) - iJ_1(k))C(k) + iJ_1(k)$, графики которой приведены на рис. 10.4. Для подъемной силы получаем выражение

$$\frac{L}{\rho U^2 b} = e^{i\omega t} \frac{\omega_0}{U} 2\pi S(k),$$

а $M_Q = 0$. Поскольку порыв любой формы может быть представлен суперпозицией гармонических порывов, возникающая при вхождении в порыв аэродинамическая сила профиля всегда приложена в точке на четверти хорды. При $k = 0$ функция Сирса $S(k)$ равна 1. При высоких частотах справедливо при-

ближенное представление $S(k) \sim e^{i(k - \frac{\pi}{4})} / \sqrt{2\pi k}$, так что при увеличении k модуль функции $S(k)$ в отличие от функции Теодорсена стремится к нулю, а аргумент линейно возрастает.

10.3. ПЕЛЕНА БЛИЖНЕГО ВИХРЕВОГО СЛЕДА

Из теории профиля следует, что пелена поперечных вихрей является важным фактором при определении нестационарных нагрузок, связанных с колебательным движением лопасти. В отличие от рассмотренной плоской пелены вихревой след лопасти винта представляет собой идущую за ней спиральную поверхность. Однако наиболее существенное влияние оказывает часть этой поверхности, расположенная вблизи задней кромки лопасти. Одним из возникающих в этой связи вопросов является следующий: каким способом элемент вихревой поверхности, сошедший при повороте лопасти на угол $15-45^\circ$, следует учитывать в численных методах расчета индуктивных скоростей и нагрузок? Для ответа на этот вопрос и рассматривалась в предыдущем разделе плоская вихревая пелена.

При расчете нагрузок индуктивные скорости в месте расположения лопасти обычно определяются по теории несущей линии, т. е. в одной точке по хорде профиля. При этом из-за сложности формы вихревой пелены для определения индуктивных скоростей требуется весьма большой объем вычислений. При использовании же нестационарной теории обтекания профиля требуется знать распределение индуктивных скоростей по хорде. Так, для получения нестационарных подъемной силы и момента (разд. 10.2) нужно знать коэффициенты λ_0 , λ_1 и λ_2 в разложении индуктивной скорости в ряд по косинусам. При этом для уменьшения объема вычислений желательнее обойтись без расчета индуктивной скорости в нескольких точках по хорде. Ниже строится такая модель ближнего вихревого следа, в рамках которой для приемлемого расчета нестационарных нагрузок достаточно вычислить индуктивную скорость по теории несущей линии лишь в одной точке по хорде.

Аппроксимация ближнего вихревого следа по теории несущей линии выполнена в 1964 г. Миллером [М.126, М.127]. Поскольку приближение несущей линии в теории крыла большого удлинения соответствует малым приведенным частотам, получаемые результаты, по-видимому, эквивалентны низкочастотной аппроксимации. Решение заключалось в построении такого

способа расчета индуктивных скоростей по теории несущей линии, который в случае профиля дает нестационарные нагрузки, определяемые функцией Теодорсена. Следуя Миллеру, представим нестационарную подъемную силу профиля в виде $L = L_u + L_{\text{об}}$, где

$$L_{\text{об}} = \rho \pi b^2 (U \dot{\alpha} + \dot{h} - a b \ddot{\alpha}),$$

$$L_u = \rho U \Gamma = \rho U 2 \pi b \left[\left(\omega_0 + \frac{1}{2} \omega_1 \right) - \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) \right].$$

Для квазистационарной подъемной силы имеем

$$L_Q = \rho U 2 \pi b \left(\omega_0 + \frac{1}{2} \omega_1 \right) = \rho U 2 \pi b \left(U \alpha + \dot{h} + b \dot{\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) \right).$$

Отсюда вызванная циркуляцией подъемная сила равна

$$L_u = L_Q - \rho U 2 \pi b \lambda,$$

где индуктивная скорость от вихревого следа определяется интегралом

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_b^{\infty} \frac{\gamma_w}{x - \xi} d\xi.$$

По теории несущей линии индуктивная скорость определяется в одной точке хорды, расположенной на присоединенном вихре, т. е. на линии четвертой хорд ($x = -b/2$). При этом вихревой след также должен быть продлен до линии четвертой хорд, что дает для индуктивной скорости выражение¹⁾

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-b/2}^{\infty} \frac{\gamma_w}{-\left(\xi + \frac{b}{2}\right)} d\xi.$$

Поскольку интенсивность вихревого следа γ_w определяется производной от циркуляции присоединенных вихрей по времени имеем

$$\gamma_w = - \frac{1}{U} \frac{d\Gamma}{dt},$$

причем Γ берется в момент времени $t - (\xi - b)/U$. Полагая движение гармоническим, $\Gamma = \bar{\Gamma} e^{i\omega t}$, получим

$$\gamma_w = - \frac{i\omega}{U} \bar{\Gamma} e^{-i\omega(\xi - b)/U}.$$

¹⁾ Несобственный интеграл в этом выражении расходится, что приводит к появлению бесконечной мнимой части, которую автор отбрасывает. — *Прим. перев.*

Отсюда индуктивная скорость равна

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{i\omega}{U} \Gamma \frac{1}{2\pi} \int_{-b/2}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(\xi-b)/U}}{-(\xi+b/2)} d\xi = \Gamma \frac{ike^{i(3/2)k}}{2\pi b} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\xi}}{\xi} d\xi = \\ &= \Gamma \frac{ke^{i(3/2)k}}{2\pi b} \left(\int_0^{\infty} \frac{\sin k\xi}{\xi} d\xi + i \int_0^{\infty} \frac{\cos k\xi}{\xi} d\xi \right) \end{aligned}$$

(в предположении, что при данной аппроксимации $e^{i(3/2)k} \approx 1$), Интеграл с косинусом в этом выражении расходится. Отбрасывая его, т. е. оставляя в выражении для λ только действительную часть, получим

$$\lambda = \Gamma \frac{k}{2\pi b} \int_0^{\infty} \frac{\sin k\xi}{\xi} d\xi = \Gamma \frac{k}{4b} = \frac{L_u}{\rho U 2\pi b} \frac{\pi}{2} k.$$

Отсюда нестационарная подъемная сила L_{π} равна $L_Q - \rho U 2\pi b \lambda = L_Q - L_u (\pi/2) k$, или

$$L_{\pi} = L_Q (1 + \pi k/2).$$

Это соответствует приближенному выражению $C(k) \approx 1/(1 + \pi k/2)$, которое с точностью до членов порядка k совпадает с выражением функции Теодорсена (разд. 10.2). На рис. 10.5 эта аппроксимация сопоставлена с точными значениями модуля функции Теодорсена. Кривые хорошо согласуются даже при достаточно больших значениях приведенной частоты. Однако при дальнейшем увеличении k точные значения $|C(k)|$ становятся существенно выше определенных по приближенной формуле.

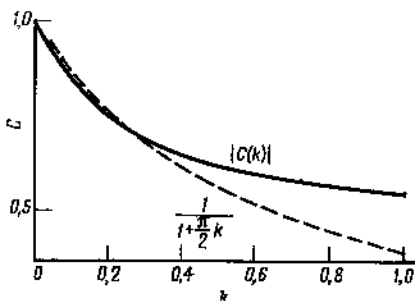


Рис. 10.5. Сравнение функция Теодорсена $C(k)$ с аппроксимирующей ее зависимостью.

Таким образом, схема несущей линии давала бы удовлетворительные результаты, если бы этому не мешало то обстоятельство, что определяющий индуктивную скорость интеграл по пелене вихрей расходится. Расходимость интеграла связана с тем, что индуктивная скорость имеет особенность на краю пелены, доходящем до линии четвертой хорд профилей лопасти. Чтобы избежать появления такой особенности, примем, что пелена не доходит до линии четвертой хорд (для точек которой вычисляется скорость) на расстояние vb . Это дает

следующее выражение:

$$\lambda = \frac{i\omega}{U} \Gamma \frac{1}{2\pi} \int_{-(b/2)+be}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(\xi-b)/U}}{\xi + \frac{b}{2}} d\xi =$$

$$= \Gamma \frac{ik}{2\pi b} e^{i(3/2)k} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik\xi}}{\xi} d\xi = \Gamma \frac{k}{2\pi b} I = \frac{L_{\pi}}{\rho U 2\pi b} kI,$$

где введено обозначение

$$I = e^{i(3/2)k} \left[\int_0^{\infty} \frac{\sin k\xi}{\xi} d\xi + i \int_0^{\infty} \frac{\cos k\xi}{\xi} d\xi \right].$$

Этой модели соответствует аппроксимация функции Теодорсена по формуле

$$C(k) \approx \frac{1}{1+kI}.$$

Требование о том, чтобы это приближенное выражение точно совпадало с функцией Теодорсена, позволяет найти параметр v .

При этом получаются два значения v_s и v_c для интегралов соответственно с синусом и косинусом, входящих в действительную и мнимую части выражения (I). Существенное значение имеет параметр v_c , предотвращающий расходимость интеграла с косинусом. При малых частотах этот параметр стремится к пределу, равному $1/2$. Значения v_s и v_c в зависимости от приведенной частоты показаны на рис. 10.6. В диапазоне $0 \leq k \leq 1$ значение $v = 1/2$ хорошо аппроксимирует

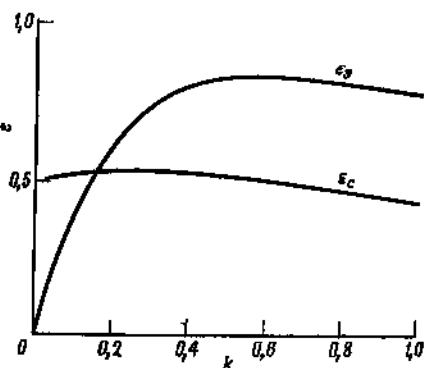


Рис. 10.6. Значения пределов в интегралах скорости, индуцируемой близкими вихрями.

кривые (особенно ту, которая соответствует косинусному интегралу). Таким образом, из полученных Миллером результатов можно заключить, что начало вихревой пелены, соответствующей модели несущей линии, должно располагаться на линии, находящейся ниже по потоку от линии вычисления скоростей на четверть хорды ($vb \approx b/2 \approx c/4$).

Влияние дискретности аппроксимации пелены поперечных вихрей исследовано в работе [Р.65]. Винтовую вихревую пелену лопасти можно представить решеткой из прямолинейных отрезков вихрей конечной интенсивности. В теории профиля

такой решетке соответствовала последовательность точечных свободных вихрей (рис. 10.7), причем расстояние между вихрями было равно $d = 2\pi U/N\omega$, где N — число вихрей на период колебаний. Индуктивная скорость определялась N раз в течение оборота винта. Дискретная система свободных вихрей следа физически соответствовала ступенчатому изменению циркуляции присоединенных вихрей. Расстояние D от первого свободного вихря следа до задней кромки варьировалось. Были определены отношения нестационарной подъемной силы и момента к их квазистационарным составляющим для данной модели и сопоставлены с аналогичными отношениями, определяемыми функцией Теодорсена при колебаниях профиля по

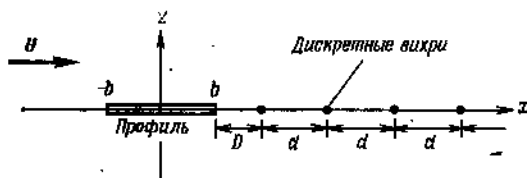


Рис. 10.7. Дискретная вихревая модель следа в теории тонкого профиля.

вертикали и по углу атаки с различными частотами. Выяснилось, что при $D = d$ нельзя достичь хороших результатов даже при большом числе точек на период колебаний. Однако если приблизить все вихри к задней кромке, приняв $D = d/3$, то в представляющем интерес диапазоне частот получаются вполне удовлетворительные результаты. В связи с этим было сделано заключение, что при моделировании пелены вихрей несущего винта сеткой прямолинейных вихревых отрезков следует сместить поперечные свободные вихри к лопасти примерно на 70% расстояния между ними с тем, чтобы первый такой вихрь оказался ближе к задней кромке лопасти. Интенсивность присоединенных вихрей обычно определяется через интервалы времени, соответствующие прохождению профилем пути d . Вихри модельной пелены помещаются в точках, расположенных посередине между точками определения циркуляции. При этом расстояние между присоединенным и ближайшим свободным вихрями составляет $d/2$, что дает $D = d/2$ — $3b$.

В работе [D.14] показано, что расчет подъемной силы и момента при высоких частотах может быть уточнен, если вихревой след, соответствующий нескольким первым дискретным элементам сетки, представить в виде непрерывного слоя вихрей (рис. 10.8). Были подсчитаны нагрузки для такой модели и проведено их сравнение с теоретическими нагрузками, определяемыми функцией Теодорсена. Этот расчет не соответствовал

схеме несущей линии, поскольку учитывалось распределение индуктивных скоростей по хорде. Однако след был представлен приближенной моделью. Первые два дискретных вихря заменялись непрерывным слоем вихрей (рис. 10.8). Распределение завихренности $\gamma_{\text{в}}$ пелены было задано в виде полинома, полученного по распределению нагрузки. Найдено, что подъемная сила и момент приближаются к определяемым функцией Теодорсена, если использовать от 5 до 8 точек на период колебаний. Повышение точности по сравнению с методом дискретных вихрей в чистом виде (даже с упомянутым

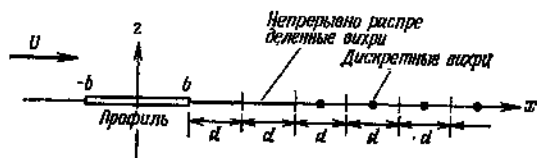


Рис. 10.8. Модель вихревого следа, состоящего из непрерывных и дискретных вихревых элементов.

выше смещением вихрей к задней кромке) весьма значительно, так что та же точность достигается с существенно меньшим числом точек.

Итак, расчет нагрузок на лопасти несущего винта по теории несущей линии связан с определением индуктивных скоростей в сечениях от продольных и поперечных вихрей следа. Для определения скорости притекания потока к сечению лопасть заменяется присоединенным вихрем, расположенным вдоль линии четвертой хорды, а продольные свободные вихри, образующиеся вследствие изменения подъемной силы по размаху, продлеваются до присоединенного вихря. Индуктивная скорость подсчитывается в месте расположения присоединенного вихря. Простейшим и экономным в вычислительном отношении представлением сложной системы свободных вихрей лопасти является сетка из вихревых элементов конечной длины. Свернувшиеся концевые вихревые жгуты лопастей хорошо описываются сосредоточенным вихрем. На основе проведенного выше исследования обтекания профиля можно заключить, что модель несущей линии применима и при наличии в следе поперечных вихрей. При адекватном представлении расположенного близ лопасти участка пелены вихрей нестационарные аэродинамические эффекты могут быть рассчитаны достаточно верно, несмотря на то, что индуктивная скорость определяется лишь в одной точке по хорде (на присоединенном вихре). Для повышения точности результатов расчета пелену поперечных вихрей следует обрывать, не доходя до присоединенного вихря, на четверть хорды. Непрерывное распределение вихрей сле-

дует сохранять лишь на участке пелены, соответствующем одному или двум шагам перемещения по азимуту; остальные ее участки могут быть представлены дискретными вихрями. Продольные и дальние поперечные вихри с удовлетворительной точностью можно заменять сеткой дискретных вихрей. Непрерывное распределение вихрей может потребоваться при моделировании вновь приближающихся к лопасти участков пелены (не считая концевых вихревых жгутов), если они подходят к ней достаточно близко, а также в других случаях, где взаимодействие пелены и лопасти оказывается существенным.

10.4. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ПРОФИЛЯ ПРИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ВО ВРЕМЕНИ СКОРОСТИ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА

При полете вертолета вперед скорость потока, набегающего на сечение лопасти, периодически меняется во времени:

$$u_T = r + \mu \sin \psi = r \left(1 + \frac{\mu}{r} \sin \psi \right).$$

При больших значениях характеристики режима, а также для близких к оси вращения сечений лопасти меняющаяся с частотой оборотов составляющая скорости довольно велика по сравнению со средним ее значением. В таких случаях изменение скорости потока во времени должно учитываться в нестационарной теории профиля для определения как его непосредственного воздействия, так и косвенного влияния через образующуюся пелену вихрей. Такое рассмотрение возможно лишь в случае $\mu/r < 1$. При $\mu/r > 1$ сечение лопасти проходит через зону обратного течения, и простая модель пелены оказывается неприемлемой.

Рассмотрим модель обтекания профиля, описанную в разд. 10.2. Для учета изменения во времени скорости U набегающего на профиль потока требуется несколько видоизменить проведенный там анализ. Дифференцирование по времени теперь относится и к скорости, так что

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{6\alpha}^{(1)} = -\pi b^2 \left(\frac{d}{dt} (Ua) + \dot{h} - ab\ddot{\alpha} \right) - U \int_b^{\infty} \left(1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \right) \gamma_{\omega} d\xi,$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{6\alpha}^{(2)} = -b \left(\frac{1}{2} + a \right) \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{6\alpha}^{(1)} - \frac{1}{2} \pi b^3 \left(\frac{d}{dt} (Ua) + \dot{h} + b \left(\frac{1}{4} - a \right) \ddot{\alpha} \right) + \frac{U}{2} \int_b^{\infty} \gamma_{\omega} (\xi - \sqrt{\xi^2 - b^2}) \left(\sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} - 1 \right) d\xi.$$

Выражения для подъемной силы и момента приобретают вид

$$L = L_{\text{ц}} + L_{\text{оц}} =$$

$$= L_Q + \rho U \int_b^{\infty} \frac{b}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_{\omega} d\xi + \rho \pi b^2 \left(\frac{d}{dt} (U\alpha) + \dot{h} - ab\ddot{\alpha} \right),$$

$$M = b \left(\frac{1}{2} + a \right) L + M_Q =$$

$$= b \left(\frac{1}{2} + a \right) L - \frac{1}{2} \rho \pi b^3 \left[U\dot{\alpha} + \frac{d}{dt} (U\alpha) + \dot{h} + b \left(\frac{1}{4} - a \right) \ddot{\alpha} \right],$$

где, как и ранее, $L_Q = \rho U 2\pi b \left[U\alpha + \dot{h} + b\ddot{\alpha} \left(\frac{1}{2} - a \right) \right]$. Единственное изменение в этих формулах состоит в появлении члена $U\alpha$ в выражениях для бесциркуляционных составляющих подъемной силы и момента. Квazистационарная подъемная сила и циркуляционная составляющая подъемной силы по-прежнему описываются формулами

$$L_Q = -\rho U \int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} \gamma_{\omega} d\xi,$$

$$L_{\text{ц}} = -\rho U \int_b^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_{\omega} d\xi.$$

Для того чтобы выразить L_Q и $L_{\text{ц}}$ через функцию уменьшения подъемной силы, нужно знать зависимость γ_{ω} от ξ . Условие отсутствия перепада давлений на пелене дает

$$-\Delta p = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Delta \varphi = 0,$$

что может быть переписано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \gamma_{\omega} = 0.$$

Отсюда находим решение:

$$\gamma_{\omega} = \gamma_{\omega} \left(\xi - \int_{t_0}^{\infty} U dt \right).$$

В случае постоянной скорости набегающего потока вихри пелены переносятся с постоянной скоростью, и, как и ранее, γ_{ω} является функцией аргумента $\xi - Ut$. Применительно к лопасти винта при полете вперед имеем $U = r + \mu \sin \psi$, так что

$$\gamma_{\omega} = \gamma_{\omega} (\xi - r\psi + \mu \cos \psi),$$

где $\psi = \Omega t$ — безразмерное время.

Рассмотрим теперь случай периодического движения лопасти. Чтобы поле скоростей было периодическим, движение

лопасти должно быть суперпозицией гармоник с частотами, кратными основной частоте Ω изменения скорости набегающего потока. Период изменения течения тогда равен $2\pi/\Omega$. Интенсивность вихрей в следе должна быть периодической функцией ξ с длиной волны, равной расстоянию

$$\int_0^{2\pi} U d\psi = 2\pi r,$$

на которое переносится пелена за отрезок времени, равный периоду. Разлагая имеющую период $2\pi r$ функцию γ_w в ряд Фурье по ξ , получим

$$\gamma_w = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{wm}(\psi) e^{-im\xi/r}.$$

Поскольку γ_w должна быть функцией лишь $\xi - r\psi + \mu \cos \psi$, находим

$$\gamma_w = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_m e^{im(\psi - (\mu/r) \cos \psi) - im\xi/r},$$

где $\bar{\gamma}_m$ — постоянные. При $\mu = 0$ это выражение дает, как и ранее, $\gamma_w = \bar{\gamma} e^{i\omega(t - \xi/U)}$.

Выражение для интенсивности вихрей подставим в формулы для квазистационарной и циркуляционной составляющих подъемной силы и получим

$$L_Q = -\rho U \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_m e^{im(\psi - \frac{\mu}{r} \cos \psi)} \int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} e^{-im\xi/r} d\xi,$$

$$L_u = -\rho U \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_m e^{im(\psi - \frac{\mu}{r} \cos \psi)} \int_b^{\infty} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} e^{-im\xi/r} d\xi.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in(\psi - \frac{\mu}{r} \cos \psi)} \left(1 + \frac{\mu}{r} \sin \psi\right) d\psi = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0, \end{cases}$$

для коэффициентов гармоник $\bar{\gamma}_m$ получаем следующее выражение:

$$\bar{\gamma}_m = \frac{-\int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\mu}{r} \sin \psi\right) e^{-im(\psi - \frac{\mu}{r} \cos \psi)} L_Q d\psi}{2\pi \rho U \int_b^{\infty} \sqrt{\frac{\xi + b}{\xi - b}} e^{-im\xi/r} d\xi}.$$

Отсюда для циркуляционной подъемной силы находим

$$L_{\pi} = 2\pi r U b \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\left(\psi - \frac{\mu}{r} \cos \psi\right)} C(mb/r) \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\mu}{r} \sin \psi\right) e^{-im\left(\psi - \frac{\mu}{r} \cos \psi\right)} Q d\psi.$$

Здесь $C(mb/r)$ — функция Теодорсена приведенной частоты $k = mb/r$ (что соответствует $\omega = m\Omega$ и средней скорости $U = \Omega r$), а

$$Q = \frac{L_Q}{2\pi r U b} = Ua + h + b\dot{a} \left(\frac{1}{2} - a\right).$$

Представляя квазистационарную циркуляцию Q в виде ряда Фурье

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n e^{in\psi},$$

можно записать выражение для подъемной силы в виде

$$L_{\pi} = 2\pi r U b \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n e^{in\psi} C_{\mu}(n, \psi),$$

аналогичном полученному ранее для случая обтекания профиля с постоянной скоростью. Через $C_{\mu}(n, \psi)$ здесь обозначена модифицированная функция Теодорсена, соответствующая скорости потока $U = r + \mu \sin \psi$ и движению лопасти по n -й гармонике:

$$C_{\mu}(n, \psi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\left(\psi - \frac{\mu}{r} \cos \psi\right) - in\psi} C(mb/r) \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\mu}{r} \sin \psi\right) e^{-im\left(\psi - \frac{\mu}{r} \cos \psi\right) + in\psi} d\psi.$$

При постоянной скорости потока ($\mu = 0$) в этом выражении не равен нулю лишь интеграл при $m = n$, так что $C_{\mu=0}(n, \psi) = C(nb/r)$. Можно также представить L_{π} в следующем виде:

$$L_{\pi} = 2\pi r U b \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{ln} e^{il\psi} \right\},$$

где

$$C_{ln} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\left(\psi - \frac{\mu}{r} \cos \psi\right) - il\psi} d\psi \right] C(mb/r) \times \\ \times \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\mu}{r} \sin \psi\right) e^{-im\left(\psi - \frac{\mu}{r} \cos \psi\right) + in\psi} d\psi \right],$$

т. е. C_{1n} — коэффициенты гармоник в разложении $e^{in\psi} C_\mu(n, \psi)$ в ряд Фурье. Из последнего выражения видно, что при изменении скорости потока во времени возникают связи между гармониками подъемной силы и циркуляции, обусловленные влиянием вихревого следа. Интегралы, входящие в функцию уменьшения подъемной силы, при переменной скорости потока могут быть выражены через бесселевы функции. В качестве типичного примера на рис. 10.9 показаны графики $C_\mu(n, \psi)$ при $n = 2$ и $b/r = 0,04$. В случае скорости потока, меняющейся с частотой вращения винта, функция C_μ имеет ту же основную частоту изменения по ψ . Сильнее всего нестационарность проявляется вблизи

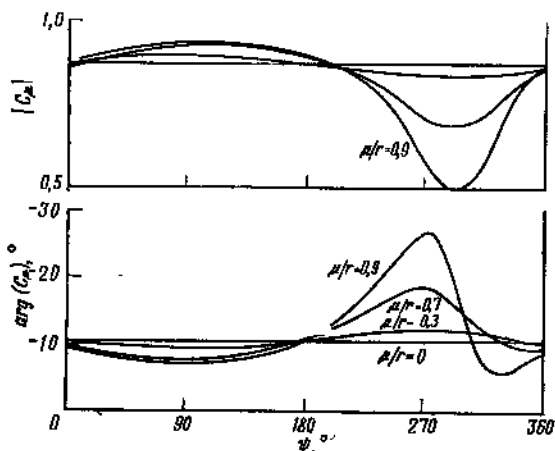


Рис. 10.9. Функция уменьшения коэффициента подъемной силы профиля при изменяющейся по времени скорости набегающего потока. Вторая гармоника, $b/r = 0,04$.

зоны обратного обтекания, при $\psi = 270^\circ$. Диапазоны представляющих наибольший интерес значений радиусов сечений и скоростей полета соответствуют изменению μ/r в пределах от 0 до 0,7. Для значений $\mu/r > 1$ модель непригодна, так как сечение лопасти попадает в зону обратного обтекания. При малых значениях μ/r функция уменьшения подъемной силы приближенно описывается выражением

$$\begin{aligned}
 C_\mu(n, \psi) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i(m-n)\psi} [1 - im(\mu/r) \cos \psi] C(mb/r) \times \\
 &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\psi} \left[1 + \frac{\mu}{r} (\sin \psi + im \cos \psi) \right] d\psi = \\
 &= C_n + \frac{\mu}{r} \frac{in}{2} [\cos \psi (C_{n+1} + C_{n-1} - 2C_n) + i \sin \psi (C_{n+1} - C_{n-1})],
 \end{aligned}$$

где $C_n = C(nb/r)$. Если отношение b/r также мало, это выражение дает

$$C_\mu(n, \psi) \approx C(nb/r) - \left[\frac{nb}{r} \frac{\mu}{r} \sin \psi \right] C'(nb/r) = C[nb/(r + \mu \sin \psi)].$$

Таким образом, при малых изменениях скорости потока (малая величина $nb\mu/r^2$) модифицированная функция уменьшения подъемной силы C_μ близка к функции Теодорсена $C(k)$, причем входящую в нее приведенную частоту следует определять по мгновенному значению скорости потока ($k = \omega b/U$). Такое приближение достаточно точно при умеренных n . Приведенные на рис. 10.9 графики построены именно таким образом. На стороне наступающей лопасти большие скорости уменьшают приведенную частоту, и функция уменьшения подъемной силы приближается к 1. На стороне отступающей лопасти вблизи задней кромки образуется интенсивный след из поперечных вихрей, что вызывает значительное снижение подъемной силы.

Итак, изменение скорости потока следующим образом влияет на нестационарные аэродинамические силы профиля: появляются дополнительные бесциркуляционные составляющие подъемной силы и момента, связанные с производной $d(U\alpha)/dt$; возникает связь между гармониками квазистационарной и нестационарной циркуляции, вызванная влиянием вихревого следа; функция уменьшения подъемной силы существенно изменяется вследствие разрежения и сгущения завихренности в следе. В соответствии с изменением скорости обтекания сечений лопасти при полете вперед все три эффекта имеют периодический характер с основной частотой, равной частоте вращения винта. Выражения членов, соответствующих бесциркуляционным подъемной силе и моменту, справедливы для любых изменений U . Простая аппроксимация $C_\mu(n, \psi) \approx C(k)$ при приведенной частоте, определяемой по местной скорости, дает хорошие результаты до значений $\mu/r = 0,7$. При малых значениях μ/r можно воспользоваться более грубой аппроксимацией $C_\mu(n, \psi) = C(nb/r)$, в которой приведенная частота построена по средней скорости. Эта аппроксимация не учитывает влияния переменной скорости потока при построении вихревого следа.

Другие подходы к нестационарной теории профиля при изменяющейся скорости потока описаны в работах [I.3, I.4, G.108].

10.5. ПЛОСКАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ ОБТЕКАНИЯ СЕЧЕНИЯ ЛОПАСТИ ВИНТА

На режиме висения или полета по вертикали система вихрей винта состоит из вихревых винтовых поверхностей, отходящих вниз по потоку от каждой из лопастей. При нестационарном

движении лопастей на этих поверхностях находятся и поперечные свободные вихри. У слабонагруженного винта вихревые поверхности располагаются вблизи диска винта, и лопасти движутся рядом с ними. Таким образом, в этом случае не все вихри уносятся вниз по потоку, как это имеет место в случае профиля крыла, и для уточнения расчетов нестационарных нагрузок должны приниматься во внимание поверхности из поперечных вихрей, находящиеся под винтом. Так как при больших скоростях протекания или при полете вперед вихри быстро уносятся от лопастей, повторное влияние пелены вихрей на лопасть в первую очередь относится к вертикальному полету. Поскольку лопасти винта вертолета имеют большое удлинение, расчет нагрузок можно вести по схеме несущей линии, причем повторное

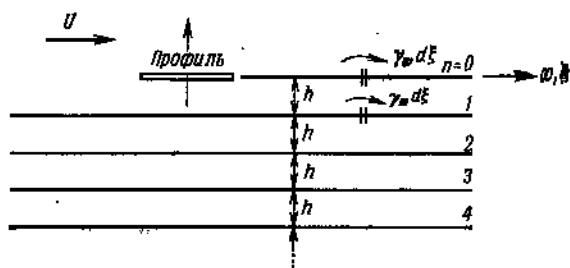


Рис. 10.10. Двумерная нестационарная модель вихревого следа вращающейся лопасти (однолопастный винт).

влияние пелены может быть включено в нестационарную теорию профиля. Части пелены, достаточно удаленные от сечения лопасти, оказывают на него незначительное влияние. Поэтому можно ограничиться моделированием расположенных вблизи лопасти вихрей, которые при малых скоростях протекания лежат на поверхностях, почти параллельных плоскости диска. Это делает возможным построение двумерной нестационарной модели.

Такая модель нестационарного обтекания сечений винта на режиме висения, учитывающая повторное влияние пелены вихрей, развита в работе [L.113]. Плоская система вихрей, аппроксимирующая соответствующие винтовые поверхности, показана на рис. 10.10. Сначала рассмотрим однолопастный винт, считая, что вся завихренность сходит с единственной его лопасти. Сечение лопасти представлено тонким профилем, с задней кромки которого сходит (и простирается до бесконечности) след, состоящий из поперечных вихрей. Остальные винтовые вихревые поверхности, проходящие под лопастью, моделируются серией плоских параллельных вихревых слоев с расстоянием h между ними, причем каждый слой тянется до бесконечности вверх и

вниз по потоку. Все вихревые слои параллельны скорости набегающего потока U , которая здесь принимается постоянной. Если не касаться определения индуктивной скорости, то такая модель ничем не отличается от рассмотренной в разд. 10.2.

В предположении о гармоническом движении лопасти с частотой ω интенсивность слоя вихрей непосредственно за лопастью ($n = 0$), как и ранее, определяется выражением $\gamma_w = \bar{\gamma}_w e^{i\omega(t-x/U)}$ (рис. 10.10). Поскольку слои вихрей под профилем описывают последовательные витки одной и той же винтовой поверхности, их интенсивность изменяется так же, как у первого слоя. Выберем некоторую точку на первом слое с координатой x . Продвижение на один оборот по винтовой поверхности соответствует переходу в расположенную на нижележащем слое точку также с координатой x . Таким образом, интенсивность вихрей является функцией величины $(x + n\Delta x)$, где n — номер слоя, а Δx — расстояние, на которое переносятся вихри пелены за один оборот:

$$\Delta x = 2\pi r = 2\pi(\Omega r)/\Omega = 2\pi U/\Omega.$$

В этом случае увеличение x на Δx эквивалентно возрастанию n на 1. Поскольку все вихри переносятся вниз по потоку со скоростью U , интенсивность вихревых слоев также является функцией $t - x/U$. В случае гармонического движения интенсивность сходящих вихрей изменяется во времени как $e^{i\omega t}$, что приводит к выражению

$$\gamma_{w_n} = \bar{\gamma}_w e^{i\omega(t-x/U - n2\pi/\Omega)} = \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} e^{-ikx/b} e^{-in2\pi\omega/\Omega},$$

где γ_{w_n} — интенсивность n -го вихревого слоя. При целочисленном значении отношения ω/Ω нагрузка меняется с частотой, кратной оборотам винта. Так как при этом $e^{-in2\pi\omega/\Omega} = 1$, интенсивность вихрей во всех слоях находится в одной и той же фазе.

Дальнейший анализ можно вести аналогично выполненному в разд. 10.2. Индуктивная скорость для рассматриваемой модели описывается выражением

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_b^\infty \frac{\gamma_w d\xi}{x - \xi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{w_n}(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + h^2 n^2} d\xi,$$

второе слагаемое в правой части которого отражает повторное влияние пелены вихрей. Подставляя в это слагаемое выражение

Для γ_{w_n} получим

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{w_n}(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + h^2 n^2} d\xi = \\ &= \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i n 2\pi \omega / \Omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i k \xi / b} (x-\xi)}{(x-\xi)^2 + h^2 n^2} d\xi = \\ &= \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2} e^{-i k x / b} e^{-n [(k h / b) + i 2\pi (\omega / \Omega)]} = \frac{i}{2} \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} e^{-i k x / b} W, \end{aligned}$$

где

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n [(k h / b) + i 2\pi (\omega / \Omega)]} = 1 / (e^{k h / b} e^{i 2\pi \omega / \Omega} - 1).$$

Для определения нестационарных нагрузок на профиле разложим индуцируемую пеленой скорость в ряд

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos n\theta,$$

где $x = b \cos \theta$. Используя представление бесселевой функции

$$J_n(k) = \frac{i^n}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-i k \cos \theta} \cos n\theta d\theta,$$

получим

$$\Delta\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Delta\lambda d\theta = \frac{i}{2} \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} W J_0(k),$$

$$\Delta\lambda_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Delta\lambda \cos \theta d\theta = \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} W J_1(k),$$

$$\Delta\lambda_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Delta\lambda \cos 2\theta d\theta = -i \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} W J_2(k),$$

откуда

$$\Delta \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) = \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} W \frac{1}{2} (J_1(k) + i J_0(k)),$$

$$\frac{b}{U} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \left(\lambda_0 - \frac{1}{2} \lambda_2 \right) = -\bar{\gamma}_w e^{i\omega t} W \frac{k}{2} (J_2(k) +$$

$$+ J_0(k)) = -\bar{\gamma}_w e^{i\omega t} W J_1(k).$$

Добавки к циркуляции и подъемной силе профиля определяются формулами

$$\Delta \Gamma = -2\pi b \Delta \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) = -2\pi b \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} W \frac{1}{2} (J_1(k) + iJ_0(k)),$$

$$\Delta L = -\rho U 2\pi b \left[\Delta \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) + \frac{1}{2} \frac{b}{U} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \left(\lambda_0 - \frac{1}{2} \lambda_2 \right) \right] =$$

$$= -\rho U 2\pi b \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} W (i/2) J_0(k).$$

В результате полная подъемная сила равна

$$L = L_Q + L_{\text{сн}} + \rho U \int_b^\infty \frac{b}{\sqrt{\xi^2 - b^2}} \gamma_w d\xi - \rho U 2\pi b \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} W \frac{1}{2} J_0,$$

где L_Q и $L_{\text{сн}}$ вычисляются по формулам разд. 10.2. Для полной циркуляции получим выражение

$$\Gamma = \frac{L_Q}{\rho U} + \int_b^\infty \left(\sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} - 1 \right) \gamma_w d\xi - 2\pi b \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} W \frac{1}{2} (J_1 + iJ_0) =$$

$$= - \int_b^\infty \gamma_w d\xi,$$

что дает

$$L_Q = -\rho U \int_b^\infty \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} \gamma_w d\xi + \rho U 2\pi b \bar{\gamma}_w e^{i\omega t} W \frac{1}{2} (J_1 + iJ_0).$$

Подставляя сюда $\gamma_w = \bar{\gamma}_w e^{i\omega(t-\xi/b)}$, можно выразить $\bar{\gamma}_w$ через L_Q , что позволяет выразить через L_Q и циркуляционную подъемную силу:

$$L = C' L_Q + L_{\text{сн}},$$

где

$$C'(k, \omega/\Omega, h) = 1 + \frac{- \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-ik\xi} d\xi + \pi i J_0 W}{\int_1^\infty \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} e^{-ik\xi} d\xi - \pi (J_1 + iJ_0) W} =$$

$$= \frac{\int_1^\infty \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-ik\xi} d\xi - \pi J_1 W}{\int_1^\infty \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} e^{-ik\xi} d\xi - \pi (J_1 + iJ_0) W} =$$

$$= \frac{H_1^{(2)}(k) + 2J_1(k) W}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k) + 2(J_1(k) + iJ_0(k)) W}$$

представляет собой введенную Лоуи функцию уменьшения подъемной силы. Таким образом, в рамках рассмотренной плоской модели учет повторного влияния пелены поперечных свободных вихрей сводится к замене функции Теодорсена в формулах для нестационарных аэродинамических нагрузок профиля функцией Лоуи. Модификация функции уменьшения подъемной силы связана с появлением множителя W , который для однолопастного винта определяется формулой

$$W(kh/b, \omega/\Omega) = 1/(e^{kh/b} e^{i2\pi(\omega/\Omega)} - 1).$$

При увеличении h до бесконечности величина W стремится к нулю и функция C' превращается в обычную функцию Теодор-

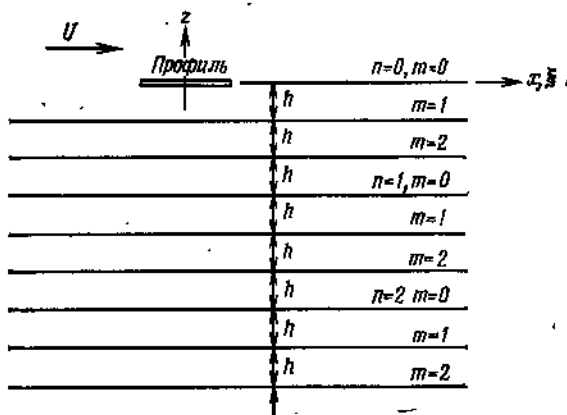


Рис. 10.11. Двумерная нестационарная модель вихревого следа N -лопастного винта.

сена $C(k)$. Помимо приведенной частоты k построенная модель обтекания характеризуется параметрами h/b и ω/Ω . Величина h/b задает расстояние между вихревыми поверхностями, а ω/Ω определяет сдвиг фаз завихренности последовательных вихревых слоев. При целочисленном значении отношения ω/Ω интенсивность вихрей всех слоев изменяется с одинаковой фазой. На сдвиг фаз влияет лишь дробная часть отношения ω/Ω .

Рассмотрим теперь случай N -лопастного винта. Как и ранее, двумерная модель пелены вихрей будет состоять из ряда плоских параллельных вихревых слоев, расположенных под лопастью на расстоянии h друг от друга. Но теперь пелене, сошедшей с рассматриваемой лопасти, соответствует лишь каждый N -й слой. Пусть, как и ранее, n обозначает номер оборота винта, а через $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ обозначим номер лопасти (рис. 10.11). Заметим, что при $n=0$ каждая из вихревых поверхностей начинается выше по потоку от лопасти, что в плоской

модели отображается продолжением вихревого слоя до бесконечности. Интенсивность поперечных вихрей пелены данной лопасти (для фиксированного m) по-прежнему является функцией $(x + n\Delta x) = (x + n2\pi U/\Omega)$. При определении связей между интенсивностями свободных вихрей, соответствующих разным лопастям, примем, что все лопасти движутся одинаково, но каждая лопасть повторяет движение предыдущей с запаздыванием на время $\Delta t = \Delta\psi/\Omega$. При этом переход по вертикали вниз в следующий вихревой слой соответствует смещению вниз по потоку на расстояние $\Delta x/N = U\Delta t$, где $\Delta x/N$ — расстояние между соответствующими сечениями лопастей.

Интенсивность вихрей, как и ранее, должна быть функцией $x + m(\Delta x/N - U\Delta t)$. При гармоническом движении лопасти с частотой ω интенсивность слоев вихрей описывается выражением

$$\begin{aligned} \gamma_{wm} &= \bar{\gamma}_\omega e^{i\omega t} - \frac{x}{U} - n2\pi/\Omega + m\Delta\psi/\Omega - 2\pi m/N\Omega = \\ &= \bar{\gamma}_\omega e^{i\omega t} e^{-ikx/b} e^{-i2\pi(\omega/\Omega)[n + (m/N)(1 - N\Delta\psi/2\pi)]}. \end{aligned}$$

Тогда индуктивная скорость N -лопастного винта равна

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_b^\infty \frac{\gamma_{wm} d\xi}{x - \xi} + \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{wm}(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + h^2 m^2} d\xi + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{wm}(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + h^2 (Nn + m)^2} d\xi. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение для γ_{wm} , получим

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2\pi} \bar{\gamma}_\omega e^{i\omega t} e^{-i2\pi(\omega/\Omega)[n + (m/N)(1 - N\Delta\psi/2\pi)]} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik\xi/b}(x - \xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + h^2 (Nn + m)^2} \right\} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \bar{\gamma}_\omega e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik\xi/b}}{x - \xi} d\xi, \end{aligned}$$

или

$$\Delta\lambda = i \frac{1}{2} \bar{\gamma}_\omega e^{i\omega t} e^{-kh/b} W,$$

где обозначено

$$\begin{aligned} W &= -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} e^{-i2\pi(\omega/\Omega)[n + (m/N)(1 - N\Delta\psi/2\pi)]} e^{-kh(Nn + m)/b} = \\ &= \frac{1 + \sum_{m=1}^{N-1} (e^{kNh/b} e^{i2\pi(\omega/\Omega)} - 1 - m/N) e^{im\Delta\psi/\Omega}}{e^{kNh/b} e^{i2\pi(\omega/\Omega)} - 1}. \end{aligned}$$

Полученное выражение для $\Delta\lambda$ имеет ту же форму, что и ранее для случая однолопастного винта. Поэтому нестационарные нагрузки и характеризующая уменьшение подъемной силы функция C' также определяются полученными ранее формулами, и специфика данного случая отражается лишь входящей в C' функцией W .

Введенное в гл. 8 фурье-преобразование координат означает переход к степеням свободы винта как твердого тела. Каждая степень свободы в невращающейся системе координат (общий шаг, циклический шаг и безреакционное движение) определяет относительное движение всех N лопастей винта, а значит, и соответствующую зависимость между интенсивностями образующихся за лопастями вихревых следов. Поэтому входящая в функцию уменьшения подъемной силы C' величина W для каждой из таких степеней свободы должна определяться отдельно. При изменении общего шага движение всех лопастей происходит в одной и той же фазе по времени, так что сдвиг по фазе в интенсивности пелены связан лишь с наличием угла между лопастями. При нулевом сдвиге фазы по времени ($\Delta\psi = 0$) имеем

$$W = 1/(e^{kh/b} e^{i2\pi\omega/N\Omega} - 1).$$

Таким образом, изменение общего шага дает те же нагрузки, что у «эквивалентного» однолопастного винта с расстоянием между вихревыми следами $h_{\text{эkv}} = h$ и относительной частотой $(\omega/\Omega)_{\text{эkv}} = \omega/N\Omega$. Отметим, что у однолопастного винта сдвиг по фазе между интенсивностями соседних слоев вихрей зависит лишь от одного параметра (ω/Ω) , тогда как у N -лопастного винта — от двух параметров ($\Delta\psi$ и ω/Ω). Поэтому интенсивность всех слоев будет изменяться в одной и той же фазе [при целочисленной величине $(\omega/\Omega)_{\text{эkv}}$] только в том случае, когда колебательное изменение общего шага лопастей будет происходить с частотой, кратной $N\Omega$. Для безреакционной формы ($N/2$ -я форма, которая, как показано в разд. 8.4.1, может существовать лишь при четном числе лопастей) последовательные лопасти движутся одинаково, но в противоположных направлениях. Это соответствует сдвигу по фазе на 180° , так что, полагая $\Delta\psi = \pi(\Omega/\omega)$, получим

$$W = 1/(e^{kh/b} e^{i2\pi(\omega/N\Omega + 1/2)} - 1).$$

Таким образом, безреакционная форма также соответствует эквивалентному однолопастному винту при $h_{\text{эkv}} = h$ и $(\omega/\Omega)_{\text{эkv}} = (\omega/N\Omega) + 1/2$. Циклический шаг (в общем случае n -я синусная или косинусная гармоника) задает движение, которое одинаково для всех лопастей на данном азимуте, так что

$\Delta\psi = 2\pi/N$. В результате получаем

$$W = \frac{1 + e^{khN/b} e^{i2\pi\omega/\Omega} \sum_{m=1}^{N-1} (e^{-kh/b})^m}{e^{khN/b} e^{i2\pi\omega/\Omega} - 1}$$

При целочисленной величине ω/Ω это выражение сводится к

$$W = 1/(e^{kh/b} - 1).$$

Таким образом, для важного случая гармоник с частотами, кратными частоте вращения винта, рассмотрение циклических

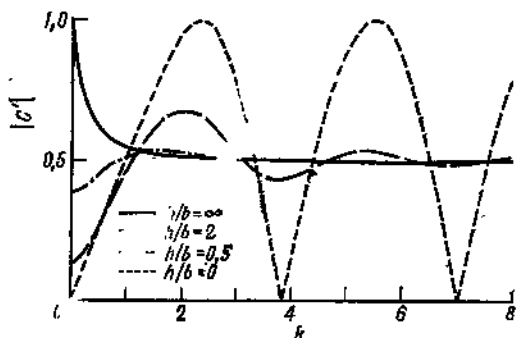


Рис. 10.12. Модуль функции Лоуи (характеризующей уменьшение подъемной силы) в зависимости от приведенной частоты и расстояния между вихревыми следами при целых значениях ω/Ω .

форм колебаний сводится к случаю эквивалентного однолопастного винта с $h_{\text{экв}} = h$, лопасть которого совершает гармонические колебания, частоты $\omega_{\text{экв}}$ которых также кратны Ω .

Проанализируем теперь поведение функции уменьшения подъемной силы Лоуи

$$C' = F' + iG' = \frac{H^{(2)} + 2I_1 W}{H_1^{(2)} + iH_0^{(2)} + 2(I_1 + iJ_0) W}$$

В соответствии с указанной выше эквивалентностью N -лопастного и однолопастного винтов с одинаковой структурой следа и значением ω/Ω , обеспечивающим требуемое соотношение фаз следов, достаточно рассмотреть однолопастный винт. Для такого винта имеем

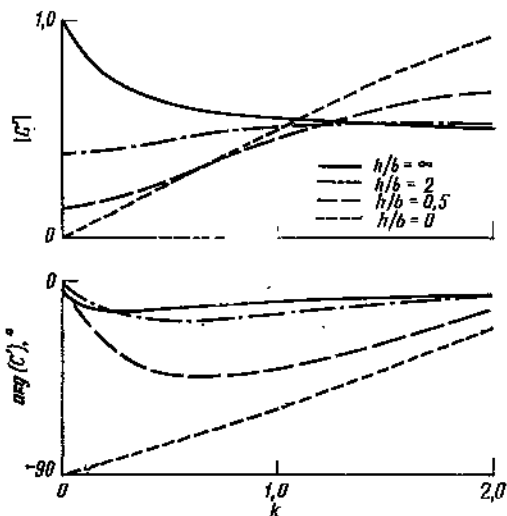
$$W = 1/(e^{kh/b} e^{i2\pi\omega/\Omega} - 1).$$

Графики модуля и аргумента функции C' для целых и полуцелых значений отношения ω/Ω показаны на рис. 10.12 ÷ 10.14. В предельном случае $h \rightarrow \infty$ имеем $W = 0$, что соответствует обращению C' в функцию Теодорсена $C(k)$. Предельный случай $h = 0$ не имеет физического смысла, но характеризует поведение функции C' при малых расстояниях между вихревыми следами. Полагая $h = 0$, получим

$$W = 1/(e^{i2\pi\omega/\Omega} - 1),$$

так что при целых значениях отношения ω/Ω имеем $C' = J_1/(J_1 + iJ_0)$, а для полужелых значений $C' = Y_1/(Y_1 + iY_0)$. Входящие в эти выражения бесселевы функции придают изменению функции C' при больших k колебательный характер. При этом действительная часть F' этой функции колеблется в пределах $0 \div 1$, а мнимая часть C' — от $-0,5$ до $0,5$ с периодом π . Отметим, что при некоторых значениях k модуль функции C'

Рис. 10.13. Модуль и аргумент функции Лоуи в зависимости от приведенной частоты и расстояния между вихревыми следами при целых значениях ω/Ω .



обращается в нуль. При больших значениях приведенной частоты k общее поведение функции уменьшения подъемной силы описывается приближенной зависимостью

$$C' \simeq \frac{1}{2} (1 + ie^{-kh/b} e^{-i2\pi\omega/\Omega} e^{i2k}).$$

Таким образом, наблюдаемое на рис. 10.12 изменение модуля C' характерно для больших k . При этом колебания $|C'|$ имеют период π , а их амплитуда уменьшается с увеличением расстояния h между вихревыми следами. При малых приведенных частотах функция уменьшения подъемной силы описывается приближенной формулой

$$C' = \frac{1 - i \frac{\pi}{2} k^2 W}{1 + \frac{\pi}{2} k - ik \left(\ln \frac{k}{2} + \gamma \right) + \left(1 - \frac{i}{2} k \right) \pi k W},$$

где γ — постоянная Эйлера. При нецелых значениях отношения ω/Ω величина W для всех h имеет порядок 1, так что

с точностью до членов первого порядка относительно k имеем

$$C' = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{2} k - ik \left(\ln \frac{k}{2} + \gamma \right) + \pi k W}$$

Заметим, что независимо от значения h эта формула при $k = 0$ дает $C' = 1$ (рис. 10.14). Однако при целочисленных значениях

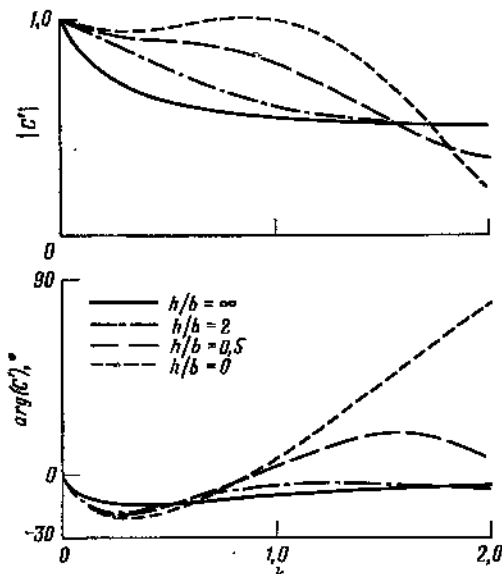


Рис. 10.14. Модуль и аргумент функции Лоуи в зависимости от приведенной частоты и расстояния между вихревыми следами при полупелых значениях ω/Ω .

отношения ω/Ω имеем $W \approx b/kh$, так что с точностью до членов первого порядка относительно k справедлива формула

$$C' = 1/(1 + \pi k W) = 1/[1 + \pi/(h/b)].$$

Результаты, полученные для малых приведенных частот, представляют наибольший интерес для анализа вертолетных винтов. При нецелых значениях ω/Ω вследствие повторного влияния следа появляется лишь поправка к функции Теодорсена порядка k . Однако при колебаниях по гармоникам с частотами, кратными частоте вращения винта, влияние вихревых следов проявляется в падении функции уменьшения подъемной силы при малых частотах до величины $C' = h/(h + \pi b)$. Из графиков на рис. 10.13 можно усмотреть, что эту формулу нулевого порядка относительно k можно использовать при малых k (примерно до 0,5). Существенно, что теперь вследствие повторного влияния пелены $C'(0) \neq 1$. Действительно, при $h = 0$ имеем $C'(0) = 0$. Таким образом, при колебаниях по гармоникам с частотами, кратными частоте вращения винта, вследствие точного совпаде-

ния фаз интенсивностей последовательных вихревых следов происходит существенное уменьшение нестационарных нагрузок. Это относится к таким рассматриваемым в динамике лопастей случаям, как циклическое управление и маховое движение лопастей, которые во вращающейся системе координат имеют частоту Ω , а также к колебательной неустойчивости типа флаттера, собственная частота которого равна $n\Omega$. Таким образом, можно отметить два основных случая повторного влияния вихревой пелены на функцию уменьшения подъемной силы. При больших приведенных частотах функция C' изменяется периодически с падением до нуля при малых расстояниях между вихревыми следами. Этот эффект больших k не играет существенной роли для аэродинамики несущего винта вертолета. Другой эффект имеет место при малых приведенных частотах и колебаниях по гармоникам с частотами, кратными частоте вращения винта. Функция C' в этом случае сильно уменьшается, что приводит к соответствующему уменьшению циркуляционных аэродинамических нагрузок при малых расстояниях между вихревыми следами.

Относительное расстояние h/b между вихревыми поверхностями определяется скоростью опускания винтовых поверхностей свободных вихрей. Принимая, что вблизи диска винта скорость их конвекции равна средней по диску винта индуктивной скорости, получим, что за оборот винта пелена опустится на величину $Nh = v(2\pi/\Omega)$, откуда

$$h/b = v2\pi/\Omega Nb = 4\lambda/\sigma.$$

Здесь λ — коэффициент протекания, а σ — коэффициент заполнения винта. Функция уменьшения подъемной силы при гармониках колебаний с малыми приведенными частотами k принимает вид

$$C' = 1/(1 + \pi\sigma/4\lambda).$$

Для вертолета на режиме висения характерно значение $\lambda \approx 0,07$. Это дает $h/b \approx 3 \div 4$, что соответствует значению $C' \approx 0,5$. Таким образом, уменьшение нестационарных нагрузок вследствие повторного влияния пелены оказывается большим, что серьезно влияет на нагрузки, управление лопастями и их устойчивость в критических условиях (при малых скоростях протекания и колебаниях по гармоникам с частотой, кратной частоте вращения винта). Уменьшение циркуляционной подъемной силы снижает реакцию винта на изменение общего шага и на циклический шаг. Оно уменьшает также демпфирование махового движения лопасти и ее изгибных колебаний в плоскости взмаха по различным формам, что приводит к увеличению этих колебаний под действием периодических нагрузок. Если ось лопасти не проходит через фокусы сечений, то повторное влияние пелены

сказывается и на демпфирующих моментах относительно оси ОШ.

Высшие гармоники нагружения лопастей несущего винта при полете вперед рассматривались в работе Миллера [М.125] (1964 г.), где было установлено, что неоднородность поля скоростей протекания потока через диск винта связана главным образом с наличием и формой концевых вихревых жгутов лопастей, интенсивность которых определяется средним значением подъемной силы винта¹⁾. Таким образом, доминирующую роль в образовании высоких гармоник нагрузки при полете вперед играют не поперечные, а продольные вихри. Следующим по важности фактором является изменение скоростей протекания вследствие влияния ближней к лопасти части ее следа. Миллер установил, что при очень малых значениях характеристики режима μ рассмотренные выше эффекты повторного влияния пелены весьма существенны. Однако при $\mu \approx 0,2$ сохраняется влияние лишь близкой к лопасти части следа, учитываемое функцией Теодорсена.

Нестационарная теория винта, по существу совпадающая с теорией Лоуи для однолопастного винта, изложена в работе [J.65]. В работе [Т.47] рассмотрен предельный критический случай нулевого расстояния между вихревыми поверхностями ($h = 0$). Таблицы функции Лоуи даны в работе [Р.63].

В работе [D.13] описывается экспериментальное исследование усиления изгибных колебаний модели лопасти несущего винта, в котором особое внимание уделялось изучению повторного влияния вихревого следа на аэродинамическое демпфирование таких колебаний по различным формам. Величина демпфирования махового движения лопасти на режиме висения определялась по ее вынужденным колебаниям при приложении моментов в плоскости взмаха и по переходным процессам. Получено хорошее соответствие с результатами теории Лоуи. Подтверждено получаемое расчетом уменьшение демпфирования гармоник с частотой, кратной частоте вращения винта, вследствие уменьшения определяющей нестационарную подъемную силу функции C' .

Измерение махового движения двухлопастного шарнирного винта при вынужденных колебаниях общего шага, а также при вертикальных колебаниях втулки проводилось в работе [Н.29]. При малых значениях общего шага отмечено заметное повторное влияние пелены при частоте, близкой к 2Ω , что и предсказывается теорией для таких изменений общего шага. При больших значениях общего шага влияние вихревых следов исчезало. Измеренные величины хорошо согласовались с полученными расчетом по теории Лоуи. Отмечено предсказываемое теорией снижение амплитуды махового движения при изменении общего

¹⁾ Ранее этот вывод сделан в работе [23]. — Прим. перев.

шага с частотой, близкой к 2Ω . (Это объясняется уменьшением возникающих при управлении общим шагом аэродинамических моментов относительно горизонтальных шарниров, а поскольку при колебаниях по второй гармонике доминируют инерционные члены, имеющее место снижение демпфирования влияет незначительно.) Колебания общего шага с частотой второй гармоники сопровождаются колебаниями лопастей со сравнительно небольшой амплитудой, так что повторное влияние пелены проявляется главным образом в изменениях фазы, для которой также наблюдается хорошее соответствие с теорией. При возбуждении махового движения путем вертикальных колебаний втулки винта происходит сильное нарастание вторых гармоник махового движения, увеличивающееся с повышением частоты. Этот эффект непосредственно связан со снижением демпфирования махового движения. Получено хорошее согласие экспериментальных величин с рассчитанными по теории Лоуи. При возрастании общего шага этот связанный с повторным влиянием пелены эффект уменьшается и при $\theta_0 = 10^\circ$ достигает уровня, предсказываемого квазистационарной теорией. В работе [Н.29] показано, что усиление махового движения вследствие влияния поперечных вихрей пелены при небольших значениях общего шага наблюдается и на режиме полета вперед (испытания проводились до значений характеристики режима $\mu = 0,2$).

Экспериментальное исследование демпфирования разных форм изгибных колебаний лопастей двухлопастного винта на режиме висения при малых значениях общего шага (и, следовательно, малых скоростях протекания) проведено в работе [S.110]. Измерялась реакция лопасти как на моменты относительно оси ГШ, так и на вертикальные колебания втулки. Демпфирование определялось по записям переходных процессов, возникающих при снятии внешних сил. Обнаружено обусловленное влиянием поперечных вихрей уменьшение аэродинамического демпфирования изгибных колебаний лопасти по второй гармонике до весьма малых значений. Наблюдается хорошее количественное соответствие теории Лоуи с экспериментальными данными.

Дополнительную информацию о повторном влиянии следа несущего винта можно найти в работах: [A.51, A.52, B.158, D.89, J.66, J.69, J.80, J.81, H.33, A.35, A.36, B.32, M.167, K.65].

10.6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ НЕСТАЦИОНАРНОЙ АЭРОДИНАМИКИ ЛОПАСТИ

10.6.1. ТЕОРИЯ НЕСУЩЕЙ ЛИНИИ

Применительно к описанию ближнего следа нестационарно движущегося плоского профиля теория несущей линии рассматривалась в разд. 10.3. Ниже в этот анализ включено влияние

повторного приближения следа к лопасти, исследованное Миллером [М.125, М.126]. Напомним, что в теории несущей линии распределение индуктивных скоростей по хорде не рассматривается и расчет этой величины ведется лишь в одной точке на профиле. Учитывая, что проведенное выше исследование влияния ближнего следа достаточно для применения этой теории, проведем более детальное исследование ближнего следа профиля, применяя указанную теорию лишь для построения вихревых следов, расположенных под профилем. Воспользовавшись полученным в разд. 10.5 выражением для индуктивной скорости, индуцируемой вновь приближившейся пеленой, будем иметь

$$\Delta\lambda = i \frac{1}{2} \bar{v}_w e^{i\omega t} e^{-ikx/b} W.$$

Определим отсюда значение $\Delta\lambda$ в точке, отстоящей от носка профиля на четверть хорды ($x = -b/2$):

$$\Delta\lambda = i \frac{1}{2} \bar{v}_w e^{i\omega t} e^{ik/2} W.$$

Поскольку теория несущей линии справедлива лишь при низких приведенных частотах, можно принять $e^{ik/2} \approx 1$. В этом случае приращения подъемной силы и циркуляции описываются выражениями

$$\Delta L = -\rho U 2\pi b \bar{v}_w e^{i\omega t} W \frac{1}{2} i,$$

$$\Delta \Gamma = -2\pi b \bar{v}_w e^{i\omega t} W \frac{1}{2} i,$$

так что функция уменьшения подъемной силы определяется формулой

$$C' = \frac{H_1^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k) + 2iW}.$$

Этот же результат можно получить по теории Лоуи, если при использовании бесселевых функций сохранить лишь члены нулевого порядка относительно k . Миллер показал, что такие аппроксимации достаточно хорошо описывают функцию Лоуи при $k \leq 0,5$ для любых расстояний между вихревыми поверхностями. Наибольшая погрешность имеет место в представлении мнимой части (т. е. в сдвиге фаз) при малых h/b . Отсюда был сделан вывод, что теория несущей линии удовлетворительно описывает влияние повторных приближений к лопасти как поперечных, так и продольных вихрей, и только ближний вихревой след лопасти требует специального рассмотрения.

10.6.2. НЕПРЕРЫВНАЯ ДВУМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВИХРЕВОЙ ПЕЛЕНА

В работах [М.123, М.126] проведено дальнейшее упрощение теории Лоуи, причем вихревые поверхности под лопастью опи-

связываются непрерывно распределенными вихрями. Эта модель аналогична рассматриваемому в разд. 10.6.3 представлению винта активным диском и служит примером, иллюстрирующим связь плоской дискретной вихревой модели Лоуи и теории несущего винта, основанной на непрерывном распределении вихрей.

Ограничимся случаем гармонического движения лопасти с частотами, кратными частоте вращения (ω/Ω — целое число). При периодическом нагружении лопастей интенсивность вихрей в следах не зависит от вертикальной координаты. Учитывая, что приведенная частота мала, пренебрежем изменениями индуктивной скорости по хорде. В таком случае индуктивная скорость на профиле в точке $x = 0$ описывается интегральным выражением

$$\lambda = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \xi}{\xi^2 + z^2} d\xi dz,$$

где $\gamma(\xi, t)$ — интенсивность непрерывно распределенных под профилем вихрей. Поскольку каждый дискретный вихревой след с интенсивностью вихрей γ_w теперь должен быть распределен по полосе шириной h , получим $\gamma = \gamma_w/h$. Интенсивность поперечных вихрей определяется производной от циркуляции Γ по времени. При синусоидальном движении с частотой ω имеем

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{1}{Uh} \frac{d}{dt} \Gamma(t - \xi/U) = -\frac{i\omega}{Uh} \bar{\Gamma} e^{i\omega(t - \xi/U)} = \\ &= -\frac{ik\Gamma/b^2}{h/b} e^{-i\omega\xi/U}. \end{aligned}$$

При сносе пелены вниз со средней скоростью протекания λ_0 расстояние между вихрями h/b , как показано в разд. 10.5, равно $4\lambda_0/\sigma$, так что имеем

$$\gamma = -\frac{ik\Gamma/b^2}{4\lambda_0/\sigma} e^{-i\omega\xi/U}.$$

После подстановки этого значения γ получается следующее выражение для скорости, индуцируемой поперечными вихрями:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{k\Gamma/b^2}{4\lambda_0/\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi e^{-ik\xi/b}}{\xi^2 + z^2} d\xi dz = \\ &= \frac{k\Gamma/b^2}{4\lambda_0/\sigma} \frac{1}{2k/b} = \frac{\pi\sigma}{4\lambda_0} \frac{L}{\rho U 2\pi b}. \end{aligned}$$

Поскольку из равенства $L = L_Q - \rho U 2\pi b \lambda = L_Q - (\pi\sigma/4\lambda_0) L$ следует $L = C' L_Q$, функция уменьшения подъемной силы приобретает вид

$$C' = 1/(1 + \pi\sigma/4\lambda_0).$$

Это выражение совпадает с полученным выше предельным выражением функции Лоуи при низких частотах, кратных частоте

вращения винта (разд. 10.5). Такое приближение, согласно Миллеру, хорошо аппроксимирует функцию F' , по крайней мере при $k \leq 0,5$, но мнимая часть G' полностью игнорируется.

10.6.3. МОДЕЛЬ АКТИВНОГО ДИСКА

Исследование нестационарных аэродинамических сил лопасти несущего винта затруднено сложностью структуры пелены свободных вихрей, и проведенное выше рассмотрение двумерных моделей вызвано именно этой причиной. Ниже на основе работ [М.123, М.126] проводится такой же анализ применительно к вращающейся лопасти.

Для упрощения математической трактовки задачи принимаются следующие два допущения. Во-первых, используется модель активного диска, так что распределение вихрей в следе является непрерывным. Во-вторых, рассмотрены лишь режимы висения и вертикального полета, для которых вихревой след осесимметричен. Такое исследование позволяет распространить классические результаты вихревой теории винта на случай нестационарных нагрузок и получить приближенное выражение функции уменьшения подъемной силы для вращающегося винта.

Начнем со случая постоянной нагрузки на диск, что соответствует циркуляции, постоянной по длине лопасти, так что имеется лишь два продольных вихря — концевой и комлевый (см. разд. 2.7.2). Пренебрегая поджатием струи, будем считать, что система вихрей представляет собой круговой цилиндр, отходящий вниз от диска винта. Спиралевидные концевые вихри образуют на цилиндре слой, который удобно представить непрерывно распределенными вихревыми кольцами, к которым из условия сохранения вихрей добавляют слой прямолинейных вихрей, располагающихся вдоль образующих цилиндра, а также комлевый вихрь на оси цилиндра. Параллельные оси цилиндра вихри не дают нормальной к плоскости диска индуктивной скорости, которая, таким образом, определяется лишь вихревыми кольцами интенсивности γ .

Воспользовавшись формулой Био — Савара и проведя интегрирование по поверхности цилиндра, получим следующее выражение для индуктивной скорости в точке (r, ψ) на диске винта:

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} \frac{\gamma (R^2 - rR \cos(\psi - \psi^*)) d\psi^* dz}{(R^2 - 2Rr \cos(\psi - \psi^*) + r^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - rR \cos(\psi - \psi^*)}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \psi^*) + r^2} d\psi^* = \\ &= \frac{\gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l \cos l(\psi - \psi^*) d\psi^* = \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Величину интенсивности слоя кольцевых вихрей γ можно найти, если суммарную интенсивность присоединенных вихрей всех N лопастей винта распределить по вертикальному отрезку, на длину которого смещаются за один оборот винта элементы вихрей, двигаясь со скоростью v :

$$\gamma = N\Gamma/(v2\pi/\Omega).$$

Поскольку $T = (1/2)N\rho\Omega R^2\Gamma$, величина γ связана с силой тяги винта соотношением $\gamma = T/(\rho Av)$; при этом индуктивная скорость равна $v = \gamma/2 = T/2\rho Av$, т. е. $v = \sqrt{T/2\rho A}$.

Это известный в теории активного диска результат, который получен здесь другим путем — на основе вихревой теории равномерно нагруженного винта. Для последующего анализа более удобно представление индуктивной скорости при стационарном нагружении в виде $v = (N\Omega/4\pi v)\Gamma$.

Займемся теперь нестационарным случаем. Пусть циркуляция по-прежнему постоянна по радиусу, но периодически меняется в зависимости от азимута, так что ее можно представить в виде ряда Фурье по ψ :

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} (\Gamma_{nc} \cos n\psi + \Gamma_{ns} \sin n\psi).$$

Продольные вихри, как и ранее, образуют слой, описываемый распределением вихревых колец с зависящей от азимута интенсивностью их вихревых элементов:

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_{nc} \cos n\psi + \gamma_{ns} \sin n\psi).$$

Периодическая зависимость этой интенсивности от ψ определяется изменениями циркуляции. Поскольку при гармоническом движении интенсивность вихревого слоя на винтовых поверхностях изменяется по фазе одинаково, величина γ не зависит от расстояния z вдоль оси винта. Чтобы найти амплитуду изменения γ по n -й гармонике, следует взять того же номера амплитуду общей циркуляции присоединенных вихрей всех N лопастей винта и распределить ее по длине, на которую перемещаются свободные вихри за один оборот винта:

$$\gamma_n = (N\Omega/2\pi v_0)\Gamma_n = T_n/\rho Av_0.$$

Через v_0 здесь обозначена средняя индуктивная скорость. Изменение циркуляции присоединенных вихрей по азимуту приводит к появлению радиальных поперечных вихрей внутри цилиндра. Их интенсивность определяется производной по времени от циркуляции присоединенных вихрей всех N лопастей, также распределенной по вертикали на участке, переходимом вихрями

за один оборот винта. Таким образом, интенсивность поперечных вихрей равна $d\gamma/d\psi$, где γ — рассмотренная выше интенсивность элементов кольцевых вихрей, которая, как отмечалось, зависит от азимута. Используя разложение γ в ряд Фурье, получим

$$\frac{d\gamma}{d\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} n (-\gamma_{nc} \sin n\psi + \gamma_{ns} \cos n\psi).$$

Теперь индуктивная скорость на диске винта, обусловленная изменяющимися по n -й гармонике продольными вихрями, может быть представлена выражением

$$\begin{aligned} v_{nT} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma_{nc} \cos n\psi^* + \gamma_{ns} \sin n\psi^*) [R^2 - rR \cos(\psi - \psi^*)] d\psi^* dz}{[R^2 - 2Rr \cos(\psi - \psi^*) + r^2 + z^2]^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\gamma_{nc} \cos n\psi^* + \gamma_{ns} \sin n\psi^*) \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^l \cos l(\psi - \psi^*) d\psi^* = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\gamma_{nc} \cos n\psi + \gamma_{ns} \sin n\psi). \end{aligned}$$

Для определения индуктивной скорости от меняющихся по n -й гармонике поперечных вихрей придется интегрировать описываемые формулой Био — Савара элементарные скорости по объему вихревого цилиндра:

$$\begin{aligned} v_{nS} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{d\gamma_n}{d\psi^*} \frac{r \sin(\psi - \psi^*) dr^* d\psi^* dz}{[r^2 + r'^2 + z^2 - 2rr' \cos(\psi - \psi^*)]^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{d\gamma_n}{d\psi^*} \frac{r \sin(\psi - \psi^*) dr^* d\psi^*}{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\psi - \psi^*)} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma_n}{d\psi^*} \sum_{l=1}^{\infty} \sin l(\psi - \psi^*) \left[\frac{1}{r} \int_0^r \left(\frac{r'}{r}\right)^{l-1} dr' + \frac{1}{r} \int_r^R \left(\frac{r'}{r}\right)^{l+1} dr' \right] d\psi^* = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} n (-\gamma_{nc} \sin n\psi^* + \gamma_{ns} \cos n\psi^*) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \left[2 - \left(\frac{r}{R}\right)^l \right] \sin l(\psi - \psi^*) d\psi^* = \\ &= \frac{1}{4} \left[2 - \left(\frac{r}{R}\right)^n \right] (\gamma_{nc} \cos n\psi + \gamma_{ns} \sin n\psi). \end{aligned}$$

В результате получаем следующее выражение для полной индуктивной скорости:

$$v_n = v_{nT} + v_{nS} = \frac{\gamma_n}{2} = \frac{N\Omega}{4\pi\sigma_0} \Gamma_n = T_m/2\rho A v_0.$$

Таким образом, n -я гармоника циркуляции присоединенного вихря порождает гармонику индуктивной скорости такого же номера, причем при постоянной по радиусу циркуляции индуктивная скорость также не зависит от радиуса. Полученное выражение распространяет на общий случай известный результат стационарной теории. Представим теперь силу тяги винта в виде $T_n = T_{nQ} + T_{nW}$, где T_{nQ} — квазистатическое значение этой силы, а T_{nW} — сила тяги, обусловленная гармоникой v_n скорости протекания:

$$T_{nW} = -N \int_0^R \frac{1}{2} \rho (\Omega r) c 2\pi v_n dr = -N \rho \Omega c v_n R^2 \frac{\pi}{2} = \\ = -\rho \Omega R \frac{\pi}{2} \sigma v_n = -\frac{\sigma \pi}{4} \frac{\Omega R}{v_0} T_n.$$

Отсюда $T_n = T_{nQ} - (\sigma \pi / 4 \lambda_0) T_n$, или, в другой записи, $T_n = C' T_{nQ}$, где $C' = 1 / (1 + \sigma \pi / 4 \lambda_0)$ — функция уменьшения подъемной силы вращающейся лопасти. Как видим, C' не зависит от номера гармоники циркуляции. Весьма примечательно, что эта функция идентична функции уменьшения подъемной силы, полученной выше для двумерной модели с непрерывным распределением вихрей и использованной для аппроксимации функции Лоуи при гармоническом движении с малыми частотами.

Случай изменения циркуляции присоединенных вихрей винта по азимуту и радиусу, когда продольные свободные вихри сходят со всех точек лопасти (а не только с конца и комля), рассмотрен в работе [М.126]. В этом случае n -я гармоника индуктивной скорости описывается выражением

$$v_n(r, \psi) = \frac{N \Omega}{4\pi v_0} \Gamma_n(r, \psi) = \frac{N}{\rho 4\pi v_0 r} L_n(r, \psi),$$

т. е. индуктивная скорость изменяется по радиусу, но зависит только от значения циркуляции присоединенного вихря в месте определения скорости. Представив полную подъемную силу сечения лопасти в виде $L_n = L_{nQ} + L_{nW} = L_{nQ} - \frac{1}{2} \rho \Omega r c 2\pi v_n = L_{nQ} - (\sigma \pi / 4 \lambda_0) L_n$, опять получим $L_n = C' L_{nQ}$, где по-прежнему $C' = 1 / (1 + \sigma \pi / 4 \lambda_0)$. Поскольку функция уменьшения подъемной силы не зависит от радиуса и частоты, интегрирование погонной нагрузки по радиусу снова приводит к формуле $T_n = C' T_{nQ}$, как и в случае постоянной по радиусу циркуляции присоединенного вихря.

Гармоника нагрузки связана с местной нагрузкой на площадь активного диска соотношением $L_n = (2\pi r / N) (dT_n / dA)$, что позволяет следующим образом записать возмущенную

нестационарной нагрузкой скорость протекания:

$$\delta v = (dT/dA)/2\rho v_0.$$

Это выражение можно рассматривать как дифференциальную форму уравнения количества движения ($dT = 2\dot{m}\delta v$, где $\dot{m} = \rho v_0 dA$), примененную к случаю нестационарных нагрузок.

10.6.4. ВОЗМУЩЕННЫЕ СКОРОСТИ ПРОТЕКАНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВИНТА

Скорости, индуцированные вихревой пеленой на диске винта, играют важную роль в процессе образования нестационарных нагрузок на лопасти и должны приниматься во внимание при исследовании переходных процессов. Однако связь между полем индуктивных скоростей и нестационарными нагрузками очень сложна. Изложенное выше применение вихревой теории дает наиболее простые формулы нестационарной аэродинамики винта, полезные для приложений к аэроупругости. При работе винта на режиме висения возмущение $\delta v(r, \psi)$ скорости протекания в точке диска винта связано с возмущением dT/dA местной нагрузки на единицу площади поверхности диска соотношением $\delta v = (dT/dA)/2\rho v_0$, где v_0 — средняя индуктивная скорость. Эта формула была получена для гармонического изменения нагрузки лопасти с частотой $n\Omega$ во вращающейся системе координат, где n — не равное нулю целое число. Как уже говорилось, это выражение соответствует низкочастотной аппроксимации функции уменьшения подъемной силы лопасти. Независимо от того, рассматривается ли эта формула как результат вихревой теории или как дифференциальная формула импульсной теории, должно выполняться основное условие, состоящее в том, что изменение нагрузок винта происходит гораздо медленнее, чем изменение его вихревой системы. Лишь в этом случае формулы теории несущего диска могут быть применены как к возмущениям, так и к стационарным значениям скорости протекания.

Рассмотрим возмущение индуктивной скорости, имеющее форму

$$\delta \lambda = \lambda + \lambda_x r \cos \psi + \lambda_y r \sin \psi,$$

т. е. состоящее из постоянного члена λ и линейно меняющихся по радиусу гармоник с коэффициентами λ_x и λ_y . Нетрудно установить связь коэффициентов нестационарных составляющих суммарных сил и моментов винта (коэффициента силы тяги C_T , коэффициента момента тангажа C_{M_y} и коэффициента момента крена C_{M_x}) с возмущениями индуктивной скорости. В предположении линейного изменения нагрузки по диску винта можем

написать

$$\frac{dT}{dA} = -4 \frac{\delta M_y}{RA} r \cos \psi + 4 \frac{\delta M_x}{RA} r \sin \psi,$$

где M_y и M_x — соответственно моменты тангажа и крена. Изменения нагрузки происходят в данном случае с частотой первой гармоники, и формулы для нестационарных значений δv применимы. Подставляя dT/dA в выражение для $\delta \lambda$, получим линейно меняющуюся возмущенную скорость

$$\delta \lambda = -\frac{2\delta C_{M_y}}{\lambda_0} r \cos \psi + \frac{2\delta C_{M_x}}{\lambda_0} r \sin \psi.$$

Это соотношение может быть формально распространено на случай полета вперед с помощью обычных предположений импульсной теории (как в разд. 4.1.1). Соответствующий бесконечно малому элементу dA площади диска массовый расход берется в виде $\dot{m} = \rho(V^2 + v_0^2)^{1/2} dA$, после чего формула $dT = 2\dot{m}\delta v$ принимает вид

$$\delta v = (dT/dA)/2\rho \sqrt{V^2 + v_0^2}.$$

Аналогичным путем получим выражение для возмущенной скорости при наличии аэродинамических моментов:

$$\delta \lambda = -\frac{2\delta C_{M_y}}{\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2}} r \cos \psi + \frac{2\delta C_{M_x}}{\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2}} r \sin \psi.$$

Если переходный режим уже пройден ($\mu > 0,1 \div 0,15$), то имеем приближенно:

$$\delta \lambda \approx -\frac{2\delta C_{M_y}}{\mu} r \cos \psi + \frac{2\delta C_{M_x}}{\mu} r \sin \psi.$$

Это выражение можно получить и непосредственно, если относящуюся ко всему диску винта формулу для индуктивной скорости в горизонтальном полете $\lambda_i \approx C_T/2\mu$ распространить на бесконечно малые элементы диска.

Рассмотрим теперь возмущения индуктивной скорости, связанные с изменениями силы тяги при переходных режимах. Как установлено в разд. 10.6.3, выражение $\delta v = (dT/dA)/2\rho v_0$ соответствует низкочастотному предельному случаю ($k = \omega b/\Omega r \ll \ll 1$) гармонического изменения нагрузок с частотами, кратными Ω (ω/Ω — не равное нулю целое число). Это выражение можно считать применимым и к случаю изменений низкочастотных

нагрузок на лопасти (в частности, первой гармоники) возникающих от возмущенных моментов. Что касается изменений силы тяги, то они соответствуют низкочастотным изменениям средней по времени нагрузки на лопасть, так что требуется другой подход к исследованию их влияния на индуктивную скорость. Возможно, например, при вычислении вариаций скорости просто воспользоваться формулой $\lambda_0 = (C_T/2)^{1/2}$, полученной по стационарной импульсной теории. В этом случае возмущения скорости от низкочастотных возмущений силы тяги записываются в виде

$$\delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial C_T} \delta C_T = \frac{\delta C_T}{4\lambda_0}.$$

Интересно, что возмущение скорости протекания, полученное при гармонических изменениях нагрузки, вдвое превосходит эту величину (т. е. $\delta\lambda = \delta C_T/2\lambda_0$). Различие объясняется влиянием поперечных вихрей. Вывод в разд. 10.6.3 соответствующих формул показывает, что при гармонических нагрузках (в частности, обусловленной моментами первой гармоники) одна часть возмущения индуктивной скорости создается поперечными, а другая — продольными вихрями. Наличие у винта постоянной силы тяги приводит к образованию в основном продольных вихрей (концевых вихревых жгутов), что влияет на индукцию вдвое слабее, чем возникающие на втулке моменты. Воспользовавшись известным результатом стационарной импульсной теории винта при полете вперед (разд. 4.1.1)

$$\lambda_0 = \mu \operatorname{tg} \alpha + \frac{C_T}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2}}$$

и распространив этот результат на возмущенное движение, получим

$$\delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial C_T} \delta C_T = \frac{\delta C_T}{2\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2} + C_T\lambda_0/(\mu^2 + \lambda_0^2)} \approx \frac{\delta C_T}{2(\lambda_0 + \sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2})}.$$

Последнее выражение для $\delta\lambda$ справедливо лишь при малых скоростях протекания. Объединяя полученные выше результаты, запишем возмущение скорости протекания вследствие изменений силы тяги и моментов в виде

$$\delta\lambda = \frac{\delta C_T}{2(\lambda_0 + \sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2})} - \frac{2\delta C_{M_y}}{\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2}} r \cos \psi + \frac{2\delta C_{M_x}}{\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2}} r \sin \psi.$$

Эта же формула может быть представлена следующей матричной линейной зависимостью возмущений скорости протекания от нестационарных возмущений аэродинамических сил и момен-

тов на втулке винта:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda_x \\ \lambda_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2(\lambda_0 + \sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_T \\ -C_{M_y} \\ C_{M_x} \end{bmatrix}$$

В более общей форме это соотношение имеет вид $\lambda = (\partial\lambda/\partial L) L$, где $\partial\lambda/\partial L$ — уже не диагональная, а полная 9-элементная матрица. Однако мы не располагаем способом определения этих элементов. В еще более общей форме такая схема расчета нестационарных аэродинамических характеристик должна включать временное запаздывание:

$$\tau \dot{\lambda} + \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial L} L$$

Индукцируемая пеленой вихрей скорость зависит не только от нагружения лопастей, но и от скорости перемещения винта, которая определяет массу воздуха, протекающего через диск. Поэтому должно происходить изменение индуктивной скорости, вызванное изменением скорости винта. Представим результат стационарной импульсной теории в виде

$$\lambda_i = C_T/2 \sqrt{\mu^2 + (\mu_z + \lambda_i)^2},$$

где $\mu_z = \mu \operatorname{tg} \alpha$ — нормальная к диску винта составляющая скорости невозмущенного потока. Вычислив по этой формуле возмущение средней скорости протекания, обусловленное влиянием изменений нормальной и тангенциальной к диску винта составляющих скорости его движения, получим

$$\delta\lambda = - \frac{C_T/2}{(\mu^2 + \lambda_0^2)^{3/2} + \lambda_0 C_T/2} (\mu \delta\mu + \lambda_0 \delta\mu_z).$$

Для случая полета вперед эта формула может быть упрощена:

$$\delta\lambda = - \frac{C_T}{2\mu^2} \delta\mu - \frac{C_T \lambda_0}{2\mu^3} \delta\mu_z.$$

На режиме висения $\mu = 0$ и $\lambda_0 = \sqrt{C_T/2}$, так что после упрощений получим $\delta\lambda = -(1/2)\delta\mu_z$. Напомним, что при малых скоростях вертикального взлета, как это было установлено в разд. 3.3, индуктивная скорость также снижается на величину, равную половине скорости набора высоты; это объясняется увеличением массы воздуха, протекающего через диск винта.

В заключение исследуем функцию уменьшения подъемной силы, определяемую приведенными выше результатами. Как

показано в разд. 5.3, моменты тангажа и крена винта описываются выражениями

$$-\frac{2C_{M_y}}{\sigma a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos \psi \frac{F_z}{ac} r dr d\psi,$$

$$\frac{2C_{M_x}}{\sigma a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sin \psi \frac{F_z}{ac} r dr d\psi.$$

Для входящей в эти выражения подъемной силы от возмущений скорости имеем $\delta(F_z/ac) = -\frac{1}{2}u_T \delta\lambda = -\frac{1}{2}r^2(\lambda_x \cos \psi + \lambda_y \sin \psi)$, что дает

$$\begin{bmatrix} -\frac{2C_{M_y}}{\sigma a} \\ \frac{2C_{M_x}}{\sigma a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2C_{M_y}}{\sigma a} \\ \frac{2C_{M_x}}{\sigma a} \end{bmatrix}_{кс} - \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \end{bmatrix}$$

(как показано в гл. 11, коэффициент $1/8$ удовлетворительно аппроксимирует соответствующую зависимость как при полете вперед, так и на режиме висения). Индекс «кс» означает, что берутся квазистационарные моменты, т. е. определенные в отсутствие индуктивных скоростей. Согласно рассматриваемой нестационарной аэродинамической модели, индуктивные скорости связаны с возмущенными моментами соотношением

$$\begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2}} \begin{bmatrix} -C_{M_y} \\ C_{M_x} \end{bmatrix}.$$

Исключение скоростей протекания из этого и предыдущего уравнений дает

$$\begin{bmatrix} -\frac{2C_{M_y}}{\sigma a} \\ \frac{2C_{M_x}}{\sigma a} \end{bmatrix} = C' \begin{bmatrix} -\frac{2C_{M_y}}{\sigma a} \\ \frac{2C_{M_x}}{\sigma a} \end{bmatrix}_{кс},$$

где C' — функция уменьшения подъемной силы, определяемая выражением

$$C' = 1/(1 + \sigma a/8\sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2}).$$

Таким образом, вихревой след уменьшает передаваемые на втулку винта аэродинамические моменты пропорционально C' , что весьма заметно влияет на динамические характеристики вертолета. При полете вперед функция уменьшения подъемной силы равна $C' = 1/(1 + \sigma a/8\mu)$, а на режиме висения $C' = 1/(1 + \sigma a/8\lambda_0)$. В случае висения результат опять соответствует низкочастотному пределу функции Лоуи для гармоник

нагружения. Аналогично, согласно полученным в разд. 5.3 результатам, коэффициент силы тяги винта определяется по формуле

$$\frac{C_T}{\sigma a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{F_z}{ac} dr d\psi.$$

Полагая $\delta(F_z/ac) = -1/2r\delta\lambda$, получим

$$\frac{C_T}{\sigma a} = \left(\frac{C_T}{\sigma a}\right)_{\text{ке}} - \frac{1}{4} \delta\lambda.$$

Интересно сравнить эту формулу с величиной $T_\lambda = -1/4$ (справедливой как для режима висения, так и для полета вперед), полученной при аппроксимации переменного множителя константой. Возмущение средней скорости протекания в зависимости от нестационарной нагрузки определяется из соотношения

$$\delta\lambda = \frac{C_T}{2(\lambda_0 + \sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2})}.$$

Исключение $\delta\lambda$ приводит к формуле

$$\frac{C_T}{\sigma a} = C' (C_T/\sigma a)_{\text{ке}},$$

где функция уменьшения подъемной силы равна

$$C' = 1/[1 + \sigma a/8(\lambda_0 + \sqrt{\mu^2 + \lambda_0^2})].$$

Для случая полета вперед это выражение входит в полученное выше соотношение моментов, но для изменений силы тяги на режиме висения будем иметь

$$C' = 1/(1 + \sigma a/16\lambda_0).$$

Уменьшение силы тяги вызвано влиянием пелены вихрей, но на висении это влияние заметнее проявляется в моментных характеристиках вследствие возникновения поперечных вихрей. Типичные значения рассмотренных выше функций уменьшения подъемной силы равны $C' \approx 0,8$ для полета вперед, $C' \approx 0,7$ для изменений силы тяги на режиме висения, $C' \approx 0,5$ для изменений моментов на режиме висения.

Построение более точной модели для определения нестационарных аэродинамических характеристик, которая могла бы использоваться на практике, в настоящее время является предметом исследований. Относящаяся к этому вопросу литература указана в разд. 12.1.6.

10.7. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ПРОФИЛЯ СЕЧЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЛОПАСТИ

Займемся дальнейшим развитием нестационарной теории профиля с тем, чтобы приспособить ее к анализу обтекания вращающейся лопасти. Хотя основы теории уже излагались в предыдущих разделах, приложение ее к лопасти несущего винта требует учета целого ряда дополнительных факторов. Применение схемы несущей линии разделяет задачу расчета нестационарных аэродинамических нагрузок при пространственном обтекании на две части: внутреннюю, в которой исследуются аэродинамические характеристики профиля, и внешнюю, состоящую из расчета индуктивных скоростей, создаваемых в сечении лопасти вихревым следом винта. Что касается внутренней задачи, то при стационарном обтекании плоского профиля аэродинамические нагрузки могут быть получены из эксперимента и представлены в виде табулированных зависимостей их от угла атаки и числа Маха. При нестационарном досрывном обтекании применимы результаты теории тонкого профиля. Решение внешней задачи затруднено тем, что система вихрей винта имеет весьма сложную конфигурацию. За каждой из вращающихся лопастей тянутся взаимодействующие винтовые вихревые поверхности, деформирующиеся в поле создаваемых ими индуктивных скоростей с возникновением областей сильной завихренности в виде концевых вихревых жгутов. Аналитическое определение индуктивной скорости на лопасти без весьма существенных упрощений модели вихревого следа (например, представления винта активным диском) оказывается невозможным. На практике неоднородное поле индуктивных скоростей определяют численными методами, подробно обсуждаемыми в гл. 13. Ввиду сказанного ниже не предполагается отыскивать зависимость между индуктивной скоростью и нагрузкой путем введения функции уменьшения подъемной силы. Напротив, сами индуктивные скорости являются фактором, учитываемым явно в нестационарной теории профиля. Для построения схемы несущей линии желательно, чтобы вычисление индуктивных скоростей производилось лишь в одной точке по хорде. Проведенное выше исследование обтекания профиля на основе схемы несущей линии указывает способ, который позволяет аппроксимировать нестационарные нагрузки с достаточно полным отображением влияния пелены вихрей. Применительно к лопасти достаточно рассмотреть лишь часть пелены, расположенную вблизи ее задней кромки. При построении нестационарной теории обтекания вращающейся лопасти надлежит учесть влияние обратного обтекания и радиального течения. Теоретические нагрузки должны быть скорректированы таким образом, чтобы они отражали влияние

реальных свойств воздуха на величину производной коэффициента подъемной силы по углу атаки и положение фокуса.

Рассмотрим лопасть винта с хордой c (полухордой b), передней кромке которой соответствует $x = x_{п.к.}$, а задней $x = x_{з.к.}$ (рис. 10.15). Лопасть изображается тонкой несущей поверхностью, удаление точек изоборой от плоскости вращения определяется функцией $z_l(r, x, \psi)$. На режиме полета вперед отличны от нуля и изменяются по времени как нормальная составляющая u_T скорости набегающего на сечение лопасти потока, так

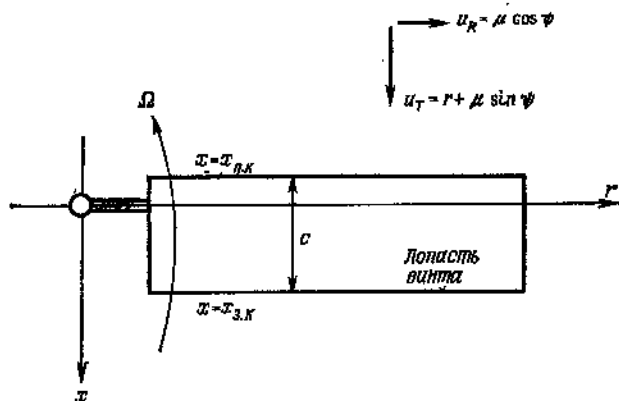


Рис. 10.15. Лопасть винта и составляющие скорости обтекающего ее потока во вращающейся системе координат.

и радиальная составляющая u_R , причем в качестве безразмерного времени используется азимут лопасти ψ . Нагрузки на лопасть определяются граничным условием непротекания через поверхности лопасти $w_a + w_z = 0$, где w_a — вертикальная скорость точки поверхности лопасти, а w_z — скорость воздуха, индуцируемая находящимися на несущей поверхности и пелене вихрями.

Скорость точки на поверхности лопасти определяется следующей полной производной по времени от ее координаты:

$$w_a = \frac{D}{D\psi} z_l = \left[\frac{\partial}{\partial \psi} + (r + \mu \sin \psi) \frac{\partial}{\partial x} + (-x + \mu \cos \psi) \frac{\partial}{\partial r} \right] z_l.$$

Индуктивная скорость может быть представлена в виде $w_z = w_{z,l} + \lambda$, где $w_{z,l}$ — скорость, индуцируемая вихрями поверхности лопасти, а λ — вихрями пелены (обе направлены вниз).

В приближении несущей линии скорость $w_{z,l}$, индуцируемая находящимися на лопасти вихрями, определяется из рассмотрения двумерной задачи обтекания сечения лопасти (рис. 10.16). Пусть γ_l — интенсивность слоя вихрей, охватывающих профиль лопасти. Интегрирование индуцируемых слоев скоростей по

хорде дает

$$\omega_{z, \lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_{п.к}}^{x_{з.к}} \frac{\gamma_{\lambda}}{x - x^*} dx^*.$$

Подставив это выражение в граничное условие, приходим к интегральному уравнению относительно γ_{λ}

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{x_{п.к}}^{x_{з.к}} \frac{\gamma_{\lambda}}{x - x^*} dx^* = \omega_a + \lambda,$$

решение которого и определит аэродинамические нагрузки при заданной скорости движения лопасти ω_a и индуктивной ско-

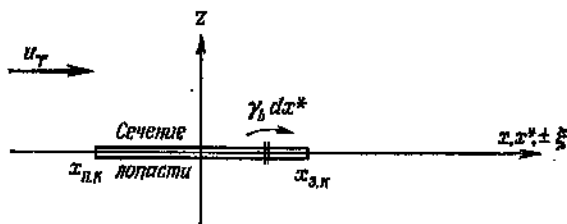


Рис. 10.16. Представление сечения лопасти тонким профилем ($\gamma_b = \gamma_{\lambda}$).

рости на ней λ . При этом должно выполняться условие Кутта — Жуковского о конечности скорости на задней кромке¹⁾ ($\gamma_{\lambda} = 0$). При горизонтальном полете комлевая часть лопасти винта проходит зону обратного обтекания. В этой зоне условие Кутта — Жуковского должно выполняться уже на передней (геометрической) кромке диска винта, т. е. при $x = x_{п.к}$. С учетом возможного попадания в зону обратного обтекания относительная координата ξ положения точки по хорде определяется равенством $x = [\pm \xi - a]b$, $\pm = \text{sign}(u_T)$ (плюс соответствует прямому, а минус — обратному обтеканию). При этом на передней по отношению к набегающему потоку кромке всегда $\xi = -1$, а на задней $\xi = 1$. Здесь b — полухорда, ab — относ. продольной оси лопасти от линии полухорд (положителен при отnose назад, например $a = -1/2$ соответствует прохождению продольной оси лопасти вдоль линии четвертой хорд). В указанных координатах интегральное уравнение для γ_{λ} принимает вид

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_{\lambda}}{\xi - \xi^*} d\xi^* = \omega_a + \lambda.$$

¹⁾ См. прим. перев. к разд. 10.2. — Прим. ред.

Решением этого уравнения, удовлетворяющим условию $\gamma_n = 0$ при $\xi = 1$, будет функция

$$\gamma_n = \pm \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}} \frac{\omega_a - \lambda}{\xi - \xi^2} d\xi^2.$$

Представим распределение индуктивной скорости по хорде в виде следующего ряда Фурье:

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cos n\theta,$$

где $\xi = \cos \theta$. Скорость движения поверхности лопасти запишем в виде суммы постоянной и линейно зависящей от x частей: $\omega_a = -(A + Bx)$. Обычно положение лопасти задают отклонением z_0 от плоскости вращения ее упругой оси и углом поворота Θ ее сечений относительно упругой оси. При этом имеем

$$z_x = z_0(r, \psi) - x\Theta(r, \psi),$$

откуда по определению скорости ω_a находим

$$A = -\dot{z}_0 + (r + \mu \sin \psi)\Theta - \mu \cos \psi \dot{z}'_0,$$

$$B = \dot{\Theta} + \dot{z}'_0 + \mu \cos \psi \dot{\Theta}'.$$

Поскольку $A - \lambda = u_{r\alpha}$, величина A дает умноженную на скорость потока добавку к углу атаки, а B входит в эффективную крутку лопасти. После подстановки значений ω_a и λ и взятия интегралов решение интегрального уравнения относительно γ_n запишется в виде

$$\gamma_n = \pm 2 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} [A \pm Bb(\xi + 1 \mp a)] \mp 2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n f_n(\theta),$$

где f_n — функции ряда Глауэрта, определяемые равенствами

$$f_n = \begin{cases} \operatorname{tg} \theta/2 & \text{при } n=0, \\ \sin n\theta & \text{при } n \geq 1. \end{cases}$$

Это решение может быть записано в виде суммы $\gamma_{л. б. ц} + \gamma_{л. ц}$, причем слагаемое $\gamma_{л. б. ц}$ удовлетворяет граничному условию, но не дает циркуляции вокруг профиля, а слагаемое $\gamma_{л. ц}$ не влияет на граничное условие, но удовлетворяет в сумме с $\gamma_{л. б. ц}$ условию Кутта — Жуковского. В соответствии с этим определением имеем

$$\gamma_{л. ц} = \pm \frac{2}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[A - \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) \pm bB \left(\frac{1}{2} \mp a \right) \right],$$

так что суммарная циркуляция вихрей профиля равна

$$\Gamma = \int_{x_{п.к}}^{x_{з.к}} \gamma_n dx = \pm 2\pi b \left[A - \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) \pm bB \left(\frac{1}{2} \mp a \right) \right].$$

Далее для определения нагрузок сечения потребуются также следующие интегралы от γ_n :

$$\Gamma^{(1)} = \int_{x_{п.к}}^{x_{з.к}} x \gamma_n dx = 2\pi b^2 \left[- \left(\frac{1}{2} \pm a \right) \left(A - \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) \right) \pm \right. \\ \left. \pm Ba^2 b - \frac{1}{4} (\lambda_1 + \lambda_2) \right],$$

$$\Gamma_{\text{б.п}}^{(1)} = \int_{x_{п.к}}^{x_{з.к}} x \gamma_{л.б.п} dx = 2\pi b^2 \left[- \frac{1}{2} \left(A - \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} abB - \frac{1}{4} (\lambda_1 + \lambda_2) \right],$$

$$\Gamma_{\text{б.п}}^{(2)} = \int_{x_{п.к}}^{x_{з.к}} x^2 \gamma_{л.б.п} dx = 2\pi b^3 \left[a \left(A - \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) \right) - \right. \\ \left. - bB \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) + \frac{a}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) \pm \frac{1}{8} (\lambda_1 - \lambda_2) \right],$$

$$\Gamma_{\text{б.п}}^{(3)} = \int_{x_{п.к}}^{x_{з.к}} x^3 \gamma_{л.б.п} dx = 2\pi b^4 \left[- \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2} a^2 \right) \left(A - \left(\lambda_0 + \frac{1}{2} \lambda_1 \right) \right) + \right. \\ \left. + abB \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} a^2 \right) - \frac{3}{4} \left(a \pm \frac{1}{2} \right)^2 (\lambda_1 + \lambda_2) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{3}{8} a \lambda_2 - \frac{1}{8} (1 \mp a) \lambda_3 - \frac{1}{16} \lambda_4 \right].$$

Линеаризованная форма уравнения Кельвина позволяет представить разность давлений на верхней и нижней сторонах профиля в виде

$$-\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{D}{D\psi} \Delta\varphi = \left[\frac{\partial}{\partial\psi} + (r + \mu \sin \psi) \frac{\partial}{\partial x} + (-x + \mu \cos \psi) \frac{\partial}{\partial r} \right] \Delta\varphi.$$

Потенциал скоростей φ связан с интенсивностью вихрей соотношением $\Delta\varphi = \int_{x_{п.к}}^x \gamma_n dx$ (разд. 10.2), так что

$$-\frac{\Delta p}{\rho} = (r + \mu \sin \psi) \gamma_n + \frac{\partial}{\partial\psi} \int_{x_{п.к}}^x \gamma_{л.б.п} dx + \\ + (-x + \mu \cos \psi) \frac{\partial}{\partial r} \int_{x_{п.к}}^x \gamma_{л.б.п} dx.$$

Интегрирование разности давлений по хорде приводит к следующим выражениям для подъемной силы и момента сечения:

$$L = \int_{x_{п.к}}^{x_{з.к}} (-\Delta p) dx, \quad M = \int_{x_{п.к}}^{x_{з.к}} (-\Delta p) x dx,$$

причем L направлена вверх, а M — момент относительно продольной оси лопасти — положителен при повороте носка вверх. Подставляя сюда значение Δp и переходя к безразмерным величинам (что делается путем исключения из формул плотности ρ), получим

$$L = (r + \mu \sin \psi) \Gamma - \frac{\partial}{\partial \psi} \Gamma_{\delta.н}^{(1)} - \mu \cos \psi \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{\delta.н}^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{\delta.н}^{(2)},$$

$$M = -(r + \mu \sin \psi) \Gamma^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \Gamma_{\delta.н}^{(2)} + \frac{1}{2} \mu \cos \psi \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{\delta.н}^{(2)} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{\delta.н}^{(3)}.$$

С учетом приведенных выше выражений для $\Gamma^{(n)}$ и $\Gamma_{\delta.н}^{(n)}$ эти соотношения определяют нестационарные нагрузки лопасти. Первые два члена в L и M представляют циркуляционную и бесциркуляционную части нагрузки, рассмотренные в теории тонкого профиля. Остальные два члена отражают влияние радиальной составляющей скорости. С точностью до членов первого порядка влияние радиальной составляющей скорости приводит к дополнительному слагаемому

$$\Delta L = \mu \cos \psi \frac{\partial}{\partial r} [\pi b^2 (A - \lambda)]$$

в выражении для подъемной силы. Эта формула совпадает с получаемой в теории тонкого тела для крыла очень малого удлинения (в данном случае равного $2b$). Таким образом, зависящие от радиальной составляющей скорости члены возникают при обтекании лопасти как крыла малого удлинения со скоростью $u_R = \mu \cos \psi$. Эти члены, соответствующие теории тонкого тела, равны нулю на режиме висения и, как правило, не играют существенной роли в нестационарной аэродинамике несущего винта. Однако их величина того же порядка (относительно хорды c), что и у некоторых бесциркуляционных членов в выражениях подъемной силы и момента.

Согласно допущениям теории несущей линии, индуцированная вихревой пеленой скорость определяется лишь в одной точке по хорде. Это означает, что в разложении индуктивной скорости сохраняется лишь член λ_0 , далее обозначаемый как λ . Поскольку величина хорды c для лопастей большого удлинения мала по отношению к радиусу, упростим полученные результаты, сохранив в выражениях подъемной силы члены порядка до c^2 , а в выражениях момента — порядка до c^3 . При этом вместо полухорды b будем использовать хорду c . Обозначая, как и

раньше, нормальную и радиальную составляющие скорости потока через $u_T = (r + \mu \sin \psi)$ и $u_R = \mu \cos \psi$ и вводя для вертикальной составляющей скорости потока относительно лопасти в точке x обозначение $\omega = A - \lambda + Bx$ (здесь учтены как индуктивная скорость, так и движение лопасти), можем написать:

$$\frac{\Gamma}{2\pi c} = \pm \frac{1}{2} \omega \Big|_{\frac{3}{4}c}, \quad \frac{\Gamma^{(1)}}{2\pi c} = -\frac{c}{2} \left(\pm \frac{1}{2} + a \right) \frac{\Gamma}{2\pi c} \pm \frac{c^2}{32} B,$$

$$\frac{\Gamma_{6.ц}^{(1)}}{2\pi c} = -\frac{c}{8} \omega \Big|_{\frac{1}{2}c}, \quad \frac{\Gamma_{8.ц}^{(2)}}{2\pi c} = -ac \frac{\Gamma_{6.ц}^{(1)}}{2\pi c} - \frac{c^3}{128} B,$$

после чего нагрузки в сечении лопасти определяются выражениями

$$\frac{L}{2\pi c} = \frac{1}{2} |u_T| \omega \Big|_{\frac{3}{4}c} + \frac{c}{8} (\dot{\omega} + u_R \omega'),$$

$$\frac{M}{2\pi c} = \frac{c}{2} \left(\pm \frac{1}{2} + a \right) \frac{L}{2\pi c} \mp \frac{c^2}{32} (u_T B + \dot{\omega} + u_R \omega').$$

Здесь нагрузки отнесены к хорде и теоретическому значению производной коэффициента подъемной силы $c_{l_a} = 2\pi$. Через $\omega \Big|_{\frac{3}{4}c}$ обозначена скорость в точке, отстоящей на $3/4$ хорды

от носка профиля при прямом обтекании (или на четверть хорды при обратном). Обычно в выражении для подъемной силы оставляют лишь члены первого порядка, но в выражении момента необходимо сохранять члены, соответствующие бесциркуляционной подъемной силе. При этом предыдущие формулы принимают вид

$$\frac{L}{2\pi c} = \frac{1}{2} |u_T| \omega + \frac{c}{8} (\dot{\omega} + u_R \omega') + \frac{c}{4} \left(\frac{1}{2} \mp a \right) u_T B,$$

$$\frac{M}{2\pi c} = \frac{c}{2} \left(\pm \frac{1}{2} + a \right) \frac{1}{2} |u_T| \omega \mp \frac{c^2}{8} a^2 u_T B + \frac{c^2}{16} a (\dot{\omega} + u_R \omega'),$$

где ω — вертикальная скорость в сечении без членов первого порядка относительно c , а B — градиент изменения вертикальной скорости по хорде. Самым важным членом в выражении для подъемной силы является $L/2\pi c = \frac{1}{2} |u_T| u_T a$, что соответствует формуле разд. 5.20. Существенное значение в выражении для момента представляет член, характеризующий демпфирование кручения. Поскольку в выражении для B входит Θ , а величина ω определяется членом $u_T \Theta$, соответствующая производная момента (относительно точки $x = ab$) равна

$$\frac{\partial M}{\partial \dot{\Theta}} = 2\pi \frac{c^3}{8} u_T a \left(\frac{1}{2} \mp a \right).$$

Если продольная ось лопасти проходит по линии четвертей хорд ($a = -1/2$), то демпфирование изменений угла установки в зоне обратного обтекания обращается в нуль. Члены с $u_R \omega'$ в выражениях для подъемной силы и момента обусловлены радиальной составляющей скорости обтекания лопасти и соответствуют нагрузкам теории тонкого тела.

Согласно теории тонкого профиля, в идеальной жидкости производная коэффициента подъемной силы сечения по углу атаки c_{l_a} равна 2π , а фокус расположен на расстоянии четверти хорды от носка. Поэтому необходимо ввести в формулы нестационарной теории профиля поправки, учитывающие реальные значения производной коэффициента подъемной силы и действительное положение фокуса. Первая поправка состоит в умножении выражений для подъемной силы и момента на отношение $a/2\pi$, где a — производная коэффициента подъемной силы реального профиля по углу атаки. Для профилей лопастей обычно принимают $a = 5,7$, если не учитывается влияние сжимаемости. Временно обозначив введенную ранее относительную координату продольной оси лопасти через \bar{a} (a не a , как ранее), напомним, что по теории тонкого профиля при прямом обтекании фокус располагается на расстоянии $-b \left(\frac{1}{2} + \bar{a} \right)$ за продольной осью лопасти и на расстоянии $-b \left(-\frac{1}{2} + \bar{a} \right)$ за этой осью при обратном обтекании. Пусть в реальных условиях фокус расположен позади продольной оси лопасти на расстоянии x_A от нее. Примем, что при переходе от прямого обтекания к обратному фокус смещается на $c/2$. Тогда эффективное расстояние от продольной оси до фокуса равно

$$x_{A, \text{эфф}} = \begin{cases} x_A & \text{при прямом обтекании,} \\ x_A + c/2 & \text{при обратном обтекании.} \end{cases}$$

Основываясь на этих соотношениях, заменим входящую в формулы теории тонкого профиля комбинацию $-b \left(\pm \frac{1}{2} + \bar{a} \right)$ величиной $x_{A, \text{эфф}}$, получаемой из экспериментов. После введения поправок, учитывающих реальные значения стационарной производной от подъемной силы по углу атаки и положение фокуса, получим следующие окончательные выражения нестационарной подъемной силы и момента относительно продольной оси, действующей в сечении вращающейся лопасти:

$$\begin{aligned} \frac{L}{ac} &= \frac{1}{2} |u_T| \omega + \frac{c}{4} u_T B \left(1 \pm 2 \frac{x_{A, \text{эфф}}}{c} \right) + \frac{c}{8} (\dot{\omega} + u_R \omega'), \\ \frac{M}{ac} &= -x_{A, \text{эфф}} \frac{1}{2} |u_T| \omega \mp \frac{c}{32} u_T B \left(1 \pm 4 \frac{x_{A, \text{эфф}}}{c} \right)^2 \mp \\ &\quad \mp \frac{c^2}{32} (\dot{\omega} + u_R \omega') \left(1 \pm 4 \frac{x_{A, \text{эфф}}}{c} \right). \end{aligned}$$

В этих выражениях величины u_T и u_R — нормальная и радиальная составляющие скорости потока, набегающего на сечение лопасти, а w — скорость протекания в рассматриваемом сечении (направлена вверх). Например, если опустить члены порядка s , то $w = u_T \theta - u_R$; величина B представляет собой градиент изменения этой скорости по хорде, которая может быть связана с изменениями угла установки. Верхние знаки соответствуют прямому обтеканию профиля, нижние — обратному. Влияние радиального течения учтено нагрузками, определяемыми по теории обтекания тонкого тела (соответствующие члены содержат производную по радиусу w'), а также включением дополнительных членов в выражение для w . Влияние изменений во времени скорости потока, набегающего на сечение лопасти, на нагрузки учитывается членами с производной \dot{w} . Наконец, влияние продольных и поперечных вихрей пелены учитывается путем включения в w индуцируемой этими вихрями скорости. При этом индуктивная скорость вычисляется в одной точке по хорде на основе аппроксимации ближних к лопасти поперечных вихрей, рассмотренной в разд. 10.3.

10.8. СКОРОСТЬ, ИНДУЦИРУЕМАЯ ВИХРЯМИ

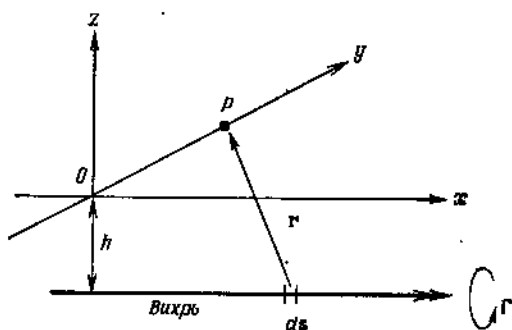
Если крыло конечного размаха или нестационарно движущееся крыло бесконечного размаха создает подъемную силу, то за крылом возникает след, состоящий из продольных и поперечных свободных вихрей (вихревая пелена). Вихри следа в свою очередь вызывают на поверхности лопасти дополнительные индуктивные скорости, оказывающие существенное влияние на аэродинамические нагрузки. Поэтому расчет скоростей, индуцируемых пеленой вихрей, представляет собой важную часть определения аэродинамических нагрузок. Чтобы рассчитать последние с удовлетворительной точностью при приемлемых затратах на проведение вычислений, целесообразно аппроксимировать непрерывную пелену свободных вихрей решеткой из дискретных вихревых элементов. Индуцируемая таким элементом скорость может быть описана аналитическим выражением, а полная индуктивная скорость определяется путем суммирования скоростей от каждого из элементов. Наиболее важен учет концевых вихревых жгутов. Эти жгуты хорошо описываются последовательностью прямолинейных вихревых отрезков, образующих ломаную линию. Свободные продольные и поперечные вихри, сходящие с внутренних участков лопасти, существенно меньше влияют на результаты расчета индуктивной скорости. Поэтому для них могут использоваться более грубые модели — от полностью игнорирующих влияние этих вихрей до использующих сетки дискретных вихревых элементов или вихревые поверхности.

Таким образом, расчет неоднородного поля скоростей протекания основывается на определении скоростей, индуцируемых дискретным элементом вихревой пелены. Ниже дается вывод формул для скоростей, индуцируемых вихревой линией или поверхностью. Прежде всего будет рассмотрена прямолинейная вихревая нить, что позволит изучить ряд общих черт поля индуцируемых вихрями скоростей. Вихревая нить конечной интенсивности представляет собой предельный случай, когда поле вихрей конечной суммарной интенсивности сконцентрировано в трубке бесконечно малого поперечного сечения. Вблизи вихревой нити поле скоростей имеет особенность, причем скорости стремятся к бесконечности обратно пропорционально расстоянию до нити. В реальной жидкости вследствие влияния вязкости эта особенность отсутствует, ибо диффузия вихрей превращает нить в трубку малого, но конечного поперечного сечения, называемую ядром вихря. Скорость принимает максимальные значения на некотором расстоянии от оси вихревой трубки, которое можно принять в качестве радиуса ее ядра. Поскольку лопасти несущего винта часто проходят очень близко к концевым вихрям от впереди идущих лопастей, ядро вихря играет важную роль в создании индуктивных скоростей на лопастях несущего винта, и существование такого ядра следует учитывать при описании распределения вызываемой винтом завихренности. Радиус ядра концевого вихря составляет примерно 10% длины хорды лопасти. Экспериментальных данных о размерах ядра концевого вихря очень мало, особенно для случая вращающейся лопасти.

10.8.1. БЕСКОНЕЧНЫЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ ВИХРЬ

Рассмотрим бесконечную прямолинейную вихревую нить интенсивности Γ (рис. 10.17). Индуцируемую нитью скорость бу-

Рис. 10.17. Бесконечная прямолинейная вихревая нить.



дем определять в точке P , причем систему координат выберем таким образом, чтобы нить располагалась в плоскости xz

параллельно оси x , а точка P находилась на оси y . Расстояние между нитью и осью x обозначим h . При этом расстояние от точки P до вихревой нити равно $(y^2 + h^2)^{1/2}$. Если лопасть находится на оси y , то положение вихря относительно нее соответствует ситуации, когда на режиме полета вперед к наступающей лопасти приближается концевой вихревой жгут, сошедший с предыдущей лопасти, а распределение индуктивных ско-

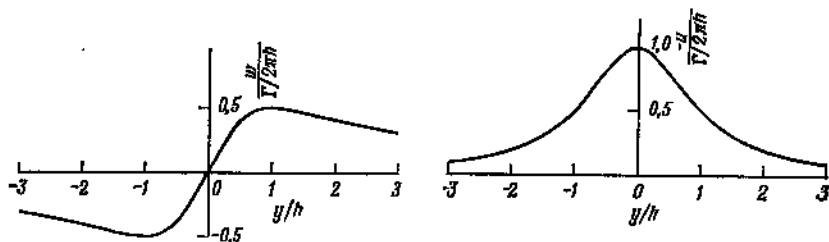


Рис. 10.18. Нормальные и радиальные скорости, индуцируемые бесконечной прямолинейной вихревой нитью.

ростей по оси y отражает распределение их в указанной ситуации по длине лопасти.

Согласно формуле Био — Савара, получим индуктивную скорость в виде

$$\mathbf{v} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{s}}{r^3},$$

где через \mathbf{r} обозначен вектор, соединяющий вихревой элемент $\Gamma d\mathbf{s}$ с точкой P . Здесь

$$\mathbf{r} = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + h\mathbf{k}$$

и $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i}$. После выполнения интегрирования по длине вихря для скорости получим выражение

$$\mathbf{v} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y\mathbf{k} + h\mathbf{j}}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} dx = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{-h\mathbf{j} + y\mathbf{k}}{y^2 + h^2}.$$

Полагая, что ось y идет вдоль лопасти, а ось z — по нормали к ее поверхности, определим величину скорости протекания, индуцируемую вихрем:

$$\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{y^2 + h^2}.$$

При $y = \pm h$ скорость ω имеет пики высоты $\omega_{\max} = \Gamma/4\pi h$ (рис. 10.18). Такое распределение скоростей приводит к образованию подобным же образом изменяющихся нагрузок.

Радиальная составляющая индуктивной скорости равна

$$u = \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{h}{y^2 + h^2},$$

причем максимального значения эта величина достигает при $y = 0$ (рис. 10.18).

В случае $h = 0$ индуктивная скорость равна $v = k\Gamma/2\pi y$ и имеет при $y = 0$ (т. е. на вихревой нити) особенность. Вследствие этого при малых значениях h и y необходимо рассматривать модель вихря с конечным ядром, так как в противном случае получаемые результаты теряют физический смысл. Простейшая модель такого рода — вихрь с ядром радиуса r_c , внутри которого поле скоростей такое же, как у вращающегося твердого тела (вне ядра имеет место рассмотренное выше потенциальное течение). Для этой модели при $h = 0$ имеем

$$w = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi y} & \text{при } y \geq r_c, \\ \frac{\Gamma y}{2\pi r_c^2} & \text{при } y < r_c, \end{cases}$$

а в общем случае ($h \neq 0$)

$$v = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{-hj + yk}{y^2 + h^2} & \text{при } y^2 + h^2 \geq r_c^2, \\ \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{-hj + yk}{r_c^2} & \text{при } y^2 + h^2 < r_c^2 \end{cases}$$

(граница ядра пересекает ось y в точках с ординатами $y = \pm h$, если $h = r_c/\sqrt{2}$). При $h = 0$ находим распределение завихренности ξ , когда поле скоростей в ядре соответствует вращающемуся твердому телу

$$\xi = \frac{1}{y} \frac{d}{dy} (yw) = \begin{cases} \Gamma/\pi r_c^2 & \text{при } y < r_c, \\ 0 & \text{при } y \geq r_c. \end{cases}$$

т. е. в ядре завихренность постоянна, а вне его отсутствует. Экстремальные значения нормальной составляющей индуктивной скорости вне ядра в общем случае определяются условиями

$$w_{\max} = \begin{cases} \frac{\Gamma}{4\pi h} & \text{при } y = \pm h, \text{ если } h \geq r_c/\sqrt{2}, \\ \frac{\Gamma}{2\pi r_c} \sqrt{1 - (h/r_c)^2} & \text{при } y = \pm \sqrt{r_c^2 - h^2}, \text{ если } h < r_c/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Таким образом, если $h \geq r_c/\sqrt{2}$, то вне ядра экстремумы составляющей w по-прежнему достигаются при $y = \pm h$ и имеют те же значения, что и в потенциальном течении вокруг вихревой нити, а внутри ядра скорость максимальна на его границе. Наличие ядра снижает максимальное значение индуктивной скорости до величины $\Gamma/2\pi r_c$, достигаемой при $h = 0$.

Допущение о том, что течение является вихревым лишь внутри ядра, радиус которого соответствует максимуму скорости, и что поле скоростей в ядре такое же, как у вращаю-

щегося твердого тела, довольно грубо отражает реальную картину. Поскольку тангенциальная скорость на данном радиусе определяется только величиной суммарной интенсивности вихрей, находящихся внутри окружности этого радиуса, наличие завихренности вне ядра радиуса r_c означает, что величина пика индуктивной скорости будет меньше чем $\Gamma/2\pi r_c$. Известно, что максимум тангенциальной скорости в поле реального вихря много меньше чем $\Gamma/2\pi r_c$ (здесь r_c — радиус, на котором такой максимум достигается). Это показывает, что существенная часть завихренности находится вне ядра. Скалли [S.47] предложил следующую аппроксимацию распределения циркуляции в реальном вихре:

$$\gamma = \Gamma [r^2 / (r^2 + r_c^2)],$$

которая получена на основе измерений скоростей потока за крыльями. Соответствующее распределение завихренности описывается выражением

$$\xi = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\gamma}{dr} = \frac{\Gamma}{\pi r_c^2} \frac{1}{[1 + (r/r_c)^2]^2},$$

где r — расстояние до оси вихря. При таком распределении половина общей завихренности находится внутри ядра, а другая половина — снаружи. Соответствующая индуктивная скорость вычисляется по формуле

$$\mathbf{v} = (\Gamma/2\pi)(-h\mathbf{j} + y\mathbf{k}) / (y^2 + h^2 + r_c^2).$$

Интересно, что введение ядра вихря соответствует удалению вихря на большее «эквивалентное» расстояние $h_{\text{эква}} = (h^2 + r_c^2)^{1/2}$. Такая простая поправка весьма удобна для вычислений. Максимальная индуктивная скорость при этом достигается в точках $y = \pm \sqrt{h^2 + r_c^2}$ и равна

$$\omega_{\text{макс}} = \Gamma/4\pi \sqrt{h^2 + r_c^2}.$$

Максимальная скорость вращения в вихре (при $r = r_c$) теперь равна $\Gamma/4\pi r_c$, что составляет половину ее величины, достигаемой в предположении, что распределение скоростей в ядре такое же, как у вращающегося твердого тела. Это уменьшение максимальной скорости вследствие распределения завихренности вне ядра основано на экспериментальных данных. На рис. 10.19 сравниваются величины и положения пика индуктивной скорости в зависимости от расстояния h до оси вихря для следующих трех случаев: 1) вихревой нити (без введения ядра); 2) концентрации всей завихренности в ядре, вращающемся как твердое тело; 3) распределения завихренности в ядре и вне ядра. Видно, что влияние распределения вихрей вне ядра весьма существенно. Применительно к другим случаям Скалли

предлагает учитывать влияние ядра вихря путем умножения индуктивной скорости на величину $r^2/(r^2 + r_c^2)$. При этом для радиуса ядра концевых вихревых жгутов предлагается принимать $r_c = 0,0025R$. Необходимо отметить, что пока имеется очень

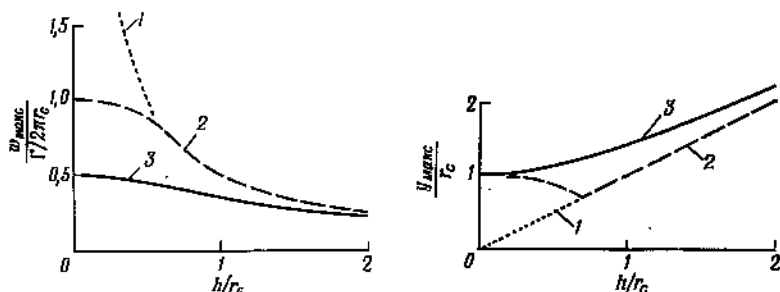


Рис. 10.19. Величина и положение максимума индуктивной скорости для трех моделей вихря.

1—вихревая нить; 2—вся завихренность сосредоточена внутри ядра; 3—завихренность распределена внутри ядра и вне его.

мало экспериментальных данных о строении ядра вихря, особенно для вращающихся лопастей. После получения таких данных описанная выше модель ядра, по-видимому, потребует уточнений.

10.8.2. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ ОТРЕЗОК ВИХРЯ

Прямолинейный отрезок вихря является наиболее удобным элементом для построения системы вихрей несущего винта при расчетах неоднородного поля индуктивных скоростей. Ломаной линией из таких элементов можно моделировать спиральные концевые вихревые жгуты. Отрезки прямолинейных вихрей позволяют также описывать продольную и поперечную завихренности, сходящие с внутренней части лопасти, причем для сглаживания особенностей поля скоростей целесообразно радиус ядра брать большим.

Займемся теперь выводом выражения для скорости, индуцируемой в пространстве прямолинейным отрезком вихря постоянной интенсивности, учитывая наличие ядра вихря. Рассмотрим прямолинейный отрезок вихревой нити длиной s интенсивности Γ . Индуктивную скорость будем определять в точке P , положение

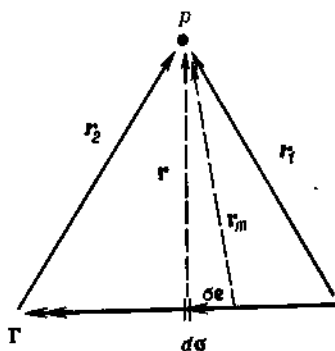


Рис. 10.20. Прямолинейный отрезок вихревой нити.

которой относительно концов отрезка определено векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (рис. 10.20), причем векторы могут быть заданы в любой подходящей системе координат. Согласно формуле Био — Савара, скорость, индуцируемая таким отрезком, равна

$$\Delta \mathbf{v} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int (\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\sigma})/r^3,$$

где \mathbf{r} — вектор, соединяющий элемент $d\boldsymbol{\sigma}$ отрезка с точкой P , и $r = |\mathbf{r}|$. Представим вектор \mathbf{r} в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \sigma \mathbf{e}$, где вектор \mathbf{r}_m характеризует отрезок наименьшей длины, соединяющий вихревую нить (или ее продолжение) с точкой P , а \mathbf{e} — единичный вектор вихревой нити. Как нетрудно установить,

$$\mathbf{r}_m = [\mathbf{r}_1(r_2^2 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) + \mathbf{r}_2(r_1^2 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)]/s^2, \\ \mathbf{e} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/s,$$

причем длина отрезка вихря определяется соотношением

$$s^2 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2.$$

При интегрировании вдоль отрезка вихря координата σ изменяется от s_1 до s_2 , где

$$s_1 = (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 - r_1^2)/s, \quad s_2 = (r_2^2 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)/s.$$

Замечая, что векторы \mathbf{r}_m и \mathbf{e} ортогональны, получим

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \int_{s_1}^{s_2} \frac{d\sigma}{s(r_m^2 + \sigma^2)^{3/2}} = \frac{\Gamma}{4\pi} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \frac{s_2 r_1 - s_1 r_2}{s r_m^2 r_1 r_2}.$$

Подставляя в эту формулу значения s_1 , s_2 , s и r_m , приходим к следующему выражению скорости, индуцируемой прямолинейным отрезком вихря:

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \frac{(r_1 + r_2)(r_1 r_2 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}{r_1 r_2 [r_1^2 r_2^2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2]} = \\ = \frac{\Gamma}{4\pi} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{1}{r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}.$$

Поскольку ядро вихря здесь не учитывается, на вихревой нити индуктивные скорости имеют особенность. Согласно [S.47]¹⁾, влияние вихревого ядра будет учтено, если умножить индуктивную скорость вихревой нити на

$$r_m^2 / (r_m^2 + r_c^2) = [r_1^2 r_2^2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2] / [r_1^2 r_2^2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 + r_c^2 s^2].$$

¹⁾ Вопрос о ядре вихря рассмотрен также в работах [24, В.31]. — Прим. перев.

Здесь r_m — минимальное расстояние от отрезка вихря до точки P , а r_c — радиус ядра вихря. В итоге индуктивная скорость прямолинейного отрезка вихря конечной длины с ядром радиуса r_c определится выражением

$$\Delta v = \frac{\Gamma}{4\pi} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \frac{(r_1 + r_2) (1 - r_1 \cdot r_2 / r_1 r_2)}{r_1^2 r_2^2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 + r_c^2 (r_1^2 + r_2^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)}.$$

10.8.3. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ВИХРЕВАЯ ПЛОЩАДКА

Как уже говорилось, продольные и поперечные свободные вихри несущего винта образуют за каждой из лопастей винтовые поверхности. Для участков такой поверхности, достаточно удаленных от лопастей, вполне допустима замена непрерывно распределенных вихрей сеткой из дискретных вихревых элементов. Даже для расположенных вблизи лопастей элементов такой поверхности можно надеяться получить удовлетворительную аппроксимацию посредством использования сетки дискретных вихрей с большим радиусом ядра (для уменьшения скорости вблизи вихря). Представление непрерывной вихревой пелены сеткой дискретных вихрей наиболее экономно в отношении объема вычислений. Однако возможны случаи, когда для повышения точности расчета скоростей требуется использование не сеток, а площадок с непрерывно распределенными вихрями. Такое представление желательно, например, для участков пелены, непосредственно примыкающих к задней кромке лопасти, и для сходящихся с впереди идущей лопасти участков пелены, вблизи которых проходит следующая лопасть. Одним из конечных элементов, для которых интегрирование определяемых формулой Био — Савара скоростей имеет смысл выполнить аналитически, является плоская прямоугольная вихревая площадка.

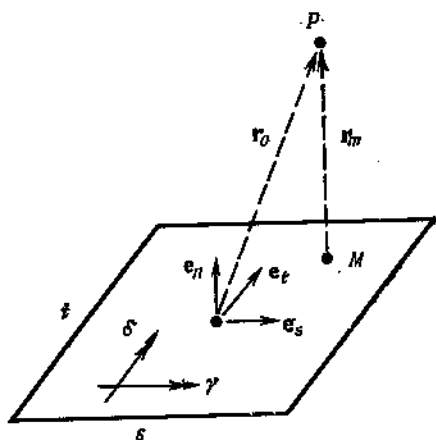


Рис. 10.21. Вихревой слой в виде прямоугольной площадки.

Рассмотрим сплошь покрытый вихревыми нитями прямоугольник со сторонами s и t (рис. 10.21). Индуцируемую им скорость будем определять в произвольной точке P , положение которой зададим проведенным к ней из центра площадки вектором \mathbf{r}_0 ; ориентацию площадки определим ортогональными

векторами \mathbf{e}_s и \mathbf{e}_t . Вектор \mathbf{e}_n — нормаль к площадке. Пусть \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — радиус-векторы от центра площадки к двум противоположным углам. Тогда индуктивная скорость в точке P будет определяться формулой

единичными векторами \mathbf{e}_s и \mathbf{e}_t , параллельными ее боковым сторонам, и нормалью $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_t$. Интенсивность слоя вихрей обозначим δ в направлении вектора \mathbf{e}_t и γ — в направлении \mathbf{e}_s . Величины δ и γ могут изменяться линейно (δ — в направлении \mathbf{e}_t и γ — в направлении \mathbf{e}_s). Минимальное расстояние r_m от точки P до площадки равно модулю вектора $\mathbf{r}_m = (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_n$. Вектор \mathbf{r}_m перпендикулярен вихревой площадке и пересекает ее в точке M . Приняв точку M за начало, введем на площадке систему координат (σ, τ) , так что центр площадки будет иметь координаты

$$\sigma = s_0 = -\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{e}_s, \quad \tau = t_0 = -\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{e}_t.$$

Стороны площадки описываются уравнениями $\sigma = s_0 \pm s/2$, $\tau = t_0 \pm t/2$. Идущий из произвольной точки пелены в точку P вектор определяется соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_m - \sigma \mathbf{e}_s - \tau \mathbf{e}_t.$$

Вектор поверхностной интенсивности вихря ω линейно зависит от координат σ и τ согласно выражению

$$\omega = \gamma \mathbf{e}_s + \delta \mathbf{e}_t = (\gamma_m + \sigma \gamma_s) \mathbf{e}_s + (\delta_m + \tau \delta_t) \mathbf{e}_t.$$

Условия сохранения вихрей требуют, чтобы соблюдалось равенство $\partial \gamma / \partial \sigma = -\partial \delta / \partial \tau$, что имеет место при $\gamma_s = -\delta_t$.

Применяя формулу Био — Савара и проводя интегрирование, получим следующее выражение скорости, индуцируемой вихревой площадкой:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{r} \times \omega}{r^3} \alpha A = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{t_0 - \frac{t}{2}}^{t_0 + \frac{t}{2}} \int_{s_0 - \frac{s}{2}}^{s_0 + \frac{s}{2}} \frac{r_m \gamma \mathbf{e}_t - r_m \delta \mathbf{e}_s + (\tau \gamma - \sigma \delta) \mathbf{e}_n}{(r_m^2 + \sigma^2 + \tau^2)^{3/2}} d\sigma d\tau = \\ &= -\frac{1}{4\pi} [(\gamma_m \mathbf{e}_t - \delta_m \mathbf{e}_s) I_1 + (-r_m \delta_t \mathbf{e}_s + \gamma_m \mathbf{e}_n) I_2 + \\ &\quad + (r_m \gamma_s \mathbf{e}_t - \delta_m \mathbf{e}_n) I_3 + \mathbf{e}_n (\gamma_s - \delta_t) I_4] \Big|_{t_0 - (t/2) s_0 - (s/2)}^{t_0 + (t/2) s_0 + (s/2)}, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint \frac{r_m}{r^3} d\sigma d\tau = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sigma \tau}{r_m} \right), \quad I_2 = \iint \frac{\tau}{r^3} d\sigma d\tau = \ln(r - \sigma), \\ I_3 &= \iint \frac{\sigma}{r^3} d\sigma d\tau = \ln(r - \tau), \quad I_4 = \iint \frac{\sigma \tau}{r^3} d\sigma d\tau = -r. \end{aligned}$$

Таким образом, индуктивная скорость $\Delta \mathbf{v}$ выражается через значения этих интегралов в четырех угловых точках рассматриваемой площадки. Полученное выражение много сложнее,

чем в случае вихревого отрезка, и использование его значительно увеличивает время счета, требуемое для вычисления поля индуктивных скоростей. Наиболее существен в этом выражении член с арктангенсом, который дает следующие предельные значения индуктивной скорости при приближении точки P к поверхности:

$$\Delta v \rightarrow \pm \frac{1}{2} (\delta e_s - \gamma e_t).$$

Здесь плюс соответствует приближению к площадке сверху, а минус — снизу. При пересечении площадки скорость изменяется скачком, величина которого равна поверхностной интенсивности вихря. При приближении точки P к краю площадки, например к точке $s_0 = 0$, $t_0 = t/2$, скорость становится равной

$$\Delta v = \frac{1}{2\pi} \gamma_m e_n \ln r_m,$$

т. е. на краях вихревой площадки имеет место логарифмическая особенность. На боковых границах пелены вихрей несущего винта весьма велика нормальная к пелене составляющая индуктивной скорости, что отражает эффект сворачивания прилегающих к этой границе участков пелены в концевые вихревые жгуты.

Логарифмическая особенность на остальных участках пелены связана лишь с дискретностью принятой модели, поскольку описание криволинейной вихревой поверхности посредством плоских вихревых прямоугольников приводит к появлению бесконечной кривизны в местах их стыка. Более того, при моделировании винтовой поверхности прямоугольными элементами возникают места пропусков или накладывания частей прямоугольников друг на друга. Именно такая аппроксимация реальной системы вихрей приводит к появлению бесконечных скоростей. При плавном, не имеющем разрывов и бесконечной кривизны соединении вихревых элементов логарифмические особенности в местах их стыковки взаимно уничтожаются. Исключить такую особенность у прямоугольных вихревых элементов путем перехода к вихревым трубкам конечного переменного сечения довольно сложно. Лучше всего, по-видимому, просто строить расчеты таким образом, чтобы в них не приходилось производить вычисление скоростей вблизи кромок вихревых элементов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчиков	5
Обозначения	6
1. Введение	17
1.1. Вертолет	17
1.1.1. Несущий винт вертолета	20
1.1.2. Схема вертолета	23
1.1.3. Режимы работы вертолета	24
1.2. Развитие вертолета	25
1.2.1. История развития вертолета	26
1.2.2. Литература	35
1.3. Обозначения	35
1.3.1. Характерные размерные величины	35
1.3.2. Физические параметры лопасти	36
1.3.3. Аэродинамические параметры лопасти	37
1.3.4. Параметры движения лопасти	37
1.3.5. Угол атаки несущего винта и скорость обтекающего его потока	39
1.3.6. Силы и мощность на несущем винте	39
1.3.7. Плоскости диска	40
1.3.8. Обозначения NASA	40
2. Вертикальный полет I	42
2.1. Импульсная теория	42
2.1.1. Активный диск	43
2.1.2. Импульсная теория винта на режиме висения	44
2.1.3. Импульсная теория винта в полете с набором высоты	46
2.1.4. Затраты мощности на режиме висения	48
2.2. Коэффициент совершенства	49
2.3. Обобщенная импульсная теория	50
2.3.1. Несущий винт на режиме висения или вертикального набора высоты	52
2.3.2. Закручивание следа	55
2.3.3. Закрутка следа, обусловленная профильной составляющей крутящего момента	58
2.4. Теория элемента лопасти	59
2.4.1. История развития теории элемента лопасти	60
2.4.2. Теория элемента лопасти для вертикального полета	62
2.5. Элементно-импульсная теория	68
2.6. Аэродинамические характеристики на висении	70
2.6.1. Концевые потери	70
2.6.2. Индуктивная мощность, обусловленная неравномерностью скорости протекания и концевыми потерями	73
2.6.3. Неоперенная часть лопасти	73

2.6.4.	Средний коэффициент подъемной силы лопасти	74
2.6.5.	Эквивалентный коэффициент заполнения	75
2.6.6.	Идеальный несущий винт	76
2.6.7.	Оптимальный несущий винт для висения	77
2.6.8.	Влияние крутки и сужения	79
2.6.9.	Примеры полар на висении	80
2.6.10.	Нагрузка на диск, распределение нагрузки по размаху лопасти и циркуляция	82
2.7.	Вихревая теория	83
2.7.1.	Представление несущего винта и его следа системой вихрей	85
2.7.2.	Дискковая вихревая теория	86
2.7.3.	Лопастная вихревая теория	91
2.7.4.	Неравномерное распределение скоростей протекания (численные решения)	98
2.7.5.	Литература по вихревой теории	101
2.8.	Литература	101
3.	Вертикальный полет II	102
3.1.	Индуктивная мощность в вертикальном полете	102
3.1.1.	Импульсная теория вертикального полета	103
3.1.2.	Режимы обтекания несущего винта в вертикальном полете	107
3.1.3.	Кривая индуктивных скоростей	111
3.1.4.	Литература	115
3.2.	Вертикальное снижение на авторотации	115
3.3.	Вертикальный набор высоты	122
3.4.	Сопротивление фюзеляжа	123
3.5.	Интерференция двухвинтовых несущих систем	125
3.6.	Влияние близости земли	129
4.	Полет вперед I	132
4.1.	Импульсная теория винта при полете вперед	133
4.1.1.	Индуктивная мощность	133
4.1.2.	Набор высоты, снижение и авторотация при полете вперед	138
4.1.3.	Коэффициент концевых потерь	139
4.2.	Вихревая теория винта при полете вперед	140
4.2.1.	Результаты классической вихревой теории	142
4.2.2.	Изменение индуктивной скорости по диску при полете вперед	145
4.2.3.	Литература	147
4.3.	Интерференция двухвинтовых несущих систем при полете вперед	147
4.4.	Влияние земли при полете вперед	152
5.	Полет вперед II	154
5.1.	Работа несущего винта при полете вперед	154
5.2.	Аэродинамические характеристики лопасти	171
5.3.	Аэродинамические силы несущего винта	174
5.4.	Мощность, потребляемая при полете вперед	180
5.5.	Маховое движение лопасти	186
5.6.	Примеры аэродинамических характеристик винта и махового движения лопасти	194
5.7.	Обзор предположений	201
5.8.	Концевые потери и влияние неоперенной части лопасти	202
5.9.	Момент веса лопасти	203
5.10.	Линейное распределение индуктивных скоростей	204
5.11.	Высшие гармоники махового движения	207
5.12.	Профильная мощность и радиальное течение	209

5.13. Маховое движение при наличии пружины в шарнире	216
5.14. Относ горизонтальных шарниров	221
5.15. Бесшарнирный винт	226
5.16. Карданный винт и винт типа качалки	227
5.17. Компенсация взмаха	231
5.18. Равновесие сил и моментов и баланс мощностей на вертолете	235
5.19. Качание лопасти	241
5.20. Зона обратного обтекания	245
5.21. Сжимаемость воздуха	250
5.22. Рулевой винт	252
5.23. Численные решения	253
5.24. Литература	254
6. Аэродинамический расчет вертолета	265
6.1. Аэродинамические характеристики в вертикальном полете	26
6.1.1. Потребная мощность на режимах висения и вертикального полета	267
6.1.2. Набор высоты и снижение	269
6.1.3. Располагаемая мощность	269
6.2. Аэродинамические характеристики при полете вперед	270
6.2.1. Потребная мощность при полете вперед	270
6.2.2. Набор высоты и снижение при полете вперед	272
6.2.3. Выражение потребной мощности через D/L	273
6.2.4. Подъемная сила и сопротивление несущего винта	274
6.2.5. Выражение потребной мощности через отношение P/T	275
6.3. Летно-технические характеристики вертолета	276
6.3.1. Летно-технические характеристики на висении	276
6.3.2. Минимальная удельная мощность на висении	277
6.3.3. Мощность, потребная для горизонтального полета	278
6.3.4. Набор высоты и снижение	280
6.3.5. Максимальная скорость	281
6.3.6. Максимальная высота полета	283
6.3.7. Дальность и продолжительность полета	283
6.4. Другие задачи аэродинамического расчета	285
6.4.1. Заданная мощность (автожир)	285
6.4.2. Заданный угол наклона вала (рулевой винт)	286
6.5. Уточненный аэродинамический расчет	287
6.6. Литература	288
7. Проектирование вертолета	295
7.1. Типы несущих винтов	295
7.2. Типы вертолетов	298
7.3. Предварительное проектирование	301
7.4. Ограничения скорости полета	304
7.5. Посадка на режиме авторотации при отказе двигателя	307
7.6. Вредное сопротивление вертолета	312
7.7. Выбор профиля лопасти	313
7.8. Профильное сопротивление лопасти несущего винта	318
7.9. Литература	320
8. Математическое описание вращающихся систем	322
8.1. Ряды Фурье	322
8.2. Сумма гармоник	324
8.3. Гармонический анализ	326
8.4. Фурье-преобразование координат	327

8.4.1. Преобразование параметров движения	327
8.4.2. Преобразование уравнений движения	331
8.5. Собственные значения и собственные векторы движения несущего винта	337
8.6. Анализ линейных периодических систем	340
8.6.1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	341
8.6.2. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами	344
9. Динамика несущего винта I	351
9.1. Теория Штурма — Лиувилля	351
9.2. Движение лопасти в плоскости взмаха	353
9.2.1. Маховое движение жесткой лопасти	353
9.2.2. Изгиб лопасти в плоскости взмаха	355
9.2.3. Невращающаяся система координат	361
9.2.4. Изгибающие моменты	363
9.3. Движение лопасти в плоскости вращения	364
9.3.1. Маховое движение и качание жесткой лопасти	364
9.3.2. Изгиб в плоскости вращения	367
9.3.3. Совместный изгиб в плоскостях вращения и взмаха	369
9.4. Крутильные колебания	373
9.4.1. Установочное и маховое движения жесткой лопасти	373
9.4.2. Конструктивное регулирование взмаха и качания	377
9.4.3. Кручение и изгиб в плоскости взмаха	381
9.4.4. Невращающаяся система координат	388
9.5. Реакция втулки	389
9.5.1. Вращающиеся нагрузки	390
9.5.2. Нагрузки в невращающейся системе координат	396
9.6. Движение вала несущего винта	410
9.7. Связанные маховое, вращательное и крутильное движения лопасти	407
9.8. Изгибные тоны лопасти несущего винта	408
9.8.1. Теория упругой балки применительно к закрученной лопасти	408
9.8.2. Уравнения собственных колебаний	415
9.8.3. Собственные частоты изгибных колебаний	418
9.8.4. Литература	420
9.9. К выводу уравнений движения	421
9.9.1. Интегральный подход при использовании уравнений Ньютона	421
9.9.2. Дифференциальный подход при использовании уравнений Ньютона	422
9.9.3. Метод разложения по собственным тонам колебаний	422
9.9.4. Метод Галеркина	424
9.9.5. Метод Лагранжа	426
9.9.6. Метод Рэлея — Ритца	427
9.9.7. Методы сосредоточенных параметров	428
10. Аэродинамика несущего винта I	429
10.1. Теория несущей линии	429
10.2. Нестационарная теория профиля	432
10.3. Пелена ближнего вихревого следа	443
10.4. Нестационарная теория профиля при изменяющейся во времени скорости набегающего потока	449
10.5. Плоская нестационарная модель обтекания сечения лопасти винта	454
10.6. Приближенные методы нестационарной аэродинамики лопасти	467
10.6.1. Теория несущей линии	467
10.6.2. Непрерывная двумерная аппроксимация вихревой пелены	468

10.6.3. Модель активного диска	470
10.6.4. Возмущенные скорости протекания в нестационарной аэродинамической модели винта	474
10.7. Нестационарная теория профиля сечения вращающейся лопасти	480
10.8. Скорость, индуцируемая вихрями	488
10.8.1. Бесконечный прямолинейный вихрь	489
10.8.2. Прямолинейный отрезок вихря	493
10.8.3. Прямоугольная вихревая площадка	495

Содержание книги 2

11. Аэродинамика несущего винта II
12. Динамика несущего винта II
13. Аэродинамика лопасти III
14. Аэроупругость вертолета
15. Устойчивость и управляемость
16. Срыв потока на лопастях винта
17. Шум вертолета

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-я Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».