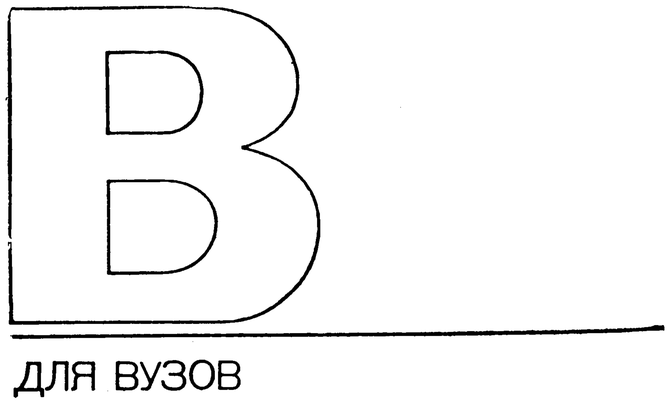


Р.А.Михеев

ПРОЧНОСТЬ ВЕРТОЛЕТОВ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов авиационных специальностей втузов

МОСКВА
·МАШИНОСТРОЕНИЕ·
1984

ББК 39.52
М69
УДК 629.7.015.4

Рецензенты: кафедра прочности летательных аппаратов ордена Трудового Красного Знамени Московского инженерно-физического института и д-р техн. наук *А. В. Некрасов*

Михеев Р. А.
М69 Прочность вертолетов: Учебник для авиационных специальностей втузов. — М.: Машиностроение, 1984. — 280 с., ил.
В пер.: 1 р. 10 к.

М $\frac{3606030000-54}{038(01)-84}$ 54-84

ББК 39.52
6Т5.1

Ростислав Александрович Михеев

ПРОЧНОСТЬ ВЕРТОЛЕТОВ

Редактор **Н. В. Корженевская**
Художественный редактор **В. В. Лебедев**
Технические редакторы **Н. В. Тимофеенко, Т. С. Старых**
Корректоры **О. Е. Мишина** и **Л. Е. Сонюшкина**

ИБ № 4449

Сдано в набор 15.02.84. Подписано в печать 14.06.84. Т-12643. Формат 60×90 1/16. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 17,5. Усл. кр.-отт. 17,5. Уч.-изд. л. 18,73. Тираж 4500 экз. Заказ 332. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение», 107076, Москва, Стромынский пер., 4.

Московская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7.

© Издательство «Машиностроение», 1984 г.

Предисловие

Настоящая книга является учебником по курсу «Прочность вертолета» и предназначена для студентов авиационных специальностей втузов.

Основой для написания книги послужили материалы лекций, читаемых автором в Московском ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции авиационном институте им. Серго Орджоникидзе.

Курс «Прочность вертолета» тесно связан с курсами «Сопротивление материалов» и «Строительная механика авиационных конструкций». Он требует знания высшей математики и теоретической механики в объеме, обычном для технического вуза. В учебнике сведения из этих курсов не повторяются.

Методы обеспечения прочности вертолета разработаны в основном за последние 30 лет, что связано с широким развитием вертолетостроения в этот период. Общеизвестны большие успехи отечественного вертолетостроения. Советские конструкторы создали вертолеты, во многих случаях превосходящие лучшие иностранные образцы. К факторам, обусловившим эти достижения, относятся и успехи отечественной науки о прочности вертолетов, созданной трудами советских ученых: М. Л. Миля, И. В. Ананьева, Ю. С. Богданова, М. С. Галкина, Л. Н. Гродко, В. Д. Ильичева, А. Ю. Лисса, Ю. А. Мягкова, А. В. Некрасова, А. Ф. Селихова, Э. В. Токарева, З. Е. Шнурова и др. Все основные проблемы прочности вертолетов нашли свое решение в работах советских исследователей [32].

Автор считает себя обязанным выразить глубокую благодарность заведующему кафедрой академику И. Ф. Образцову, а также канд. техн. наук Ю. С. Богданову, д-ру техн. наук В. Н. Далину, инж. В. С. Лосеву, канд. техн. наук Ю. А. Мягкову и канд. техн. наук З. Е. Шнурову за ряд ценных советов, данных при ознакомлении с рукописью книги, являющейся первым опытом создания учебника по этому курсу.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A – кинетическая энергия;
a – скорость звука, равная 340 м/с;
b – хорда;
$b_{0,7}$ – хорда профиля лопасти на радиусе $\bar{r} = 0,7$;
C – толщина профиля;
$\bar{C}$ – относительная толщина профиля, равная c/b;
C_e – удельный расход топлива, кг/(кВт·ч);
C_r – удельный расход топлива, кг/(даН·ч);
D – диаметр несущего винта или вентилятора;
F – площадь, ометаемая винтом, равная $\frac{\pi D^2}{4}$;
m – масса летательного аппарата, кг;
H – высота полета;
M – число Маха полета ($M = \frac{V}{a}$);
M_0 – среднее по азимуту число Маха в концевом сечении лопасти, $M_0 = \frac{\omega R}{a}$;
$M_{кр}$ – критическое число М;
$m_д$ – коэффициент двухконтурности ТДРД;
$m_к$ – коэффициент мощности винта;
$N_в$ – мощность, необходимая для вращения винта, кВт;
$N_{дв}$ – мощность двигателя. кВт;
p – давление* на площадь, ометаемую винтом или вентилятором, равное G/F, даН/м^2;
q – скоростной напор потока или нагрузка, приходящаяся на единицу мощности;
R – максимальный радиус лопасти;
r – текущий радиус лопасти;
$\bar{r}$ – относительный радиус лопасти, равный r/R;
T – сила тяги движителя, даН;
t – коэффициент тяги несущего винта, $t = \frac{2T}{\rho б \pi R^2 (\omega R)^2}$;
t_y, t_x – соответственно коэффициенты подъемной силы и пропульсивной силы и пропульсивной тяги несущего винта;
$t_п$ – время продолжительности полета, ч;
V – скорость полета аппарата (относительно воздуха), м/с;
$\bar{V}$ – относительная скорость, равная $V/\omega R$;
$x_д$ – расстояние центра давления от передней кромки;

* Используемая автором единица давления "деканьютон на квадратный метр" соответствует 9,81 Па.

$\bar{x}_д$ – безразмерная координата центра давления, равная $x_д/b$;
$y_к$ – величина прогиба конца лопасти;
z – число лопастей;
η – коэффициент полезного действия (КПД);
η_0 – относительный КПД винта на режиме висения;
λ – коэффициент гидравлических потерь;
μ – тяговооруженность, характеристика режима работы винта;
ξ – коэффициент потерь мощности СУ или коэффициент местных потерь агрегата;
ρ_H – плотность воздуха на высоте H;
$б_{0,7}$ – коэффициент заполнения винта на характерном радиусе, равный $z b_{0,7}/\pi R$;
$\varphi_{0,7}$ – угол установки лопастей на $\bar{r} = 0,7$;
ω – угловая скорость, рад/с;
ωR – окружная скорость конца лопасти, м/с.

СОКРАЩЕНИЯ

ВНВ – втулка несущего винта;
ГР – главный редуктор;
ГТД – газотурбинный двигатель;
ТРД – турбореактивный двигатель;
ДТРД – двухконтурный ТРД;
ЛНВ – лопасть несущего винта:
НВ – несущий винт;
ПР – промежуточный редуктор;
ТВД – турбовинтовой двигатель;
ТС – топливная система;
СМП – система маслопитания;
СО – система охлаждения;
СНГ – система нейтрального газа;
СПТ – система пожаротушения;
ХВ – хвостовой винт;
ХР – хвостовой редуктор;
СУ – силовая установка;
ЭУ – энергоустановка;
НЛГ – нормы летной годности;
ГШ – горизонтальный шарнир;
ВШ – вертикальный шарнир;
ОШ – осевой шарнир.

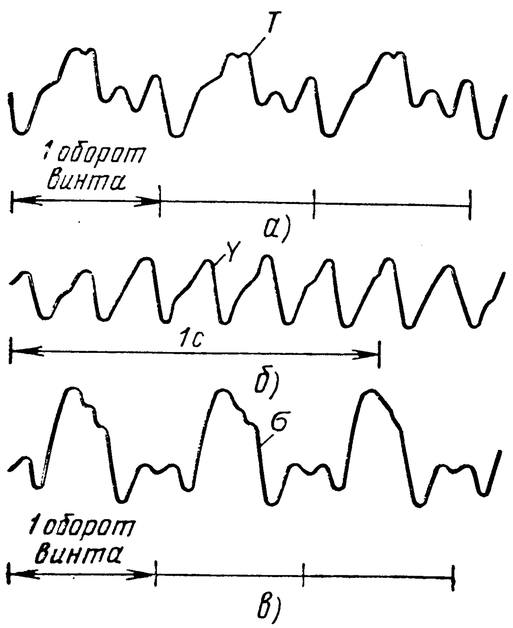


Рис. В1. Примеры изменения по времени аэродинамической нагрузки на отсек лопасти (*а*), вибрации кабины вертолета (*б*) и напряжения в лонжероне лопасти (*в*)

мя одного оборота винта (рис. В.1, *а*). Эта составляющая возникает вследствие изменения условий обтекания лопасти при ее движении. Наличие переменной составляющей аэродинамической нагрузки неизбежно приводит к появлению на всех режимах полета переменных по времени деформаций большинства элементов конструкции, их колебаний и переменных напряжений в них (рис. В.1, *б* и *в*). За все время эксплуатации вертолета, продолжающейся тысячи часов, происходят миллионы циклов изменения нагрузки, а следовательно, и миллионы циклов колебаний, миллионы циклов переменных напряжений. Переменные аэродинамические нагрузки на лопасти несущего винта вызывают вибрации и переменные напряжения и в других агрегатах. Указанная специфическая особенность нагружения агрегатов вертолета, присущая практически всем режимам полета, определяет задачи оценки поведения конструкции вертолета при переменных нагрузках как в отношении ее целости в эксплуатации при действии многих миллионов циклов нагрузки (усталостной прочности), так и в отношении ограничения уровня вибраций. Практически эти задачи являются главными для вертолетов. Для каждого агрегата вертолета устанавливаетяс ресурс по условиям усталостной прочности, т. е. наибольшее время безопасной (без разрушений) эксплуатации при действии переменных (циклических) нагрузок. Агрегат, отработавший установленный ресурс, подлежит замене. Следовательно, увеличение ресурса является важной народнохозяйственной задачей, так как позволяет сократить количество вновь изготовляемых агрегатов взамен выработавших свой ресурс. Ресурс по условиям усталостной прочности является основным критерием оценки усталостной прочности конструкции. Его можно увеличить снижением уровня переменных нагрузок, а также повышением выносливости конструкции — ее способности выдерживать усталостные нагрузки без разрушения — соответствующими конструктивными и технологическими мероприятиями.

При проектировании часто руководствуются условными неравенствами вида

$$\sigma_{э.р} < \sigma_{wг}.$$

Здесь $\sigma_{э.р}$ — напряжения, действующие в полете (определяются

расчетом); $\sigma_{wг}$ — так называемый гарантированный предел выносливости, т. е. известные по опыту создания вертолетов величины переменных напряжений, при которых ресурс типовых элементов конструкции будет достаточно большим. Неравенство является промежуточным, имеющим значение только при проектировании. Окончательным критерием является величина ресурса R, определяемая расчетно-экспериментальным методом (см. гл. 1) для натурных агрегатов.

Уровень вибраций фюзеляжа вертолета должен удовлетворять неравенству

$$A_э < A_д, \qquad (В.2)$$

где $A_э$ — характеристика уровня действующих вибраций; $A_д$ — допустимые по соображениям, указанным ниже, значения. Ограничение уровня вибраций обусловлено их неблагоприятным воздействием на организм человека и установленные в фюзеляже приборы и оборудование. Как показывают медико-биологические исследования, большие по величине вибрации повышают утомляемость экипажа, могут вызвать патологические явления даже в тяжелой форме. Может иметь место преждевременный выход из строя оборудования или нарушение его работы. Поэтому при конструировании должны быть предусмотрены мероприятия по снижению уровня вибраций до величин, удовлетворяющих неравенству (В.2). Это достигается снижением уровня переменных нагрузок, уменьшением реакции конструкции и специальными устройствами. Уровень вибраций проверяется на натурном вертолете в полете.

Еще одна важная особенность аэродинамических сил состоит в том, что они могут зависеть от перемещений и деформаций агрегата, на который действуют. Например, вследствие действия аэродинамических сил возникают колебания лопасти, при которых изменяются углы атаки сечений, а следовательно, и величина аэродинамических сил. В определенных случаях при совместном действии аэродинамических и инерционных сил и сил упругости деформации конструкции и действующие в ней напряжения начинают увеличиваться по времени до опасных размеров, несмотря на то, что внешние условия (параметры режима полета) не меняются. Имеет место так называемая аэроупругая динамическая неустойчивость конструкции. Потеря устойчивости возможна и при действии только инерционных и упругих сил. Устранение явлений неустойчивости необходимо для обеспечения безопасной эксплуатации вертолета и также является одной из задач комплекса работ по прочности. При проектировании о неустойчивости судят обычно по виду решений соответствующих уравнений, описывающих движение конструкции. Критерием устойчивости является отсутствие решений, которые соответствуют расходящемуся движению или движению, достигающему недопустимо большой величины. Отсутствие явлений рассматриваемого типа обеспечивается правильным выбором конструктивных параметров и обязательно проверяется экспериментально на натурном вертолете.

Отметим, наконец, что в отдельных случаях напряжения или деформации значительной величины могут возникать как следствие соответствующего распределения температур в агрегатах. Эти случаи для вертолета встречаются относительно редко, главным образом как следствие воздействия потока тепла от двигателей. Изменение температурных условий может оказать и косвенное воздействие, влияя на величины параметров, определяющих решения перечисленных выше задач (например, жесткости, предела прочности и др.).

К другим факторам, влияющим на прочность конструкции, относятся коррозия, износ, снижение со временем прочности клеевых соединений и другие виды старения.

Определяющие задачи для основных агрегатов вертолета. Для различных агрегатов вертолета определяющими (главными) являются различные задачи:

для несущего и рулевого винтов, включая лопасти, втулку и часть системы управления между лопастями и бустерами,— обеспечение усталостной прочности и динамической устойчивости;

для фюзеляжа, крыла, поверхностей управления, шасси и системы управления на участке от бустеров до рычагов управления в кабине летчика — обеспечение прочности при больших однократных нагрузках;

для подредукторной рамы — обеспечение усталостной прочности и прочности при больших однократных нагрузках.

В задачах о вибрациях и динамической (упругой) устойчивости рассматриваются совместно несколько агрегатов (например, лопасти винта и система управления или лопасти винта, фюзеляж и шасси и т. д.).

Из изложенного не следует, что другие задачи для каждого агрегата не имеют значения. Однако перечисленные являются определяющими, главными.

§ В.2. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ И МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРОЧНОСТИ

В общей постановке задачи по прочности являются достаточно сложными. Поэтому большое практическое значение имеют методы выделения и раздельного рассмотрения отдельных частей задачи с последующим учетом опущенных связей. Общий подход иллюстрируется схемой, приведенной на рис. В.2. Первый блок — определение нагрузок M и перемещений y по заданным характеристикам режима полета P_1 и конструкции P_2. Второй — определение напряжений σ и относительных деформаций ε по заданным нагрузкам. Третий блок — методы установления критериев прочности.

Первый блок более детально будет рассмотрен ниже. Содержание второго блока в общей формулировке — нахождение σ и ε методами сопротивления материалов и строительной механики. В дальнейшем будут даны лишь некоторые уточнения в необходимых случаях.

Содержание третьего блока зависит от решаемой задачи. При рассмотрении действия однократных нагрузок — это методика определения допустимых величин напряжений на основании свойств конструкционных материалов и представлений строительной механики. Для усталостной прочности — методика расчета ресурса, основанная на сведениях о выносливости материалов и конструкций при действии заданных по величине нагрузок (см. гл. 1). Для задачи о вибрациях — методика установления допустимого уровня вибраций на основе медико-биологических данных и характеристик виброустойчивости оборудования вертолета. Для задачи об упругой неустойчивости — методика оценки последствий неустойчивости.

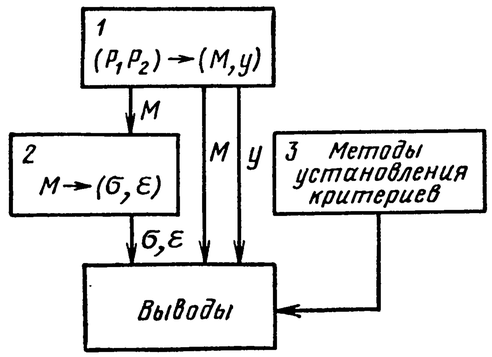


Рис. В.2. Схема общего подхода к решению задач по прочности

Методы определения нагрузок и перемещений по заданным характеристикам режима полета и конструкции (блок 1 на рис. В.2) удобно рассмотреть с помощью функциональной диаграммы рис. В.3. Для упрощения на этом рисунке подробно изображены элементы диаграммы лишь для одного агрегата, а остальным соответствует один (обобщенный) блок. Конструкция, обладающая в общем случае упругими, инерционными и аэродинамическими свойствами, представлена на этой диаграмме четырьмя блоками, соответствущими этим свойствам. При этом блок геометрических характеристик, необходимых для определения аэродинамических и инерционных сил, разделен на два, соответствующих: один — ненагруженному состоянию конструкции и другой — изменениям, вызванным действием нагрузок. Сочетания этих свойств определяют возникающие при взаимодействии конструкции с воздухом и агрегатами вертолета аэродинамические силы и силы реакции, а также и силы инерции. Эти силы вследствие податливости конструкции изменяют ее геометрические характеристики, поэтому изменяются, в свою очередь, и величины самих сил. Особый блок определяет управляющие воздействия летчика, также влияющие на величину сил и перемещений. Наконец, связи между рассматриваемым и другими агрегатами определяют силы реакции.

Следовательно, в общей постановке надо рассматривать совместно как силы, так и результаты их воздействия на конструкцию, а также рассматривать вертолет в целом без подразделения его на отдельные агрегаты. Однако такой подход является очень сложным. Поэтому применяются условные упрощающие приемы: раздельное рассмотрение каждого агрегата в отдельности, замена одного из элементов функциональной диаграммы детерминированным воздействием или эффектом, исключение отдельных связей. Первое упрощение состоит в том, что рассматривается каждый из агрегатов в отдельности, полагая реакции других известными. Взаимодей-

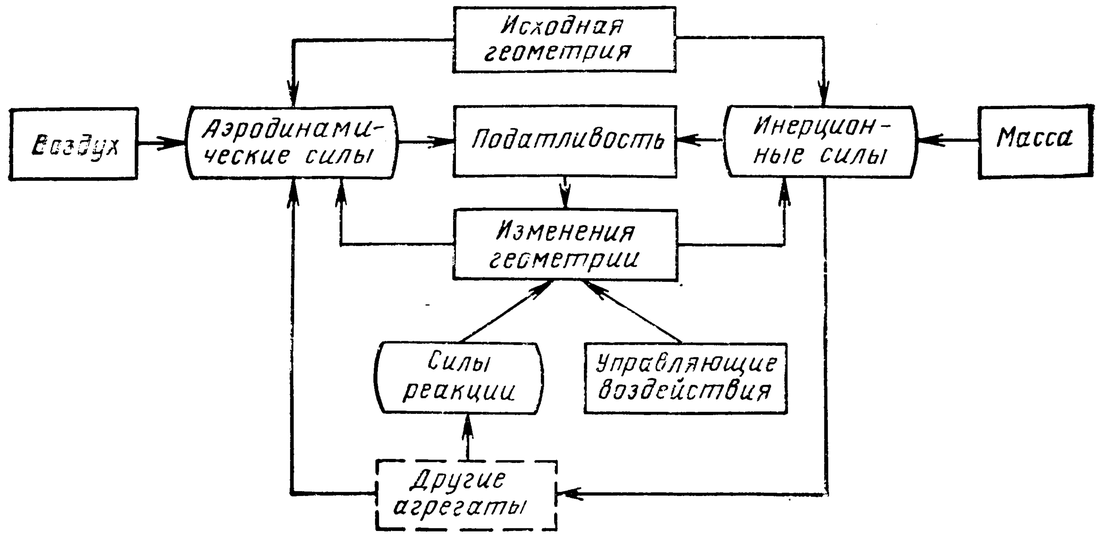


Рис. В.3. Функциональная диаграмма взаимодействия конструкции с внешней средой

ствие агрегатов учитывается на окончательном этапе. Этот прием положен и в основу книги. Для учета взаимодействия необходимо знать правила определения реакций. Эти правила особенно сложны для винтов. Они выделены в особую главу. К приемам второй группы относятся задание внешней геометрии агрегата при определении аэродинамических сил (предмет аэродинамики) и задание детерминированных воздействий при определении деформаций.

Особенно большое распространение получил метод свободных колебаний. Он предполагает внешнее детерминированное воздействие — выведение конструкции из положения равновесия — только в начальный момент. Далее рассматриваются ее собственные колебания (без воздействия извне). Метод позволяет получить непосредственное качественное представление об уровне переменных напряжений, возникающих в полете, и исходные данные для количественного определения величин напряжений на последующих этапах расчета.

Для третьей группы приемов наиболее характерны исключение влияния изменения геометрических характеристик на величину аэродинамических и инерционных сил (часто используется при рассмотрении действия однократных нагрузок) и пренебрежение аэродинамическими силами (например, при изучении земного резонанса). Упрощающие приемы используются как в расчетно-теоретических работах, так и при экспериментальных исследованиях. Сведения об общих принципах должны дать начальную ориентировку, в дальнейшем они будут развиты.

Перейдем теперь к рассмотрению порядка проведения работ по прочности. Прочность конструкции обеспечивается циклом теоретических, расчетных и экспериментальных работ. Эти работы начинаются на стадии разработки технического предложения и продолжаются вплоть до снятия данного типа вертолета с эксплуатации

на всех стадиях: проектирования, постройки и доводки опытного экземпляра вертолета, внедрения его в серийное производство, производства и эксплуатации вертолетов.

В зависимости от стадии решаются различные задачи по прочности и применяются соответственно различные, наиболее подходящие для этого методы. На стадии разработки технического предложения и эскизного проектирования при выборе схемы вертолета и его основных параметров руководствуются главным образом общими теоретическими соображениями об особенностях нагружения и влияния параметров конструкции на прочность, а также опытом создания предшествующих вертолетов и данными расчетов. На стадии технического проектирования основной задачей является выбор параметров конструкции каждого агрегата вертолета, а поэтому основной метод на этой стадии — выполнение подробных расчетов по прочности всех агрегатов вертолета. Эти расчеты имеют своей целью оценку влияния параметров конструкции на характеристики прочности, что позволяет осуществить оптимальный их выбор. Выполняются также экспериментальные исследования отдельных элементов конструкции, а иногда и агрегатов. Испытываются модели в аэродинамических трубах. При доводке опытного вертолета и запуске его в серийное производство должна быть получена полная ясность относительно обеспечения безопасности его эксплуатации по условиям прочности. Поэтому на этой стадии выполняются в большом объеме работы, главным образом экспериментальные, на натурном вертолете в полете и на стендах, имеющие своей целью оценку прочностных характеристик натурной конструкции. Эти работы являются особо ответственными. Ошибка в окончательной оценке приведет или к катастрофам при эксплуатации вертолетов, или к нежелательным последствиям экономического или технического характера.

При серийном производстве главной задачей по обеспечению прочности является контроль за качеством серийной продукции. Главное средство решения этой задачи — систематические испытания образцов серийной продукции на стендах. Наконец, на стадии нормальной эксплуатации вертолета ведутся работы по обобщению опыта эксплуатации в части, касающейся прочности, по сбору статистических сведений о характере нагружения агрегатов в условиях нормальной эксплуатации и нередко по улучшению прочностных характеристик.

Для решения задач по обеспечению прочности, как это следует из изложенного выше, используются как расчетные, так и экспериментальные методы. Не следует противопоставлять их друг другу. Расчетные методы не всегда позволяют получить результаты с необходимой точностью. Однако они незаменимы для выбора оптимальных параметров конструкции. Экспериментальные методы в ряде случаев позволяют получить более точные и надежные данные, поэтому они употребляются главным образом для проверки и подтверждения выводов из расчетов, проектных данных и прочностных характеристик конструкции.

§ В.3. РАСЧЕТНЫЕ СЛУЧАИ НОРМ ПРОЧНОСТИ

Поскольку обеспечение требований по прочности является чрезвычайно ответственной задачей, оно регламентируется обязательными для конструкторов нормами летной годности [27], гл. 4 которых является нормами прочности вертолетов. В нормах прочности заданы исходные требования к расчету и экспериментальным работам по обеспечению прочности, установлены объем работ по обеспечению прочности и условия нагружения; даны указания по определению величин нагрузок.

Вертолеты могут осуществлять полет на различных режимах, отличающихся скоростью, высотой и другими параметрами, могут выполнять различные маневры. Нагрузки на агрегаты вертолета существенно зависят от режима полета или вида маневра. Для того чтобы избавить конструктора от необходимости производить трудоемкие расчеты для всех возможных на вертолете режимов и маневров и сосредоточить его внимание на тех из них, которые определяют прочность, в нормах прочности задаются так называемые расчетные случаи. Эти случаи установлены на основе анализа нагружения агрегатов вертолета в полете, при посадках и в наземных условиях, опыта эксплуатации и проектирования вертолетов. Они выбраны так, чтобы вертолет удовлетворял всем требованиям по прочности и, в конечном свете, по безопасности по условиям прочности при всех условиях нормальной эксплуатации. При проектировании вертолета конструктор обязан рассмотреть все нормированные случаи. Нормы прочности составляются с учетом перспективы развития вертолетостроения. Однако, очевидно, нельзя предусмотреть все принципиально новые конструктивные схемы и решения. Необходимы дополнительные теоретические и экспериментальные исследования.

Периодически производится пересмотр и уточнение норм прочности с учетом тенденций развития вертолетостроения, результатов теоретических и экспериментальных исследований и опыта постройки и эксплуатации вертолетов. Поэтому необходимо пользоваться последним изданием норм летной годности. На вертолеты необычных схем и летательные аппараты, у которых несущие винты несут менее 75% полетного веса, действие норм [27] не распространяется. Для них необходимы специальные расчетные условия, учитывающие специфические особенности нагружения таких объектов.

Перейдем теперь к рассмотрению основных расчетных случаев. Расчетные случаи разделяются на три группы: случаи нагружения в полете, случаи нагружения при посадке и случаи нагружения в наземных условиях. Случаи обозначаются римскими цифрами с индексами: л — летные, п — посадочные, з — земные. Предусмотрено шесть случаев нагружения в полете (I-л — VI-л), семь случаев нагружения при посадке (I-п — VII-п) и четыре случая нагружения

в земных условиях (I-з — IV-з). Кроме этих основных в нормах предусмотрены еще и некоторые дополнительные случаи, имеющие частное значение, относящиеся только к отдельным агрегатам. Заданы также нагрузки на отдельные элементы конструкции, не охваченные основными случаями.

Для каждого расчетного случая задается совокупность исходных данных, необходимых для определения нагрузок путем расчета или эксперимента. Эта совокупность данных определяет некоторый режим или группу режимов полета. Надо иметь в виду, что режимы, соответствующие каждому расчетному случаю, нельзя полностью рассматривать как вполне реальные. Они представляют собой некоторое обобщение реальных режимов эксплуатации вертолета. В данном разделе расчетные случаи описываются лишь в общих чертах. Некоторые новые понятия и необходимые подробности будут рассмотрены в дальнейшем, в соответствующих разделах курса.

Случаи нагружения в полете. Случай I-л — типовой полет. Рассматривается нагружение вертолета на всех наиболее характерных эксплуатационных режимах полета. К их числу обычно относятся: висение, горизонтальный полет на малых скоростях ($V_м = 40 \ldots 60$ км/ч), на крейсерской $V_{кр}$ и максимальной V_{max} скоростях, разгон, набор высоты, установившиеся виражи и скольжения, планирование (моторное и на режиме авторотации несущих винтов) и торможение. Дополнительно учитывается увеличение переменных нагрузок при полете в болтанку, при выполнении маневров и при посадках. Этот случай служит для обеспечения усталостной прочности основных агрегатов вертолета. Поэтому в нормах прочности задана относительная продолжительность рассматриваемых режимов полета (по отношению к общей продолжительности полетов) для различных вариантов применения вертолетов.

Случай II-л — разворот на режиме висения. Рассматривается нагружение вертолета в процессе разворота на висении у земли, выполняемого с большой угловой скоростью вертолета ω_y относительно вертикальной оси. Рассматриваются развороты на 180° влево и вправо при наиболее неблагоприятных по нагружению сочетаниях частоты вращения и углов установки лопастей рулевого винта. В нормах прочности задано значение угловой скорости, а также среднее число разворотов на один час полета, что необходимо знать для расчета ресурса. Этот случай является одним из определяющих для лопастей и втулки рулевого винта по условиям усталостной прочности.

Случай III-л — выход из планирования. Рассматривается нагружение вертолета при выходе из планирования при отклонении ручки управления на себя и увеличении общего шага несущего винта. Задаются: скорость полета с учетом возможного разгона при планировании, максимальная вертикальная эксплуатационная перегрузка $n_y^э$ и соответствующая ей частота вращения несущего винта. Этот случай является определяющим по условиям прочности при маневре для большинства агрегатов вертолета.

Случай IV-л — вход в планирование. Рассматривается нагружение вертолета при входе в планирование при моторном полете. Режим определяется эксплуатационной перегрузкой $n^{э}_{m/n} = -0{,}5$ и характеристикой режима $\mu = 0{,}25$. Случай IV-л служит в основном для обеспечения прочности крепления различных агрегатов при действии сил в противоположном по сравнению со случаем III-л направлении.

Случай V-л — вертикальный порыв. Рассматривается нагружение вертолета при воздействии вертикального порыва при полете в неспокойной атмосфере с поступательной скоростью. Предполагается, что вертолет входит в резко ограниченный восходящий поток воздуха, скорость которого задана в нормах прочности. По скорости полета и эффективной скорости потока определяется величина эксплуатационной перегрузки $n_y^{э}$. Найденная величина перегрузки сравнивается с перегрузкой случая III-л. Дальнейшие расчеты ведутся для того из случаев (III-л или V-л), для которого нагрузки получились больше.

Случай VI-л — горизонтальный порыв. Рассматривается нагружение вертолета при воздействии горизонтального порыва в боковом направлении. Структура порыва та же, что и в случае V-л. Случай является одним из определяющих для фюзеляжа и вертикального оперения (из условий прочности при больших нагрузках).

Случаи нагружения при посадке. В нормах прочности задаются величины вертикальной скорости снижения вертолета, что необходимо для определения нагрузок на шасси. Бо́льшая часть случаев (I-п — VI-п) определяет нагрузки на передние и основные опоры. Эти случаи отличаются величиной, направлением и распределением нагрузок:

I-п — вертикальная посадка с одновременным ударом передними и основными опорами;

II-п — посадка с нераскрученными колесами с поступательной скоростью в двух вариантах: при первом ударе только основными опорами и только передними опорами (после переваливания вертолета);

III-п — посадка со сносом (при наличии составляющей скорости вертолета по его поперечной оси);

IV-п — односторонняя посадка (с ударом только левыми или только правыми опорами) — посадка с креном или на наклонную площадку;

V-п — несимметричная посадка с ударом одной из передних и одной из основных опор по диагонали;

VI-п — торможение колеса (посадка вертолета с торможением колес).

Эти случаи являются определяющими для шасси и фюзеляжа.

Случай VII-п — аварийная посадка. Требования этого случая нагружения относятся ко всем элементам конструкции, разрушение которых при аварийной посадке угрожает безопасности пассажиров и экипажа. Все элементы конструкции, грузы и установки, которые могут сломаться или оторваться от крепления при ударе вертолета о землю и нанести при этом травмы пассажирам или экипажу, рассчитываются на действие заданных в нормах нагрузок.

Случаи нагружения в наземных условиях. Случай I-з — раскрутка несущего и рулевого винтов. Рассматривается нагружение при раскрутке несущего и рулевого винтов после запуска двигателей. Величина крутящего момента, который прикладывается к винту при раскрутке, определяется характеристиками двигателей и муфты сцепления трансмиссии. Случай может быть определяющим для лопастей и втулки винта, а также для трансмиссии.

Случай II-з — падение лопасти на ограничитель свеса. Рассматривается нагружение при ударе об ограничитель свеса падающей под действием собственного веса лопасти, поднятой порывом ветра при медленном вращении несущего винта на стоянке. В нормах задается график для определения максимального угла подъема (взмаха) лопасти. Случай может быть определяющим для втулки и лонжерона лопасти.

Случай III-з — буксировка вертолета. Рассматривается нагружение при буксировке вертолета по аэродрому или по неподготовленным площадкам. Считается, что на буксирное приспособление действует сила, параллельная поверхности земли. Величина силы зависит от упругих свойств этого приспособления. В нормах задается величина энергии, которую должно поглотить буксирное приспособление. Основным назначением этого случая является обеспечение такого выбора амортизирующих характеристик буксирного устройства, при котором в агрегатах вертолета не возникает нагрузок, больших чем в полете и при посадке.

Случай IV-з — ветер на стоянке. Рассматривается нагружение вертолета и его швартовочных приспособлений при действии ветра. Задана скорость ветра $w = 40$ м/с. Вертолет находится на стоянке и пришвартован тросами.

Дополнительные случаи нагружения и дополнительные сведения о нагрузках. Дополнительно к перечисленным основным случаям требуется рассмотрение нагрузок на рулевой винт и его крепление при резкой даче педалей в полете с максимальной скоростью, на фюзеляж при ударе о землю хвостовой опорой, на киль при полете с максимально допустимым скольжением на максимальной скорости. Заданы также не определяемые расчетными случаями нагрузки на системы управления, пол грузовой кабины, трапы, сиденья, крышки и створки люков и малые ручки.

глава 1 ВЫНОСЛИВОСТЬ КОНСТРУКЦИИ ВЕРТОЛЕТА. РЕСУРС

Целью данной главы является рассмотрение поведения материала и конструкции под действием усталостных нагрузок, т. е. нагрузок, которые хотя относительно и невелики по своей величине и не могут вызвать разрушения конструкции при однократном приложении, но повторяются за время эксплуатации вертолета сотни тысяч, миллионы или даже сотни миллионов раз. Свойство материала или конструкции выдерживать определенное число циклов таких нагрузок называется *выносливостью*.

Представления о выносливости базируются в основном на экспериментальных данных. Совершенных теорий и методов расчета, дающих в общем случае возможность получить достаточно точный ответ, пока еще не существует. Выводы, сделанные разными исследователями, нередко противоречивы. Это объясняется очень большой сложностью задачи. Основные представления о выносливости излагаются обычно в курсе сопротивления материалов. Однако они имеют общий характер и не всегда достаточно пригодны для конкретных расчетов конструкции вертолетов. Нашей целью является уточнение некоторых положений по выносливости применительно к решению конкретных задач при расчете вертолета на прочность.

§ 1.1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИИ

Вначале рассмотрим простой — синусоидальный закон изменения напряжений по времени:

$$\sigma = \Delta\sigma \sin \omega t. \qquad (1.1)$$

За один цикл напряжения в рассматриваемой точке меняются от максимального σ_{max} до минимального значения σ_{min} и далее снова до максимального значения. Периодический закон изменения $\sigma(t)$ и, в частности, закон (1.1), может быть охарактеризован полуразмахом переменной части напряжений

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

и частотой $f = \omega/2\pi$ — числом циклов изменения напряжений в единицу времени.

При данной величине полуразмаха переменных напряжений после некоторого количества циклов нагрузки N образец разрушит-

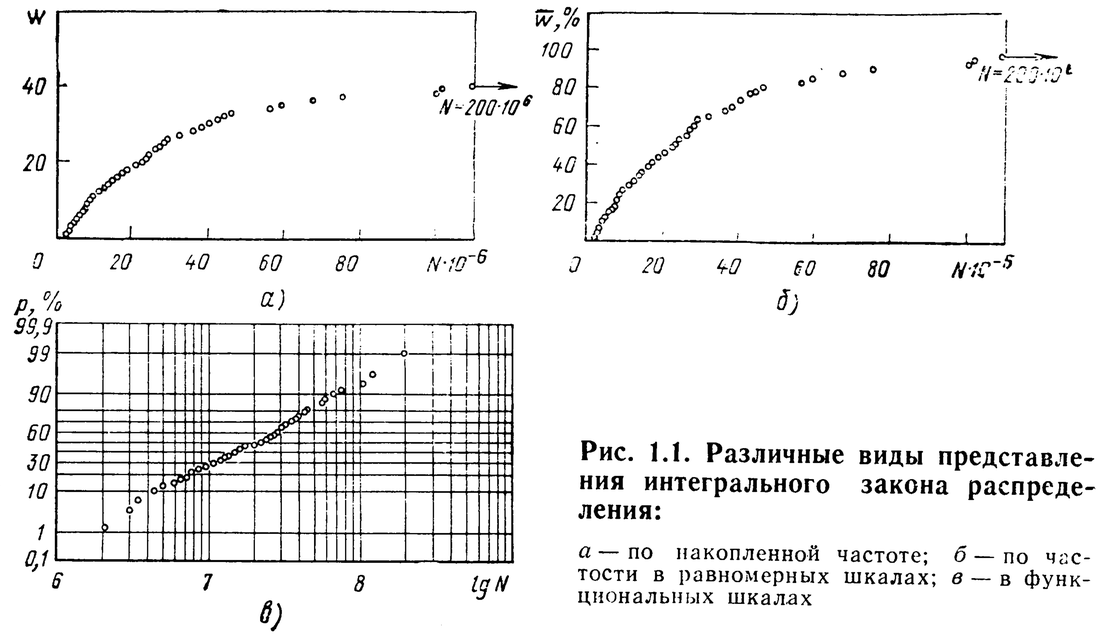


Рис. 1.1. Различные виды представления интегрального закона распределения:

а — по накопленной частоте; *б* — по частости в равномерных шкалах; *в* — в функциональных шкалах

ся. Число циклов до разрушения N называется долговечностью. Если эксперимент повторить для большого количества образцов, то окажется, что каждый из них сломается, вообще говоря, при различном числе циклов N_k, несмотря на то, что полуразмах переменных напряжений в каждом опыте оставался одним и тем же. Разброс долговечности вызывается совокупным действием ряда случайных факторов. Таким образом, к долговечности следует относиться как к некоторой случайной величине, подчиненной вероятностным законам [7, 12]. Зададимся каким-либо значением N. Подсчитаем число образцов, разрушившихся при числах циклов, меньших или равных выбранному значению N. Это число образцов w называется накопленной частотой разрушения образцов. Задаваясь различными значениями N и подсчитывая количество образцов, разрушившихся при числах циклов, меньших или равных каждому выбранному значению N, можно получить зависимость $w = f(N)$, которая называется интегральным законом распределения частоты разрушения. Пример интегрального закона распределения частоты приведен на рис. 1.1, *а*.

Вместо понятия «частота» удобнее пользоваться частостью

$$\bar{w} = \frac{w - \frac{1}{2}}{k^*} \approx \frac{w}{k^*},$$

где k^* — общее число испытанных образцов. Частость обычно выражается в процентах (рис. 1.1, *б*).

Пока общее число испытанных образцов невелико (10—20 шт.), кривые $\bar{w} = f(N)$ не являются стабильными. Если продолжить испытание, то по мере накопления экспериментальных данных кривая $\bar{w} = f(N)$ несколько изменяется, особенно при очень малых и очень больших значениях долговечности. При большом числе об-

разцов экспериментальная кривая $\overline{w}=f(N)$ стабилизируется. Если можно было бы испытать бесконечно большое число образцов, то в соответствии с представлениями математической статистики следовало бы говорить уже не о частости, а о вероятности разрушения образцов. Практически, хотя число испытанных образцов всегда ограничено, обычно полагают, что вероятность разрушения p равна частости $\overline{w}$. Таким образом, графики, подобные приведенному на рис. 1.1, *б*, приближенно характеризуют вероятность разрушения образцов при числе циклов переменной нагрузки меньшем или равном заданному. Экспериментальные зависимости вероятности разрушения от числа циклов переменной нагрузки обычно сравнивают с теоретическими законами распределения.

Теоретический закон распределения долговечностей пока еще не установлен. Наиболее распространенной и, по-видимому, наиболее приемлемой является гипотеза о логарифмически нормальном законе распределения долговечностей. В соответствии с этой гипотезой нормальному закону распределения подчиняются значения параметра $x=\lg(N-N_0)$, где N_0 — так называемый порог чувствительности по циклам, о котором будет сказано несколько позже. Логарифмически нормальный закон распределения имеет вид

$$p(N)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-M_x}{\sigma_x}\right)^2\right]dx,$$

где $x=\lg(N-N_0)$.

В эту формулу входят употребляющиеся в теории вероятностей [7, 12] понятия — математическое ожидание (среднее значение)

$$M_x=\frac{\sum_k x_k}{k^*}$$

(k^* — число испытанных образцов) и среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum_k (x_k-M_x)^2}{k^*-1}}$$

величин x_k. Математическое ожидание M_x характеризует выносливость всех экземпляров испытываемого элемента конструкции в среднем. Среднеквадратичное отклонение σ_x характеризует разброс долговечностей отдельных экземпляров. Величина N_0 представляет собой такое наибольшее значение числа циклов, при котором не разрушается ни один из образцов, сколько бы их ни было. Для достоверного нахождения порога чувствительности N_0 необходимо испытывать сотни образцов. На практике часто значение порога чувствительности считают равным $N=0$. Если тип закона распределения известен, то можно подобрать (например, [12]) такие шкалы по осям абсцисс и ординат графика $p=f(N)$, что он превращается в прямую линию (рис. 1.1, *в*). Некоторые отклонения экс-

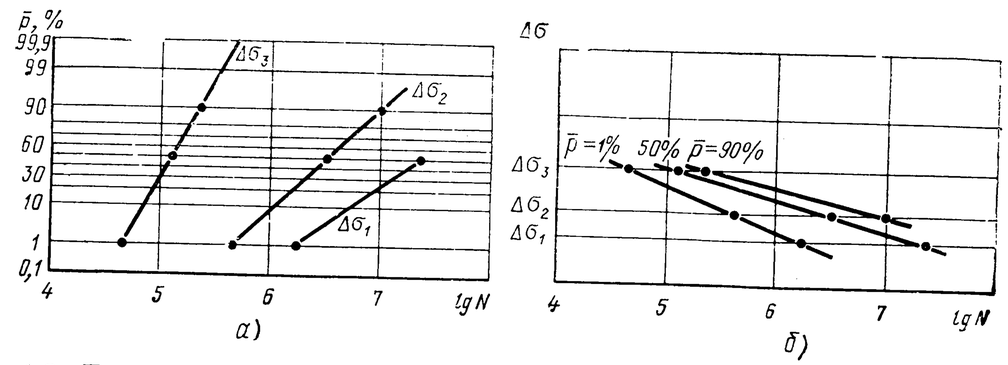


Рис. 1.2. Построение зависимости долговечности от величины полуразмаха переменных напряжений:

а — исходные кривые; *б* — искомые зависимости

периментальных точек от прямой на рис. 1.1, *в* объясняются ограниченным числом испытанных образцов.

Рассмотренные выше результаты были получены при усталостных испытаниях большого числа образцов при одном и том же полуразмахе переменных напряжений. Испытания могут быть повторены при другой величине $\Delta\sigma_2$, далее при следующем значении $\Delta\sigma_3$ и т. д. Для каждого значения $\Delta\sigma_i$ может быть построена кривая $p=f(N)$ (рис. 1.2, *а*). По кривым $p=f(N)$ для различных значений $\Delta\sigma_i$ и заданного значения p можно найти соответствующие значения $N_{i,p}$ и построить график зависимости долговечности от величины полуразмаха переменных напряжений при заданной вероятности разрушения $N=f(\Delta\sigma, p)$ (рис. 1.2, *б*). Обычно кривую строят в логарифмических координатах ($\lg N$, $\lg\Delta\sigma$). Зависимость числа циклов до разрушения от величины полуразмаха, особенно при больших значениях N ($N>10^7$), изучена пока недостаточно полно. При $N<10^7$ кривая $\Delta\sigma=f(N)$ для элементов конструкции вертолета в логарифмических координатах обычно близка к прямой (рис. 1.2, *б*). Очевидно, что уравнение такой прямой будет

$$\lg\Delta\sigma=-\frac{1}{m}\lg N+C, \qquad (1.2)$$

где $-1/m$ — тангенс угла наклона прямой (1.2) к оси абсцисс.

При значениях долговечности более $10\cdot10^6$ циклов линейная зависимость логарифмов полуразмахов переменных напряжений и логарифмов долговечности, по-видимому, нарушается. Наклон кривых $\lg\Delta\sigma=f(\lg N)$ к оси абсцисс уменьшается (рис. 1.3). Возможно, что кривые асимптотически стремятся к прямым, параллельным осям абсцисс [41].

В курсе сопротивления материалов обычно вводится понятие предела выносливости $\Delta\sigma_{-1}$, который определяется как такая наибольшая величина полуразмаха $\Delta\sigma$, при которой разрушение не происходит ни при каком сколь угодно большом числе циклов нагрузки. Однако в практически важном диапазоне $N<10^7\ldots10^8$ этого предела не существует и, следовательно, нельзя пользоваться понятием «предел выносливости», не указав, до какого числа цик-

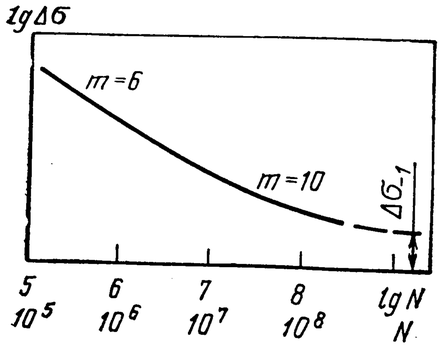


Рис. 1.3. Примерный вид графика $N=f(\Delta\sigma)$

лов проведены испытания, а также какому значению вероятности разрушения p он соответствует (рис. 1.3). Значение $\Delta\sigma_w$, соответствующее заданным значениям N и p, называется ограниченным пределом выносливости на базе N циклов с вероятностью разрушения p.

Правильное представление о кривой $\Delta\sigma=f(N)$ для данной детали можно получить только на основе экспериментальных исследований каждого конкретного типа конструкции. В случае отсутствия таких данных для типичных вертолетных конструкций обычно пользуются приближенным соотношением

$$\frac{N_2}{N_1}=\left(\frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\sigma_2}\right)^m, \qquad (1.3)$$

вытекающим из уравнения (1.2). Значение показателя степени (учитывая, что реальные детали имеют примерно одинаковые концентрации напряжений, одинаковое качество изготовления и т. д.) можно приближенно принимать при $N<10\cdot10^7$, равным $m=6$, а при больших значениях N — равным $m=10\ldots12$. С помощью этой зависимости можно пересчитать долговечность при изменении полуразмаха переменных напряжений. Однако хотя бы одна точка этой кривой должна быть найдена экспериментально.

Большая величина показателя степени m в формуле (1.3) означает, что даже при небольшом понижении уровня переменных напряжений долговечность элемента конструкции значительно увеличивается. Поэтому конструктор всегда должен стремиться даже к небольшому (5—10%) снижению уровня переменных нагрузок. Только при этом удается сделать конструкцию, имеющую большой ресурс.

Рассмотрим теперь более сложный случай нагружения, когда напряжение в рассматриваемой точке меняется по закону

$$\sigma=\sigma_0+\Delta\sigma\sin\omega t. \qquad (1.4)$$

Очевидно, что этот случай отличается от рассмотренного ранее (1.1) наличием некоторого постоянного слагаемого σ_0. Величина σ_0 называется напряжением статической подгрузки. Если характер нагружения таков, что $\sigma_0>0$ (растяжение), то долговечность или ограниченный предел выносливости уменьшается тем больше, чем больше σ_0. При небольших по абсолютной величине сжимающих напряжениях $\sigma_0<0$ имеет место обратный эффект. Изменение напряжения статической подгрузки влияет на долговечность меньше, чем изменение полуразмаха $\Delta\sigma$, однако его надо учитывать при определении N.

Характер изменения ограниченного предела выносливости при $\sigma_0>0$ для реальных конструкций показан на рис. 1.4. При малых

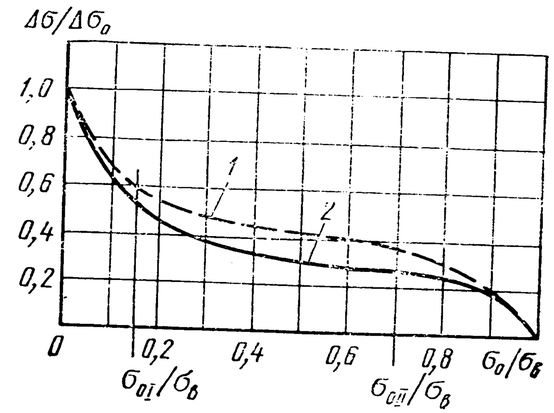


Рис. 1.4. Примерный вид зависимости ограниченного предела выносливости от величины статической подгрузки:

1 — для лонжерона лопасти; *2* — для клепаной конструкции; $\Delta\sigma$ — ограниченный предел выносливости при статической подгрузке σ_0; $\Delta\sigma_0$ — ограниченный предел выносливости при $\sigma_0=0$

величинах статической подгрузки ($0<\sigma_0<\sigma_{0I}$) при ее увеличении имеет место значительное снижение предела выносливости. При бо́льших значениях σ_0 ($\sigma_{0I}<\sigma_0<\sigma_{0II}$) влияние статической подгрузки уменьшается, а при еще бо́льших ($\sigma_0>\sigma_{0II}$) — снова увеличивается. Если известен предел выносливости σ_w, определенный при статической подгрузке σ_{01}, то его можно пересчитать для другого значения σ_{02} по приближенной формуле

$$\sigma_{w2}=\sigma_{w1}-\psi(\sigma_{02}-\sigma_{01}),$$

действительной только в пределах одного участка кривой $\sigma_w=f(\sigma_0)$. Для среднего ($\sigma_{0I}<\sigma_0<\sigma_{0II}$) участка кривой (см. рис. 1.4) коэффициент $\psi\approx0{,}1$ для стальных деталей и $\psi\approx0{,}25$ для деталей из алюминиевых сплавов.

Другой способ учета действия статической подгрузки основан на приведении полуразмаха $\Delta\sigma$ при $\sigma_0\neq0$ к эффективному значению $\sigma_{эф}=\sqrt{\Delta\sigma^2+\sigma_0\Delta\sigma}$. Долговечность определяется по найденному таким образом значению $\Delta\sigma_{эф}$ при статической подгрузке, равной нулю [33]. Оба метода применяются для приближенных расчетов. Более надежные данные можно получить только производя усталостные испытания со статической подгрузкой.

Величины полуразмахов переменных напряжений, действующих в агрегатах вертолета, изменяются в зависимости от режима полета. Поэтому возникает необходимость оценки эффекта последовательного действия переменных нагрузок разной величины. Эта оценка может быть выполнена с помощью программных испытаний, при которых испытываемый агрегат подвергается действию переменных нагрузок различной величины. Однако такие испытания проводятся на практике далеко не всегда. Результаты их имеют ограниченное значение, так как не могут служить для оценки выносливости агрегата при чередовании нагрузок в порядке, отличающемся от имевшего место при испытаниях. Поэтому необходим также расчетный метод. Обычно он основывается на гипотезе линейного суммирования повреждаемостей.

Рассмотрим последовательное действие нагрузок с различными полуразмахами. Пусть к образцу было приложено n_1 циклов нагрузки с полуразмахом $\Delta\sigma_1$, n_2 циклов нагрузки с полуразмахом

$\Delta\sigma_2$ и т. д. Обозначим N_1 долговечность при действии нагрузки с полуразмахом $\Delta\sigma_1$; N_2 — при действии нагрузки с полуразмахом $\Delta\sigma_2$ и т. д. Предположим, что работа A, которую надо произвести, чтобы разрушить объект, одинакова для всех процессов (1.1) с любым полуразмахом $\Delta\sigma$ и на каждый цикл нагружения с одинаковым полуразмахом $\Delta\sigma_i$ приходится одна и та же доля этой работы $a_i = A/N_i$. Работа для всех циклов с полуразмахом $\Delta\sigma_i$ будет равна $n_i \frac{A}{N_i}$. Сумма работ всех действовавших на объект циклов нагружения до его разрушения $A = \sum n_i \frac{A}{N_i}$. Из этого выражения следует условие разрушения:

$$\sum \frac{n_i}{N_i} = 1. \qquad (1.5)$$

Отношение $n_i/N_i = D_i$ называется повреждаемостью. Соотношение (1.5) выражает, таким образом, гипотезу линейного суммирования повреждаемостей.

Условие разрушения (1.5) является приближенным. По некоторым экспериментальным данным разрушение происходит при $\sum \frac{n_i}{N_i} \neq 1$. Многими авторами выдвинуты другие гипотезы суммирования действия нагрузок различного уровня, однако эти гипотезы пока широкого распространения не получили. Практически с некоторым запасом можно считать, что разрушение происходит при $\sum \frac{n_i}{N_i} = 0{,}5$. Этой формулой обычно и пользуются, когда нет более точных данных, полученных в эксперименте.

Используя гипотезу линейного суммирования, можно определить так называемое эквивалентное напряжение. Эквивалентным называется циклически изменяющееся напряжение, имеющее постоянный полуразмах $\Delta\sigma_э$ такой величины, при которой повреждаемость конструкции $D_э$ та же, что при действии циклов напряжений с полуразмахами различной величины $\Delta\sigma_i$, причем число циклов эквивалентного напряжения ($n_э$) и суммарное число циклов (Σn_i) напряжений различной величины одинаковы.

Пусть на рассматриваемую деталь действовало n_1 циклов нагрузки с полуразмахом $\Delta\sigma_1$, n_2 циклов нагрузки с полуразмахом $\Delta\sigma_2$ и т. д. (рис. 1.5, *а*). По кривой $\Delta\sigma = f(N)$ найдем долговечность, соответствующую величине $\Delta\sigma_1$ (т. е. если бы на образец действовала только переменная нагрузка с полуразмахом $\Delta\sigma_1$) и обозначим ее, как и раньше, N_1. Далее найдем долговечности: N_2, соответствующую $\Delta\sigma_2$ (рис. 1.5, *б*), N_3, соответствующую $\Delta\sigma_3$, и т. д. и повреждаемости $D_1 = n_1/N_1$, $D_2 = n_2/N_2$ и т. д. Общее число циклов нагрузок всех уровней:

$$n = \sum n_i = n_i + n_2 + \ldots .$$

Суммарная повреждаемость $D = \sum D_i = D_i + D_2 \ldots$.

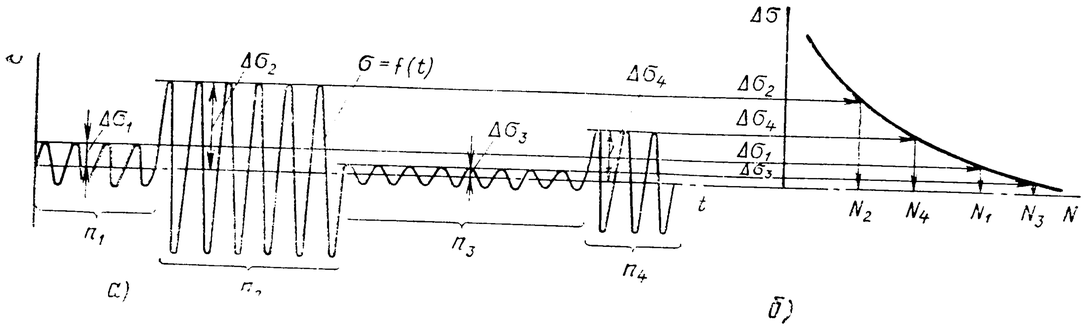


Рис. 1.5. Определение эквивалентного напряжения:

а — закон изменения напряжений; *б* — кривая долговечности

Найдем теперь эквивалентное напряжение.

Так как $D_э = n_э/N_э$, а следовательно, $N_э = n_э/D_э$ и по условию $n_э = \sum n_i$ и $D_э = D = \sum D_i$, то

$$N_э = \frac{\sum n_i}{\sum D_i} = \frac{\sum n_i}{\sum \frac{n_i}{N_i}} . \qquad (1.6)$$

Определив по этой формуле $N_э$, с помощью кривой $\Delta\sigma = f(N)$ найдем искомое эквивалентное напряжение $\Delta\sigma_э$.

Использовав формулу (1.3), можно найти приближенное аналитическое выражение для определения эквивалентного напряжения. Для этого перепишем (1.6) в виде

$$\sum n_i = N_э \sum \frac{n_i}{N_i} = \sum n_i \frac{N_э}{N_i} . \qquad (1.7)$$

Из (1.3) следует

$$\frac{N_э}{N_i} = \left(\frac{\Delta\sigma_i}{\Delta\sigma_э}\right)^m . \qquad (1.8)$$

Подставив (1.8) в (1.7) и решая полученное равенство относительно $\Delta\sigma_э$, найдем

$$\Delta\sigma_э = \sqrt[m]{\frac{\sum n_i \Delta\sigma_i^m}{\sum n_i}}$$

или

$$\Delta\sigma_э = \sqrt[m]{\sum \bar{n}_i \Delta\sigma_i^m} , \qquad (1.9)$$

где $\bar{n}_i$ — относительное число циклов с полуразмахом $\Delta\sigma_i$.

§ 1.2. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКТИВНЫЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ДОЛГОВЕЧНОСТЬ

Рассмотрим пластинку, нагруженную по двум противоположным краям равномерно распределенной осевой нагрузкой.

Если в образце сделать небольшое отверстие (рис. 1.6), то распределение напряжений в сечениях, перпендикулярных направлению действия нагрузки, ста-

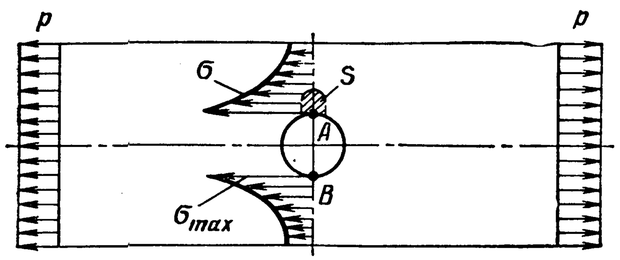


Рис. 1.6. Концентрация напряжений

новится неравномерным. В точках A и B по концам диаметра окружности, перпендикулярного направлению действия нагрузки, напряжения оказываются наибольшими. Они в несколько раз превышают среднее значение. Таким образом, эффект отверстия нельзя рассматривать только как некоторое небольшое уменьшение площади сечения. Происходит перераспределение напряжений, они становятся распределенными по сечению очень неравномерно, с резкими пиками у отверстия. Появление таких пиков напряжений, значительно превышающих средний уровень, называется *концентрацией* напряжений, а причины, вызывающие их — *концентраторами*. В рассмотренном примере концентрация напряжений происходит около точек A и B (см. рис. 1.6), а концентратором является отверстие.

Концентрация напряжений возникает в местах резкого изменения очертания детали. Концентраторами являются пропилы, риски, резкие переходы по толщине. Концентрация напряжений возникает около отверстий заклепочных швов, в комлевом стыке — вследствие наличия отверстий для соединения лонжерона с наконечником. Очень опасны отдельные неметаллические включения, риски и другие нарушения гладкости поверхности силовых элементов (лонжеронов лопастей, стержней подредукторной рамы и т. п.).

Многочисленные эксперименты показывают, что усталостное разрушение — постепенный процесс. Он протекает вначале внутри отдельных кристаллов, затем образуются микротрещины, которые в дальнейшем постепенно развиваются, сечение ослабляется, образуется видимая трещина и, наконец, происходит быстрый долом образца. Таким образом, усталостное разрушение начинается в малых объемах материала. При наличии концентраторов напряжений некоторый малый объем металла испытывает действие повышенных напряжений, значительно превышающих среднее значение напряжений, определенное без учета концентрации. Поэтому концентрация напряжений приводит к значительному ухудшению характеристик выносливости. При одной и той же величине внешней нагрузки долговечность образцов с концентраторами в десятки и даже сотни раз меньше, чем таких же образцов без концентраторов.

Эксперименты, проводимые над образцами с концентрацией напряжений, показывают, что усталостная трещина в большинстве случаев начинает развиваться в месте концентрации напряжений. Так, для рассмотренных выше образцов с отверстием трещина зарождается в точке A или точке B (см. рис. 1.6), распространяясь затем и в те места, где концентрация напряжений до появления трещины была меньше. Если концентратор напряжений расположен в такой зоне, которая при его отсутствии не является наиболее напряженной, то и в этом случае разрушение часто начинается от него, а не в зоне наибольших напряжений, определенной без его учета.

Максимальные напряжения возникают только в одной точке. Однако для зарождения трещины необходимо, чтобы некоторый объем подвергался действию повышенных напряжений. Если, например (см. рис. 1.6) эффективный объем определяется площадью S, то, по-видимому, его прочность следует оценивать некоторым средним по этому объему напряжением, меньшим, чем σ_{max} в одной точке этого объема.

При исследованиях усталостной прочности вводится понятие эффективного коэффициента концентрации, определяемого формулой

$$\beta = \frac{\Delta\sigma_w}{\Delta\sigma_{w_к}},$$

где $\Delta\sigma_w$ — предел выносливости гладких образцов; $\Delta\sigma_{w\,к}$ — предел выносливости образцов с концентратором.

Обычно величина эффективного коэффициента концентрации устанавливается по результатам усталостных испытаний и распространяется на детали аналогичной конфигурации. Такой метод применяется при предварительных расчетах.

Таким образом, при проектировании элементов конструкции, работающих на усталость, необходимо принять все меры к тому, чтобы избежать концентрации напряжений (отверстий, резких переходов по толщине и т. п.). Соответствующие рекомендации даются в курсе проектирования.

При действии на деталь изгибающих и крутящих моментов наибольшие напряжения возникают, как правило, в поверхностных слоях. Поверхность детали в большей или меньшей степени имеет дефекты, вызванные ее обработкой (следы резца, микроштрихи от шлифования и т. д.). Таким образом, предел выносливости существенно зависит от качества поверхности. Наличие, казалось бы, небольших царапин приводит к концентрации напряжений как раз в той зоне, где напряжения и без того являются наибольшими.

Поэтому большой ресурс конструкции можно получить, только обеспечив достаточно гладкую поверхность. Случайное нарушение гладкости может привести к преждевременному разрушению жизненно важных частей вертолета. В настоящее время существуют различные методы контроля качества поверхности вертолетных конструкций, которые необходимо применять в производстве. Эти методы, их эффективность и применимость для различных конструкций подробно рассматриваются в курсе технологии. Состояние технологического процесса можно также контролировать посредством усталостных испытаний отдельных экземпляров, отбираемых из каждой партии, изготавливаемой серийным заводом.

Из изложенного следует также, что долговечность может быть правильно установлена только по результатам усталостных испытаний деталей, качество поверхности которых соответствует обусловленному в чертежах и других документах. Испытание образцов, качество поверхности которых отличается от качества поверхностей серийной продукции, не имеет смысла.

Коррозия на поверхности деталей приводит к появлению небольших раковин, являющихся концентраторами напряжений. Поэтому вследствие коррозии характеристики выносливости существенно ухудшаются. Как показали испытания, долговечность снижается в десятки и даже сотни раз. Поэтому очень важно обеспечить защиту силовых элементов конструкции вертолета от коррозии.

Особо следует упомянуть о коррозии трения — так называемой фреттинг-коррозии. Этот вид коррозии возникает в местах сопряжения деталей. При деформациях деталей под нагрузкой может происходить скольжение поверхности одной детали по поверхности другой. Величина скольжения составляет от нескольких микрон до десятых долей миллиметра. Скольжение часто вызывает нарушение качества трущихся поверхностей слоев — фреттинг-коррозию, что значительно ухудшает характеристики выносливости. Поэтому устранение фреттинг-коррозии является одной из важнейших мер по обеспечению большого ресурса. Соответствующие рекомендации даются в курсе конструкции и проектирования вертолетов.

В машиностроении широко применяются различные методы упрочнения поверхностного слоя деталей. К числу таких методов относятся химико-термические, поверхностная закалка токами высокой частоты, наклеп поверхностного слоя (обкаткой роликами, обдувкой дробью и др.). Особенно эффективно применение этих методов для деталей с концентрацией напряжений и деталей, подверженных фреттинг-коррозии. Применение наклепа позволяет значительно увеличить долговечность (иногда в десятки раз).

Ухудшение качества металла с ростом размеров литья или поковки, различное влияние механической обработки при различных размерах образцов, увеличение вероятности наличия опасных дефектов и слабых мест с увеличением размеров образца — все это приводит к тому, что у больших образцов долговечность ниже, чем у маленьких, выполненных из того же сплава. Снижение долговечности из-за увеличения размера образца называется масштабным эффектом. Учесть влияние всех указанных факторов путем расчета не удается. Поэтому характеристики усталости для оценки ресурса определяют путем испытаний полноразмерных деталей. Результаты испытаний малых образцов используют лишь для изучения общих закономерностей.

§ 1.3. РЕСУРС ПО УСЛОВИЯМ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ

Для большинства основных агрегатов вертолета (лопастей и втулок несущих и рулевых винтов, систем управления винтами, трансмиссий, редукторов, подредукторной рамы и др.) устанавливается ресурс по условиям усталостной прочности. Ресурс по условиям усталостной прочности — это допустимое время эксплуатации из условия практического отсутствия усталостных разрушений. Как правило, он исчисляется в часах полета вертолета. В эксплуатации экипаж учитывает суммарный налет на данном экземпляре вертолета. Когда налет достигает установленного ресурса, агрегат с эксплуатации снимается и заменяется новым. В необходимых случаях при подсчете налета учитывается и время работы вертолета на земле. Ресурс по условиям усталостной прочности не следует путать с общетехническим ресурсом и календарным сроком службы, хотя эти понятия и связаны между собой. Общетехнический ресурс устанавливается не только по условиям прочности, а из более общих соображений, с учетом других факторов, определяющих пригодность конструкции для дальнейшей эксплуатации (например, износа несиловых элементов, выработки и т. п.). Календарный срок службы устанавливается не в часах налета, а как общий срок годности агрегата, независимо от интенсивности эксплуатации его за это время. Учитываются такие факторы, как старение клеевых соединений, коррозия и т. п. Календарный срок службы влияет на ресурс по условиям усталостной прочности.

В дальнейшем будет рассматриваться только ресурс по условиям усталостной прочности; для сокращения он именуется далее просто ресурсом. Для определения безопасного ресурса конструкции при действии переменных нагрузок необходимо знать как величину нагрузок и число циклов, так и характеристики выносливости. На различных стадиях создания и эксплуатации вертолета в распоряжении конструктора имеются различные по своей точности данные.

На стадиях проектирования имеются обычно расчетные данные, результаты испытаний моделей в аэродинамических трубах и материалы, полученные при испытаниях аналогичных конструкций. Эти данные по величине переменных нагрузок во многих случаях имеют невысокую точность. Поэтому ресурс по данным, имеющимся на стадиях проектирования, точно определить нельзя. Производится ориентировочная оценка ресурса с поправками, идущими в запас надежности. Величина этих поправок определяется на основании имеющегося опыта. Такие оценки позволяют судить о перспективности данной конструкции и о возможности (по соображениям безопасности от усталостных разрушений) начала летных испытаний опытного экземпляра вертолета.

С первого же полета опытного вертолета производятся измерения напряжений в большинстве агрегатов. Эти измерения позволяют уточнить величину нагрузок. Параллельно с этим производятся

испытания отдельных элементов конструкции, что позволяет уточнить и характеристики выносливости. Имея результаты измерений напряжений в полете на данном вертолете и испытаний на усталость реальных элементов конструкции, можно уже более достоверно определить ресурс. Установленный таким образом ресурс называется предварительным.

Ранее (§ 1.2) было установлено, что небольшие технологические отклонения могут существенно изменить характеристики выносливости. Поэтому при серийном производстве выполняются контрольные испытания на выносливость. Ресурс, установленный по результатам испытаний на выносливость агрегатов серийного производства, называется начальным. Он представляет собой наибольший ресурс, который может быть установлен без учета опыта эксплуатации.

Таким образом, один и тот же агрегат, даже без каких-либо конструктивных доработок, по мере накопления соответствующих данных может иметь различный ресурс, вначале небольшой, установленный с большим запасом, а далее, по мере повышения уровня знаний, увеличения объема экспериментальных материалов, постепенно повышающийся. Обычно этот процесс уточнения ресурса сопровождается конструктивными и технологическими доработками, направленными на уменьшение нагрузок и улучшение характеристик выносливости.

Определение напряжений при летных испытаниях производится с помощью тензоизмерений. Методика тензоизмерений достаточно хорошо разработана и широко применяется на практике. Некоторые сведения о тензоизмерениях изложены в гл. 16 и 17.

При испытаниях опытного вертолета измерения производятся на заданных летчику режимах полета. Выбор режимов для измерений рассматривается в разделах курса, посвященных расчету отдельных агрегатов и в гл. 16 и 17.

Величина переменных нагрузок существенно зависит от режима полета. Если вертолет в условиях действительной эксплуатации относительно большее время летает на режиме с небольшим уровнем нагрузок, то повреждаемость будет меньше, чем если бы он бо́льшую часть времени летал на режимах с повышенным уровнем нагрузок. Поэтому при расчете ресурса необходимо знать относительное время пребывания вертолета на том или ином режиме в условиях обычной эксплуатации. Наиболее правильное распределение относительного времени полета по режимам можно получить, анализируя опыт эксплуатации вертолетов в реальных условиях. В разных вариантах применения вертолета относительное время пребывания на рассматриваемом режиме может быть разным. Поэтому надо рассмотреть несколько вариантов распределения времени по режимам полета (для каждой разновидности применения вертолета). На основе имеющегося опыта можно составить таблицы распределения относительного времени пребывания вертолета на различных режимах. Ими пользуются, если нет результатов измерений в условиях эксплуатации. Такие таблицы для вертолетов различ-

ного назначения приводятся в нормах прочности [27]. Иногда какой-либо режим характеризуется особенно большими переменными нагрузками. В этом случае может быть ограничено время пребывания на этом режиме. Такое ограничение указывается для сведения летчиков в инструкции по пилотированию вертолета данного типа.

Для установившихся режимов полета характерен очень близкий к периодическому процесс изменения переменных напряжений в основных элементах его конструкции. В то же время испытания на усталость обычно проводятся под нагрузкой, изменяющейся по более простому синусоидальному закону. Для учета действительной формы процесса пользуются приближенными представлениями, зависящими от особенностей закона изменения переменных напряжений по времени в рассматриваемом конкретном случае [17].

На неустановившихся режимах (например, при торможении вертолета) определяют максимальное по режиму значение полуразмаха. Далее с некоторым запасом считают, что напряжение с такой величиной полуразмахов действуют на всем протяжении режима. Более точный способ — оценка повреждаемости, вносимой каждым циклом нагрузки. По совокупности всех полуразмахов на данном режиме определяется эквивалентное напряжение или суммарная повреждаемость.

Ранее было установлено, что экспериментальное определение характеристик выносливости достаточно трудоемко. Необходимо испытывать натурные объекты, изготовленные по определенной технологии. Должны прикладываться сочетания различных компонентов сил и моментов с переменной частью и статической составляющей. Возникает еще ряд трудностей методического характера. Некоторые сведения об усталостных испытаниях даны в гл. 16. Испытать большое число экземпляров практически невозможно. Обычно ограничиваются испытаниями лишь нескольких экземпляров конструкции.

Расчет ресурса. Расчет ресурса вертолетных конструкций принято выполнять по следующей формуле:

$$R=\frac{N_{\min}}{3600\, n_s\, \eta_\Sigma\, \eta_\sigma'\, \eta_N}\left(\frac{\Delta\sigma_{\text{исп}}}{\Delta\sigma_{\text{э}}}\right)^m, \qquad (1.10)$$

где $N_{\min}$ — наименьшая долговечность по результатам испытаний; n_s — число циклов нагрузки за секунду в полете; η_Σ — коэффициент надежности по гипотезе линейного суммирования повреждаемости; η_σ' — коэффициент надежности по уровню переменных напряжений; η_N — коэффициент надежности по разбросу долговечностей; $\Delta\sigma_{\text{исп}}$ — полуразмах (амплитуда) переменных напряжений при усталостных испытаниях; $\Delta\sigma_{\text{э}}$ — эквивалентное напряжение (определенное по напряжениям, действующим в полете).

Рассмотрим подробнее, с учетом изложенного в предыдущих разделах, некоторые величины, входящие в эту формулу, их смысл и способы определения.

Множитель $(\Delta\sigma_{\text{исп}}/\Delta\sigma_{\text{э}})^m$ учитывает разницу уровней переменных напряжений при усталостных испытаниях и в полете. Если испытания выполнялись до проведения измерений напряжений в полете, то $\Delta\sigma_{\text{исп}}$ определялось по каким-либо предварительным данным. Часто выбирают $\Delta\sigma_{\text{исп}}$ заведомо больше, чем $\Delta\sigma_{\text{э}}$, чтобы сократить сроки усталостных испытаний. Поэтому, как правило, величины $\Delta\sigma_{\text{исп}}$ и $\Delta\sigma_{\text{э}}$ отличаются. Чтобы определить долговечность при действии напряжений $\Delta\sigma_{\text{э}}$ по найденной в результате усталостных испытаний долговечности $N_{\min}$, соответствующей напряжениям другой величины ($\Delta\sigma_{\text{исп}}$), используется формула (1.3). На основании этой формулы и получен рассматриваемый множитель.

Величина эквивалентного напряжения $\Delta\sigma_{\text{э}}$ определяется обычно по формуле (1.9). В эту формулу подставляются значения относительной продолжительности режимов полета $\bar{n}_i$ по нормам прочности в зависимости от назначения вертолета.

Так как в формуле (1.9) не исключена некоторая погрешность из-за возможной неточности гипотезы линейного суммирования, то в формуле (1.10) содержится коэффициент надежности по гипотезе линейного суммирования η_Σ. На основании норм прочности [27], если усталостные испытания производились на одном уровне переменных нагрузок, коэффициент $\eta_\Sigma=2$. Для многоступенчатых программных испытаний $\eta_\Sigma=1$, так как в этом случае гипотеза линейного суммирования не используется.

Некоторые индивидуальные особенности каждого экземпляра конструкции, вызванные отклонениями при его изготовлении, приводят к тому, что на одинаковых режимах полета нагрузки на них несколько отличаются. За все время эксплуатации данного экземпляра вертолета история его нагружения носит несколько индивидуальный характер, связанный с особенностями применения именно этого вертолета с данным экипажем для выполнения данных работ. Поэтому в формуле (1.10) предусматривается коэффициент надежности η_σ'. Этот коэффициент служит также для учета погрешностей измерения напряжений в полете. В соответствии с нормами прочности величины измеренных при испытаниях в полете напряжений для учета указанных факторов должны быть увеличены в 1,2 раза. В пересчете на долговечность это составляет $(1{,}2)^6\approx 3$. Поэтому принимается $\eta_\sigma'=3$.

Наконец, необходимо учесть случайный разброс долговечностей как при усталостных испытаниях, так и от экземпляра к экземпляру вертолета. Учет этот основан на применении методов математической статистики. В формулу (1.10) для этого введен коэффициент надежности η_N. Выбор коэффициента η_N производится по нормам прочности [27]. С теоретическим обоснованием можно познакомиться по книге [23].

Более совершенный метод учета статистической природы нагрузок и долговечностей разработан А. Ф. Селиховым. Этот метод изложен в [23]. Ресурс, определенный на основе метода А. Ф. Селихова, является наиболее достоверным.

глава 2 СУММИРОВАНИЕ СИЛ И МОМЕНТОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ВТУЛКУ ОТ ЛОПАСТЕЙ ВИНТА

На втулку винта действуют силы и моменты, создаваемые каждой из лопастей. Величины силы и момента на втулке от каждой лопасти обуславливаются аэродинамическими нагрузками, действующими на лопасть, и возникающими при ее колебаниях инерционными нагрузками. Практически удобно определять момент относительно центра втулки (рис. 2.1), а векторы силы и момента разложить каждый на три компонента — по трем осям: по оси вала Oy, по оси, проходящей через центр втулки и параллельной проекции оси осевого шарнира на плоскость вращения Or и по перпендикулярной к ним оси Ox.

§ 2.1. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СИЛАМИ, ДЕЙСТВУЮЩИМИ НА РАЗЛИЧНЫЕ ЛОПАСТИ ВИНТА

Рассмотрим установившийся режим работы винта. В этом случае величина любого компонента силы или момента изменяется по периодическому закону и, следовательно, может быть представлена в виде тригонометрического ряда (ряда Фурье):

$$Q_k = Q_k^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\overline{Q}_k^{(n)} \cos n\omega t + \overline{\overline{Q}}_k^{(n)} \sin n\omega t\right) =$$

$$= Q_k^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_k^{(n)} \cos\left(n\omega t + \varepsilon_k^{(n)}\right) = Q_k^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} Q_k^{*(n)}. \qquad (2.1)$$

Здесь Q_k — любой компонент силы (T, N, P) или момента (M_x, M_y, M_r); n — номер гармоники; k — номер лопасти ($k=1, 2, 3, \ldots, z$, где z — число лопастей винта); слагаемые $Q_k^{*(n)}$ — отдельные составляющие гармоники,

$$Q_k^{*(n)} = \overline{Q}_k^{(n)} \cos n\omega t + \overline{\overline{Q}}_k^{(n)} \sin n\omega t = Q_k^{(n)} \cos\left(n\omega t + \varepsilon_k^{(n)}\right).$$

Как известно, между тригонометрическими и показательными функциями существуют следующие соотношения (формулы Эйлера):

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}; \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad (i = \sqrt{-1}). \qquad (2.2)$$

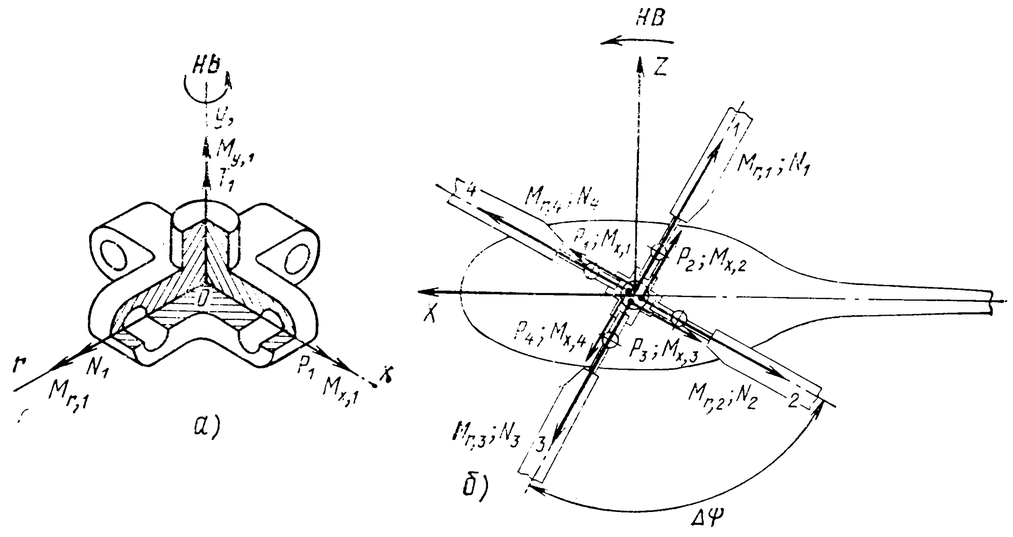


Рис. 2.1. Силы на втулке несущего винта от одной (*а*) и всех лопастей (*б*) и системы координат. На рис. 2.1, *б* точки приложения сил от каждой лопасти условно смещены с оси винта

Подставив (2.2) в (2.1), получим

$$Q_k = Q_k^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_k^{(n)} \left(e^{i\left(n\omega t + \varepsilon_k^{(n)}\right)} + e^{-i\left(n\omega t + \varepsilon_k^{(n)}\right)}\right). \qquad (2.3)$$

Такое выражение с использованием комплексных переменных оказывается несколько удобнее для дальнейшего изложения.

Форма записи в виде ряда (2.1) или (2.3) позволяет свести общую задачу данной главы к нахождению правил суммирования для отдельной гармоники $Q_k^{*(n)}$. Очевидно, что в общем случае, когда сила Q_k представляет собой сумму нескольких гармоник, результат суммирования таких сил на втулке можно получить, сложив суммарные силы, вызываемые каждой гармоникой $Q_{вт}^{*(n)}$ в отдельности:

$$Q_{вт} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{вт}^{*(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k=z} Q_k^{*(n)}. \qquad (2.4)$$

Из рис. 2.1 следует, что компоненты T_k сил и компоненты M_{yk} моментов отдельных лопастей совпадают по направлениям, компоненты же N_k и P_k сил и компоненты M_{xk} и M_{rk} моментов различных лопастей, расположенные в плоскости вращения винта, повернуты (см. рис. 2.1, *б*) для соседних лопастей на угол

$$\Delta\psi = 2\pi/z, \qquad (2.5)$$

где z — число лопастей винта.

Примем далее, что лопасти идентичны, а регулировка винта выполнена совершенно точно. При этом условии законы изменения

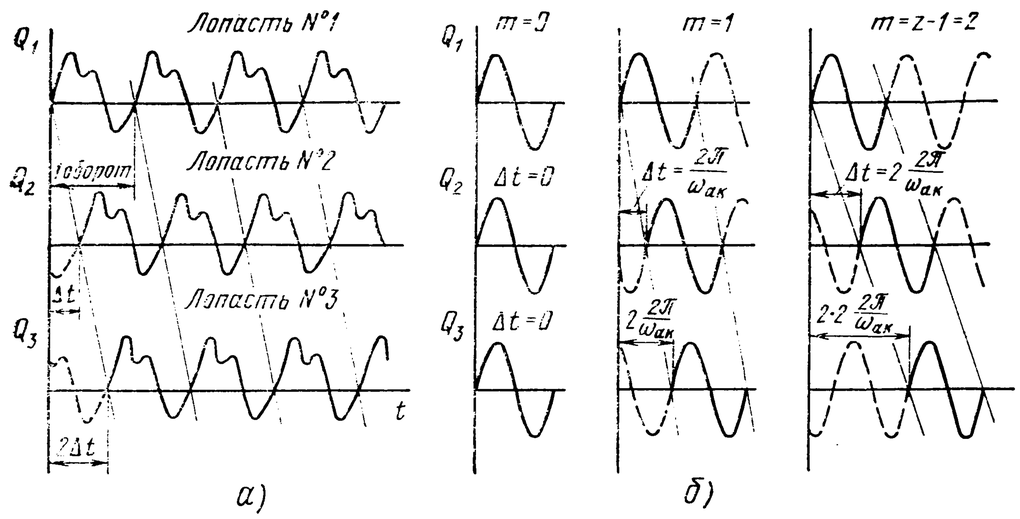


Рис. 2.2. Законы изменения сил на лопастях при вынужденных колебаниях (*а*) и автоколебаниях (*б*)

какого-либо компонента силы или момента отдельных лопастей будут отличаться друг от друга лишь сдвигом по времени (рис. 2.2). Величины же амплитуд любой из составляющих гармоник рассматриваемого компонента силы или момента будут для всех лопастей одинаковыми, т. е. $Q_1^{(n)}=\ldots=Q_k^{(n)}=\ldots=Q_z^{(n)}=Q_л^{(n)}$. Если лопасти совершают вынужденные колебания под действием периодических аэродинамических сил, как это имеет место в поступательном полете, то в формулах (2.1) и (2.3) круговая частота ω равна угловой скорости винта $\omega_{н.в}$. Фаза колебаний в этом случае определяется азимутальным положением лопасти, так как каждая лопасть подвергается действию одинаковой аэродинамической нагрузки, когда она занимает то же самое азимутальное положение. Таким образом, зависимости $Q_k=f(t)$ для соседних лопастей сдвинуты относительно друг друга (см. рис. 2.2, *а*) по времени на величину, необходимую для того, чтобы следующая лопасть заняла то азимутальное положение, которое в исходный момент времени занимает предыдущая лопасть:

$$\Delta t=\frac{\Delta\psi}{\omega_{н.в}}. \tag{2.6}$$

Если сила k-й лопасти изменяется по закону

$$Q_k^{*(n)}=Q_л^{(n)}\cos(n\omega t+\varepsilon_k^{(n)}),$$

а сила $(k+1)$-й лопасти изменяется по закону

$$Q_{k+1}^{*(n)}=Q_л^{(n)}\cos(n\omega t+\varepsilon_{k+1}^{(n)}),$$

то сила $Q_{k+1}^{*(n)}$ в некоторый момент времени t_2 будет иметь то же значение, что и сила $Q_k^{*(n)}$ в момент времени $t_1=t_2-\Delta t$, где Δt определено по формуле (2.6). Отсюда следует:

$$\varepsilon_{k+1}^{(n)}=\varepsilon_k^{(n)}-n\omega_{н.в}\Delta t=\varepsilon_k^{(n)}-n\Delta\psi. \tag{2.7}$$

Начальная фаза ε_k для k-й лопасти может быть выражена через начальную фазу для лопасти № 1: $\varepsilon_k^{(n)}=\varepsilon_1-(k-1)n\Delta\psi$. Выражение для n-й гармоники силы Q_k любой лопасти может быть тогда записано в виде

$$Q_k^{*(n)}=Q_k^{(n)}\cos(n\omega_{н.в}t+\varepsilon_k^{(n)})=Q_л^{(n)}\cos[n\omega_{н.в}t+\varepsilon_1^{(n)}-(k-1)n\Delta\psi].$$

Или с использованием комплексных чисел:

$$Q_k^{*(n)}=\frac{1}{2}Q_л^{(n)}\{\exp i(n\omega_{н.в}t+\varepsilon_1^{(n)}-(k-1)n\Delta\psi)+$$
$$+\exp[-i(n\omega_{н.в}t+\varepsilon_1^{(n)}-(k-1)n\Delta\psi)]\}.$$

При автоколебаниях типа флаттера или земного резонанса круговая частота ω равна круговой частоте самовозбуждающихся колебаний $\omega_{ак}$. В формулах (2.1) и (2.3) сохраняются слагаемые, соответствующие только этой частоте:

$$Q_k=Q_л\cos(\omega_{ак}t+\varepsilon_k)=\frac{1}{2}Q_л(e^{i(\omega_{ак}t+\varepsilon_k)}+e^{-i(\omega_{ак}t+\varepsilon_k)}).$$

Сдвиг фаз сил соседних лопастей определяется формой колебаний (см. разделы, посвященные флаттеру и земному резонансу — гл. 7 и 13). Соотношение начальных фаз соседних лопастей в этом случае может быть записано следующим образом:

$$\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k=m\psi^*=-m\frac{2\pi}{z}, \tag{2.8}$$

а запаздывание по времени

$$\Delta t=-m\frac{2\pi}{z\,\omega_{ак}}.$$

Здесь m — целое число, изменяющееся в пределах от 0 до $z-1$. Параметр m характеризует форму колебаний (см. рис. 2.2, *б*).

Выражение для силы Q_k любой лопасти может быть записано в форме

$$Q_k=Q_л\cos\left[\omega_{ак}t+\varepsilon_1-(k-1)m\frac{2\pi}{z}\right],$$

или с использованием комплексных чисел

$$Q_k=\frac{1}{2}Q_л\left\{\exp i\left(\omega_{ак}t+\varepsilon_1-(k-1)m\frac{2\pi}{z}\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left[-i\left(\omega_{ак}t+\varepsilon_1-(k-1)m\frac{2\pi}{z}\right)\right]\right\}.$$

Можно предположить общую форму записи для обоих случаев:

$$Q_k=Q_л^{(0)}+\sum_n Q_л^{(n)}\cos[\nu_n t+\varepsilon_1^{(n)}-(k-1)\overline{\psi}_n], \tag{2.9}$$

или

$$Q_k = Q_л^{(0)} + \frac{1}{2}\sum_n Q_л^{(n)} \{\exp i(\nu_n t + \varepsilon_1^{(n)} - (k-1)\bar{\psi}_n) +$$

$$+ \exp[-i(\nu_n t + \varepsilon_1^{(n)} - (k-1)\bar{\psi}_n)]\}, \qquad (2.10)$$

где при вынужденных колебаниях

$$\nu_n = n\,\omega_{н.в}; \quad \bar{\psi}_n = n\,\Delta\psi = n\frac{2\pi}{z}; \quad n = 1,\ 2, \ldots,\ \infty \qquad (2.11)$$

и при автоколебаниях

$$Q_л^{(0)} = 0; \quad \nu_n = \omega_{ак}; \quad \bar{\psi}_n = \frac{2\pi}{z} m; \quad m = 0,\ 1, \ldots,\ z-1. \qquad (2.12)$$

Итак, необходимо установить два правила суммирования: для векторов, совпадающих по направлению, и для векторов, повернутых относительно друг друга на заданный угол $\Delta\psi$ (2.5), с величинами, изменяющимися по периодическому закону, описываемому формулами (2.9) или (2.10) при значениях частот и начальных фаз, определяемых по (2.11) или по (2.12).

Первому правилу подчиняются силы и моменты на втулке, векторы которых параллельны оси винта (T, M_y), второму — силы и моменты, векторы которых параллельны плоскости вращения (N, P, M_x, M_r).

§ 2.2. СУММИРОВАНИЕ СИЛ, СОВПАДАЮЩИХ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ПЕРВОЕ ПРАВИЛО СУММИРОВАНИЯ

Найдем сумму сил или моментов, векторы которых параллельны оси винта, т. е. сил T_k или моментов M_{yk}. Вектор суммарной обобщенной силы $\vec{Q}_{вт}$ (или $\vec{T}_{вт}$, или $\vec{M}_{y\,вт}$) определяется по формуле

$$\vec{Q}_{вт} = \vec{Q}_1 + \ldots + \vec{Q}_k + \ldots + \vec{Q}_z,$$

а его величина — по формуле

$$Q_{вт} = Q_1(t) + \ldots + Q_k(t) + \ldots + Q_z(t),$$

так как направления векторов $\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ и т. д. совпадают. Следовательно, с учетом (2.10) имеем

$$Q_{вт}^{*(n)} = \sum_{k=1}^{z} Q_k^{*(n)} = \frac{1}{2} Q_л^{(n)} \sum_{k=1}^{z} \left(e^{i\left[\nu_n t + \varepsilon_1^{(n)} - (k-1)\bar{\psi}_n\right]} + \right.$$

$$\left. + e^{-i\left[\nu_n t + \varepsilon_1^{(n)} - (k-1)\bar{\psi}_n\right]} \right) = \frac{1}{2} Q_л^{(n)} \left(e^{i\left(\nu_n t + \varepsilon_1^{(n)}\right)} \sum_{k=1}^{z} e^{-i(k-1)\bar{\psi}_n} + \right.$$

$$\left. + e^{-i\left(\nu_n t + \varepsilon_1^{(n)}\right)} \sum_{k=1}^{z} e^{i(k-1)\bar{\psi}_n} \right).$$

Суммы $\sum_{k=1}^{z} e^{-i(k-1)\bar{\psi}_n}$ и $\sum_{k=1}^{z} e^{i(k-1)\bar{\psi}_n}$ представляют собой суммы геометрических прогрессий со знаменателями $e^{-i\bar{\psi}_n}$ и $e^{i\bar{\psi}_n}$ соответственно и равны

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{z} e^{-i\bar{\psi}_n(k-1)} = \frac{e^{-i\bar{\psi}_n z} - 1}{e^{-i\bar{\psi}_n} - 1}; \qquad (2.13)$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{z} e^{i\bar{\psi}_n(k-1)} = \frac{e^{i\bar{\psi}_n z} - 1}{e^{i\bar{\psi}_n} - 1}.$$

Как при вынужденных колебаниях, так и при автоколебаниях числители выражений (2.13) обращаются в нуль. Действительно, в первом случае в соответствии с (2.11): $\bar{\psi}_n = \frac{2\pi}{z} n$, а во втором случае по (2.12) $\bar{\psi} = \frac{2\pi}{z} m$, где n и m — целые числа; при этих значениях $e^{i\bar{\psi}_n z} = 1$, а $e^{i\bar{\psi}_n z} - 1 = 0$. Таким образом, числители выражений (2.13) в рассматриваемых случаях равны нулю. Проверим, при каких условиях обращаются в нуль знаменатели в (2.13). Очевидно, это будет соответственно при $e^{i\bar{\psi}_n} = 1$ и $e^{i\bar{\psi}_n} = 1$ или когда $\bar{\psi}_n = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, т. е.

$$\bar{\psi}_n = 2\pi s, \qquad (2.14)$$

где $s = 0,\ 1,\ 2, \ldots$

При вынужденных колебаниях условие (2.14) выполняется, когда отношение n/z — целое число. Это означает, что если при вынужденных колебаниях номер гармоники n кратен числу лопастей, то выражения (2.13) для σ_1 и σ_2 неопределенны. При автоколебаниях условие (2.14) выполняется, когда m/z — целое число, т. е. если форма колебаний определяется таким значением m, при котором m/z — целое число, тогда выражения для σ_1 и σ_2 неопределенны. Так как m может принимать значения $0,\ 1, \ldots, z-1$, то такой случай имеет место только для $m = 0$. Если же n/z не равно целому числу или $m \neq 0$, то знаменатель в (2.13) в нуль не обращается. Следовательно, при вынужденных колебаниях, если номер гармоники n не кратен числу лопастей, и при автоколебаниях по формам, соответствующим $m \neq 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ и $Q_{вт}^{*(n)} = 0$. Таким образом, если номер рассматриваемой гармоники не кратен числу лопастей, то при сложении на втулке таких гармоник от каждой лопасти винта сумма равна нулю, т. е. происходит их взаимное уравновешивание. Такая гармоника называется *непроходной*. Так-

же взаимно уравновешиваются силы и моменты лопастей при автоколебаниях по формам, характеризуемым параметром m, не равным нулю.

Рассмотрим теперь случай, когда числитель и знаменатель в (2.13) обращаются в нули, т. е. случай гармоник с номерами, кратными числу лопастей при вынужденных колебаниях, или случай автоколебаний по форме, характеризуемой $m=0$. Раскрывая неопределенность в (2.13), по правилу Лопиталя получим

$$\lim_{\bar\psi\to 2\pi s}\frac{e^{-i\bar\psi_n z}-1}{e^{-i\bar\psi_n}-1}=\lim_{\bar\psi\to 2\pi s}\frac{-iz\,e^{-i\bar\psi_n z}}{-i\,e^{-i\bar\psi_n}}=z.$$

Аналогично

$$\lim_{\bar\psi\to 2\pi s}\frac{e^{i\bar\psi_n z}-1}{e^{i\bar\psi_n}-1}=\lim_{\bar\psi\to 2\pi s}\frac{iz\,e^{i\bar\psi_n z}}{i\,e^{i\bar\psi_n}}=z.$$

Следовательно,

$$Q^{*(n)}_{\text{вт}}=Q^{(n)}_{\text{л}}\,z\frac{1}{2}\left(e^{i\left(\nu_n t+\varepsilon_1^{(n)}\right)}+e^{-i\left(\nu_n t+\varepsilon_1^{(n)}\right)}\right)=z\,Q^{(n)}_{\text{л}}\cos\left(\nu_n t+\varepsilon_1^{(n)}\right),$$

т. е. сумма $\sum\limits_{k=1}^{z} Q^{*(n)}_k=Q^{*(n)}_{\text{вт}}$ на втулке не равна нулю, она изменяется по тому же закону, что и соответствующая гармоника силы на лопасти $Q^{*(n)}_{\text{л}}$, но имеет амплитуду в z раз большую, чем амплитуда рассматриваемой гармоники силы $Q^{(n)}_{\text{л}}$ отдельной лопасти.

Гармоники, которые при суммировании сил отдельных лопастей не уравновешиваются и дают суммарную силу на втулке, не равную нулю, называются *проходными*. Отметим, что для гармоник с номерами, кратными числу лопастей ($n=sz$, где s — целое число) величина $\bar\psi$ на основании (2.11) равна $2\pi\frac{n}{z}=2\pi s$, т. е. кратна 2π, поэтому $\varepsilon_1=\ldots=\varepsilon_k=\ldots=\varepsilon_z$. Начальные фазы гармоники с номером, кратным числу лопастей, на всех лопастях одинаковы. При автоколебаниях в соответствии с (2.8) при $m=0$ также имеет место такая форма колебаний, когда начальные фазы колебаний различных лопастей совпадают (см. рис. 2.2, *б*).

Итак, можно сформулировать первое правило суммирования — правило суммирования сил, совпадающих по направлению: при вынужденных колебаниях гармоники сил Q_k отдельных лопастей с номерами, кратными числу лопастей, складываются, а с номерами, не кратными числу лопастей, взаимно уравновешиваются, т. е. если $n=0,\ z,\ 2z,\ \ldots$, то $Q^{*(n)}_{\text{вт}}=zQ^{*(n)}_{\text{л}}$. . При других значениях n $Q^{(n)}_{\text{вт}}=0$. В общем случае суммарная сила на втулке (2.4) состоит только из гармоник с номерами, кратными числу лопастей.

При автоколебаниях, если форма колебаний определяется значением параметра $m=0$, силы, действующей от всех лопастей, складываются, и амплитуда суммарной силы на втулке $Q^{(\text{ак})}_{\text{вт}}=z\,Q^{(\text{ак})}_{\text{л}}$. Если же форма колебаний определяется значением m, не равным нулю ($m=1$, 2, ..., $z-1$), т. е. не является синфазной, то суммарная сила на втулке равна нулю.

Рассмотрим в качестве примера суммирование сил T_k, действующих на втулку двухлопастного винта. На рис. 2.3 изображены отдельные гармоники сил T_k для такого винта. Для лопасти № 2 они запаздывают по времени по отношению к гармоникам, действующим на лопасть № 1, на величину Δt, необходимую для того, чтобы лопасть № 2 заняла положение лопасти № 1 в начальный момент времени ($\Delta t=\pi/\omega_{\text{н.в}}$). Из графиков видно, что гармоники с номерами, кратными числу лопастей ($n=0$, 2, 4...), имеют сдвиги по фазе, равные нулю, и складываются. Гармоники с номерами, не кратными числу лопастей ($n=1$, 3, 5...), при суммировании взаимно уравновешиваются.

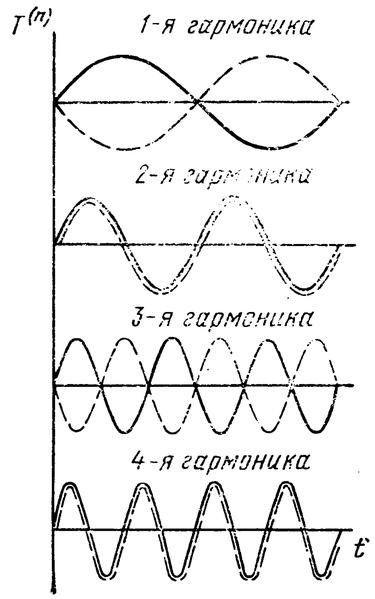


Рис. 2.3. Гармоники силы T. Двухлопастной винт:

——————— лопасть № 1,
— — — — лопасть № 2

§ 2.3. СУММИРОВАНИЕ ВЕКТОРОВ СИЛ И МОМЕНТОВ, ПОВЕРНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДРУГ ДРУГА. ВТОРОЕ ПРАВИЛО СУММИРОВАНИЯ

Рассмотрим теперь случай суммирования сил и моментов, векторы которых не совпадают по направлению, а повернуты относительно друг друга на угол $\Delta\psi$ (угол между лопастями), т. е. компонентов N, P, M_x, M_r (рис. 2.1). Дальнейшее изложение относится к наблюдателю, расположенному во вращающейся системе координат. Такой наблюдатель увидит векторы $\vec{Q}^*_k$ повернутыми один относительно другого на угол $\Delta\psi$ (см. рис. 2.1, *б*) и периодически меняющимися по величине с частотой ν_n. Можно искать решение в аналитической форме, подобно тому, как это было сделано в § 2.2. Но более нагляден вывод второго правила суммирования с помощью вспомогательных геометрических образов.

Вектор $\vec{Q}^*$, длина которого изменяется по периодическому закону

$$Q^*=Q\cos(\omega t+\varepsilon),$$

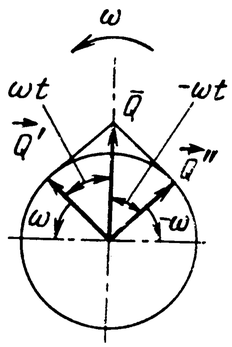


Рис. 2.4. Представление невращающегося вектора $\vec{Q}$ с помощью двух вращающихся векторов $\vec{Q}'_{вт}$ и $\vec{Q}''_{вт}$

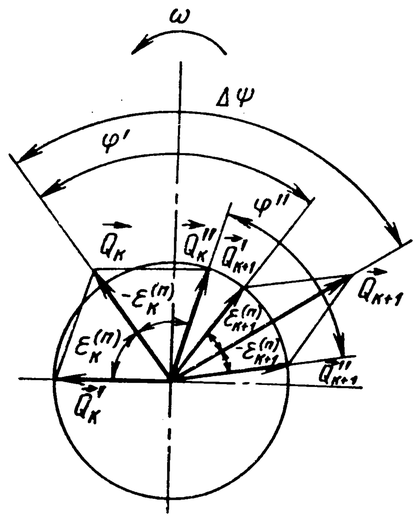


Рис. 2.5. Схема сложения векторов $\vec{Q}'_к$ и $\vec{Q}''_к$

может быть заменен суммой двух векторов постоянной длины

$$\vec{Q}^*=\vec{Q}'+\vec{Q}''; \quad |\vec{Q}'|=|\vec{Q}''|=Q/2,$$

вращающихся в разные стороны с угловыми скоростями ω и —ω соответственно (рис. 2.4). Действительно, сумма проекций этих векторов на вектор $\vec{Q}^*$

$$\frac{Q}{2}\cos(\omega t+\varepsilon)+\frac{Q}{2}\cos[-(\omega t+\varepsilon)]=Q,$$

а на перпендикулярное ему направление всегда равна нулю. Суммирование векторов $\vec{Q}^*_k$ может быть заменено суммированием отдельно векторов $\vec{Q}'_k$ и векторов $\vec{Q}''_k$. Конечный результат определяется суммой двух равнодействующих этих двух систем векторов. В любой момент времени векторы типа $\vec{Q}''_k$ повернуты относительно друг друга на угол $\varphi''=\Delta\psi+(\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k)$ (рис. 2.5). Ломаная линия, получающаяся при суммировании этих векторов, в любой момент времени образуется отрезками длиной $Q_л/2$, повернутыми относительно друг друга на угол φ''_k. Определяя углы φ''_k по формулам (2.5), (2.7) или (2.8), можно убедиться, что для всех гармоник, за исключением $n=sz+1$ (где s — целое число) или $m=1$, ломаная линия образует замкнутый многоугольник и, следовательно, равнодействующая векторов $\vec{Q}''_k$ равна нулю. При $n=sz+1$ или $m=1$ углы φ_k' кратны 2π; поэтому векторы $\vec{Q}''_k$ совпадают по направлению, суммарный вектор имеет длину

$$Q''_{вт}=zQ''_л=\frac{z}{2}Q_л.$$

Таким образом, гармоники с номерами $n=sz+1$ или $m=1$, складываясь, дают вектор $\vec{Q}''_{вт}$, имеющий постоянную длину $\frac{z}{2}Q_л^{(n)}$ и вращающийся в сторону, противоположную вращению винта, с угловой скоростью $-n\omega_{н.в}$ или $-\omega_{ак}$. Аналогично, векторы $\vec{Q}'$ при сложении, если $n=sz-1$ или $m=z-1$, дают вектор длиной $\frac{z}{2}Q_л^{(n)}$, вращающийся по направлению вращения винта. Сумма векторов при $n\neq sz-1$ или $m\neq z-1$ равна нулю. Если $\sum\vec{Q}'_k\neq 0$, то обязательно $\sum\vec{Q}''_k=0$ и наоборот.

Таким образом, можно сформулировать второе правило суммирования — правило суммирования векторов сил и моментов, повернутых относительно друг друга на угол, равный углу между лопастями.

При вынужденных колебаниях те гармоники, номер которых не удовлетворяет условиям $n=sz+1$ ($s=0, 1, 2\ldots$) или $n=sz-1$ ($s=1, 2\ldots$), при суммировании взаимно уравновешиваются. В результате суммирования гармоник, номер которых на единицу больше числа, кратного числу лопастей винта ($n=sz+1$), получается вектор с постоянной длиной $\frac{z}{2}Q_л^{(n)}$, вращающийся с угловой скоростью $-n\omega_{н.в}$ в сторону, противоположную вращению винта. В результате суммирования гармоник, номер которых на единицу меньше числа, кратного числу лопастей винта ($n=sz-1$), также получается вектор с постоянной длиной $\frac{z}{2}Q_л^{(n)}$, но вращающийся с угловой скоростью $n\omega_{н.в}$ в сторону вращения винта. Проходными являются гармоники с номерами $n=sz+1$ ($s=0, 1, 2\ldots$) и $n=sz-1$ ($s=1, 2\ldots$). Другие гармоники — непроходные. В общем случае (2.4) суммарная сила на втулке состоит только из гармоник с номерами $n=sz+1$ и $n=sz-1$.

При автоколебаниях суммарная сила на втулке представляет собой вектор с постоянной длиной $\frac{z}{2}Q_л^{(ак)}$, вращающийся с угловой скоростью $\omega_{ак}$ в сторону вращения винта при $m=z-1$ или в противоположную сторону при $m=1$. При других m (за исключением $m=0$ — см. § 2.2) суммарная сила на втулке равна нулю.

§ 2.4. СИЛЫ И МОМЕНТЫ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕВРАЩАЮЩИХСЯ ОСЕЙ

Правила суммирования, частóты проходных и непроходных гармоник были установлены при рассмотрении явлений во вращающейся со втулкой системе координат $Oxyr$ (см. рис. 2.1, *б*). Так как оси OY и Oy невращающейся и вращающейся систем координат совпадают, то выражения для силы $T_{вт}$ и момента $M_{y\,вт}$, полученные в § 2.2, сохраняются и для невращающейся системы коорди-

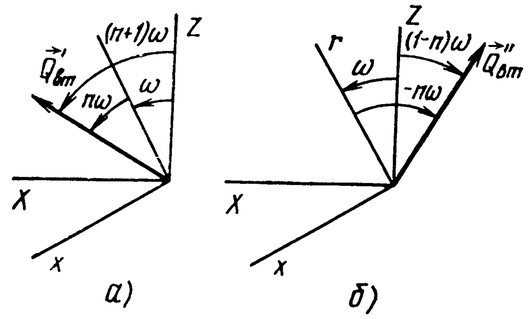


Рис. 2.6. Векторы $\vec{Q}'$ и $\vec{Q}''$ во вращающейся и невращающейся системах координат при $n=z-1$ (*а*) и $n=z+1$ (*б*)

нат. Иначе обстоит дело с компонентами сил и моментов в плоскости вращения винта ($N_{вт}$, $P_{вт}$, $M_{x\,вт}$, $M_{r\,вт}$). В § 2.3 было показано, что если $n=sz-1$ или $m=z-1$, то сумма сил $\vec{Q}_k^{*(n)}$ представляет собой вектор, имеющий постоянную длину и вращающийся относительно осей, связанных со втулкой, с угловой скоростью $n\omega_{н.в}$ или $\omega_{ак}$ в сторону вращения винта (рис. 2.6, *а*). Относительно невращающихся осей этот вектор вращается, следовательно, с угловой скоростью $\omega=n\omega_{н.в}+\omega_{н.в}$ или $\omega=\omega_{ак}+\omega_{н.в}$. Так как $n=sz-1$, то $\omega=n\omega_{н.в}+\omega_{н.в}=sz\omega_{н.в}-\omega_{н.в}+\omega_{н.в}=sz\omega_{н.в}$. Следовательно, гармоника с номером $n=sz-1$ создает вектор постоянной длины, вращающийся относительно невращающихся осей с угловой скоростью $sz\omega_{н.в}$. Таким образом, проекции силы на оси OX и OZ невращающейся системы координат при $n=sz-1$ будут изменяться с круговой частотой $sz\omega_{н.в}$. Если $n=sz+1$, то $\omega=n\omega_{н.в}+\omega_{н.в}=-sz\omega_{н.в}-\omega_{н.в}+\omega_{н.в}=-sz\omega_{н.в}$. Таким образом, и в этом случае проекции силы на оси невращающейся системы меняются с круговой частотой $sz\omega_{н.в}$.

Следовательно, при вынужденных колебаниях проекции силы $Q_{вт}$ на невращающиеся оси всегда содержат только гармоники с номерами, кратными числу лопастей. Вызываются же эти гармоники гармониками с номерами $n=sz+1$ и $n=sz-1$ сил Q_k, действующих на вращающейся втулке. Проходная гармоника с номером $n=sz+1$ или $n=sz-1$ силы на вращающейся втулке превращается в гармонику с номером $n=sz$ в невращающейся системе координат. При автоколебаниях, если $m=1$, то $\omega=-\omega_{ак}+\omega_{н.в}$, а если $m=z-1$, то $\omega=\omega_{ак}+\omega_{н.в}$. Следовательно, при автоколебаниях круговые частоты в невращающейся системе будут $\omega_{н.в}\pm\omega_{ак}$.

Вектор силы $\vec{Q}_{вт}^{*(n)}$, вращаясь, в некоторый момент времени совпадает с осью OX, а через некоторое время $\Delta t=\pi/2\omega$ с осью OZ. Поэтому вызываемые одной из проходных гармоник силы по обеим невращающимся осям OX и OZ имеют одинаковые амплитуды. Для пары сопряженных гармоник, т. е. гармоник с номерами $n=s_1z+1$ и $n=s_2z-1$ при одинаковом значении $s_1=s_2=s$, сумма проекций обоих векторов на любую невращающуюся ось представляет собой гармонику с номером $n=sz$ и амплитудой, зависящей от соотношения амплитуд и фаз этих векторов. Можно найти две такие взаимно перпендикулярные оси, для которых амплитуды будут иметь соответственно наибольшее и наименьшее значения. При одинаковой длине векторов это наименьшее значение амплитуды равно нулю.

глава 3 СОБСТВЕННЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАСТЕЙ НЕСУЩЕГО ВИНТА (МЕТОДЫ РАСЧЕТА)

Как показывает практика, основными задачами по прочности лопастей являются обеспечение достаточно большого ресурса при действии переменных нагрузок в полете и обеспечение безопасности от возникновения разрушающих автоколебаний типа флаттера [47]. Соответственно сведения, необходимые для решения первой из этих задач, даны в гл. 3 и 4 (собственные колебания) и в гл. 5 и 6 (вынужденные колебания), а второй — в гл. 7.

В гл. 3 рассматриваются методы определения собственных частот и форм колебаний лопасти. Зная собственные частоты, можно непосредственно оценить совершенство конструкций лопасти в отношении величин переменных напряжений в ее элементах (§ 4.1). Собственные формы наряду с собственными частотами служат основой при расчете свободных (§ 3.5) и вынужденных (гл. 5) колебаний.

§ 3.1. УРАВНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЛОПАСТИ

Пусть ось жесткости недеформированной лопасти прямолинейна и центры тяжести и жесткости во всех сечениях совпадают, а одноименные главные оси инерции всех сечений параллельны друг другу, т. е. лопасть не закручена (рис. 3.1, *а*). При этих условиях можно воспользоваться уравнением изгибных колебаний балки. Так как колебания могут происходить в двух плоскостях — rOy и rOx, то таких уравнений можно написать два:

$$(EI_x y'')''+m\ddot{y}=0; \tag{3.1}$$

$$(EI_y x'')''+m\ddot{x}=0. \tag{3.2}$$

Здесь y и x — перемещения сечения лопасти по направлению главных осей инерции сечения (см. рис. 3.1); EI_x и EI_y — изгибные жесткости балки относительно главных осей инерции сечения; m — погонная масса лопасти.

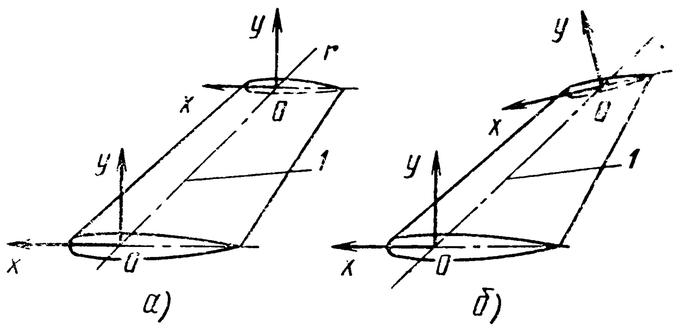


Рис. 3.1. Незакрученная (*а*) и закрученная (*б*) лопасти:

1 — ось лопасти; Ox, Oy — главные оси сечений

Уравнения (3.1) и (3.2) являются уравне-

ниями с частными производными. Как и в дальнейшем, дифференцирование по радиусу обозначено штрихом: $\partial y/\partial r = y'$, а дифференцирование по времени — точкой: $\partial y/\partial t = \dot{y}$.

Уравнение следует рассматривать совместно с граничными условиями. На свободном конце лопасти ($r=R$) равны нулю перерезывающая сила Q и изгибающий момент M:

$$(Q_y)_{r=R} = (EI_x y'')'_{r=R} = 0; \quad (M_x)_{r=R} = (EI_x y'')_{r=R} = 0; \tag{3.3}$$

$$(Q_x)_{r=R} = (EI_y x'')'_{r=R} = 0; \quad (M_y)_{r=R} = (EI_y x'')_{r=R} = 0.$$

Рассматривая граничные условия в комлевом сечении лопасти, будем считать, что втулка несущего винта не может совершать перемещений в пространстве. При таком предположении и жестком (без шарниров) креплении лопасти к втулке должны отсутствовать перемещение комлевого сечения лопасти и его поворот:

$$y_{r=0} = 0; \quad y'_{r=0} = 0;$$

$$x_{r=0} = 0; \quad x'_{r=0} = 0. \tag{3.4}$$

При шарнирном креплении лопастей должны равняться нулю перемещение комля лопасти и момент в шарнире. Пусть главные оси сечений параллельны соответствующим осям шарниров, а относ шарниров от оси вращения равен нулю. В этом случае граничные условия записываются в таком виде:

$$y_{r=0} = 0; \quad (M_x)_{r=0} = (EI_x y'')_{r=0} = 0;$$

$$x_{r=0} = 0; \quad (M_y)\, r = 0 = (EI_y x'')_{r=0} = 0. \tag{3.5}$$

Уравнения (3.1) и (3.2) по форме совпадают. Они не зависят друг от друга. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только одно из них — уравнение (3.1). Все результаты можно отнести при одинаковых граничных условиях и к уравнению (3.2).

Решение уравнения (3.1) ищем в виде произведения

$$y(r, t) = \xi(r)\,\delta(t), \tag{3.6}$$

где $\xi(r)$ — функция только радиуса, а $\delta(t)$ — функция только времени.

Подставив (3.6) в уравнение (3.1) и разделив оба слагаемых на произведение $\xi\delta m$, получим

$$\frac{[EI(r)\,\xi''(r)]''}{m(r)\,\xi(r)} = -\frac{\ddot{\delta}(t)}{\delta(t)}. \tag{3.7}$$

В левой части равенства имеем функции только радиуса, а в правой — только времени. Следовательно, левая и правая части равенства (3.7) не зависят ни от радиуса, ни от времени, т. е. представляют собой постоянную величину, которую удобно в дальнейшем обозначить p^2:

$$\frac{(EI\,\xi'')''}{m\,\xi} = p^2; \quad -\frac{\ddot{\delta}}{\delta} = p^2.$$

Таким образом, уравнение с частными производными (3.1) преобразуется к двум уравнениям:

$$(EI\,\xi'')'' - p^2 m\xi = 0 \tag{3.8}$$

и $$\ddot{\delta} + p^2\delta = 0. \tag{3.9}$$

Решение уравнения (3.9), представляющего собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, как известно, имеет вид

$$\delta = M^* \cos pt + N^* \sin pt. \tag{3.10}$$

Это показывает, что в рассматриваемом случае имеют место гармонические колебания с круговой * частотой p. Постоянные M^* и N^* определяются начальными условиями.

Из выражения (3.6) с учетом результата (3.10) следует, что функция ξ определяет распределение амплитуд колебаний по длине балки.

§ 3.2. НЕВРАЩАЮЩАЯСЯ ЛОПАСТЬ С ПОСТОЯННЫМИ ПО РАДИУСУ ЖЕСТКОСТЬЮ И ПОГОННОЙ МАССОЙ

Обратимся к уравнению (3.8). Для лопасти с постоянными по радиусу жесткостью и погонной массой оно принимает вид

$$\xi^{IV} - \alpha^4\xi = 0,$$

где $\alpha^4 = \dfrac{p^2 m}{EI}$.

Общее решение имеет вид

$$\xi = A^* e^{\alpha r} + B^* e^{-\alpha r} + C^* e^{i\alpha r} + D^* e^{-i\alpha r}. \tag{3.11}$$

Здесь A^*, B^*, C^*, D^* — постоянные.

Применим далее специальные функции — функции Крылова:

$$S(\alpha r) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\alpha r + \cos\alpha r);$$

$$T(\alpha r) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\alpha r + \sin\alpha r);$$

$$U(\alpha r) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\alpha r - \cos\alpha r); \tag{3.12}$$

$$V(\alpha r) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}\alpha r - \sin\alpha r).$$

При $r=0$ функция $S(0)=1$, а остальные функции $T(0) = U(0) = V(0) = 0$. Выполняя дифференцирование, можно убедиться, что

* В дальнейшем, где это не вносит неясности, определение «круговая» опущено.

производные от одной из функций Крылова могут быть выражены через другие функции, например:

$$\frac{dS}{dr}=\alpha V,\quad \frac{dT}{dr}=\alpha S,\quad \frac{d^2S}{dr^2}=\alpha\frac{dV}{dr}=\alpha^2 U \text{ и т. д.}$$

Любая производная может быть найдена путем круговой замены:

$$V\to U\to T\to S\to V \text{ и т. д.}$$

Эти свойства функций Крылова и делают их удобными при рассмотрении задачи о колебаниях балки. Существуют таблицы этих функций (см., например, [2]), что облегчает расчеты.

Учитывая все это, выразим решение, записанное в привычной форме (3.11), через функции Крылова. После несложных преобразований получим

$$\xi(r)=AS(\alpha r)+BT(\alpha r)+CU(\alpha r)+DV(\alpha r). \tag{3.13}$$

Здесь A, B, C, D — постоянные, отличающиеся от введенных ранее постоянных A^*, B^*, C^*, D^*.

Для определения постоянных A, B, C, D используют граничные условия. Из (3.13) поочередно найдем соответствующие производные и подставим в полученные выражения $r=0$ или $r=R$ в зависимости от рассматриваемого граничного условия (3.3) — (3.5). Получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных A, B, C, D. Уравнения содержат также неизвестный параметр α. Такая система имеет нетривиальное, т. е. отличное от нуля, решение в том и только в том случае, когда определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных (A, B, C, D) обращается в нуль. Тривиальное решение $A=B=C=D=0$ соответствует состоянию покоя балки и, следовательно, интереса не представляет. Поэтому для отыскания нетривиальных решений приравняем нулю определитель системы. Таким образом получим уравнение для определения значений параметра α. Каждому корню этого уравнения α_j соответствует свое нетривиальное решение исходной системы алгебраических уравнений. Подставляя поочередно каждое найденное таким образом значение α_j в систему алгебраических уравнений, получим соотношения между коэффициентами A, B, C и D, т. е. найдем соответствующую форму колебаний. В теории колебаний показано (см., например, [3, 42]), что число корней α_j бесконечно. Практический интерес представляют обычно три-четыре наименьшие значения α_j. Зная α_j, нетрудно найти частоты:

$$p_j=\alpha_j^2\sqrt{\frac{EI}{m}}\ (j=1,\ 2,\ 3,\ldots). \tag{3.14}$$

Рассмотрим случай жесткого крепления лопасти к втулке. Граничные условия в этом случае с учетом (3.6) имеют вид

$$\xi(0)=0;\quad \xi''(R)=0;$$

$$\xi'(0)=0;\quad \xi'''(R)=0.$$

Из условия $\xi(0)=\xi'(0)=0$ получим $A=B=0$. Условия $\xi''(R)=0$ и $\xi'''(R)=0$ после подстановки в них выражения (3.13) приобретают вид

$$\xi''(R)=\alpha^2 CS(\alpha R)+\alpha^2 DT(\alpha R);$$

$$\xi'''(R)=\alpha^3 CV(\alpha R)+\alpha^3 DS(\alpha R).$$

Определитель этой системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} S(\alpha R) & T(\alpha R)\\ V(\alpha R) & S(\alpha R)\end{vmatrix}.$$

Приравняв определитель нулю, получим уравнение для определения α_j:

$$\Delta=S^2(\alpha R)-T(\alpha R)V(\alpha R)=0$$

или

$$\operatorname{ch}(\alpha R)\cos(\alpha R)+1=0.$$

Первые четыре корня этого уравнения будут:

$$\alpha_1\approx\frac{1{,}875}{R};\quad \alpha_2\approx\frac{4{,}694}{R};\quad \alpha_3\approx\frac{7{,}855}{R};\quad \alpha_4\approx\frac{10{,}996}{R}.$$

Приближенно можно записать

$$\alpha_j\approx\frac{\pi}{R}\left(j-\frac{1}{2}\right),\quad j=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Эта формула тем точнее, чем выше номер тона j. Из условия $\xi''(R)=0$ или $\xi'''(R)=0$, подставив $\alpha=\alpha_j$, находим:

$$\frac{D_j}{C_j}=-\frac{S(\alpha_j R)}{T(\alpha_j R)}=-\frac{V(\alpha_j R)}{S(\alpha_j R)}.$$

Таким образом, выражение (3.13) для формы колебаний может быть записано в виде

$$\xi_j(r)=C_j\left[U(\alpha_j r)+\left(-\frac{S(\alpha_j R)}{T(\alpha_j R)}\right)V(\alpha_j r)\right]. \tag{3.15}$$

Для первых четырех тонов формы $\xi_j(\bar r)$ показаны на рис. 3.2. В выражении (3.15) остался не определенным коэффициент C_j, так как система однородных уравнений позволяет только выразить все неизвестные через одно из них. Найти же все неизвестные, как в «обычной» системе алгебраических уравнений с правыми частями, отличающимися от нуля, нельзя.

Таким образом, дифференциальное уравнение свободных колебаний балки позволяет найти только относительное распределение амплитуд. Величины амплитуд колебаний сечений остаются неопределенными. Они определяются в каждой конкретной частной задаче начальными условиями, к которым и надо обратиться, чтобы найти коэффициенты C_j. Соответствующим примером может служить задача § 3.5. Однако, как будет видно из дальнейшего, во

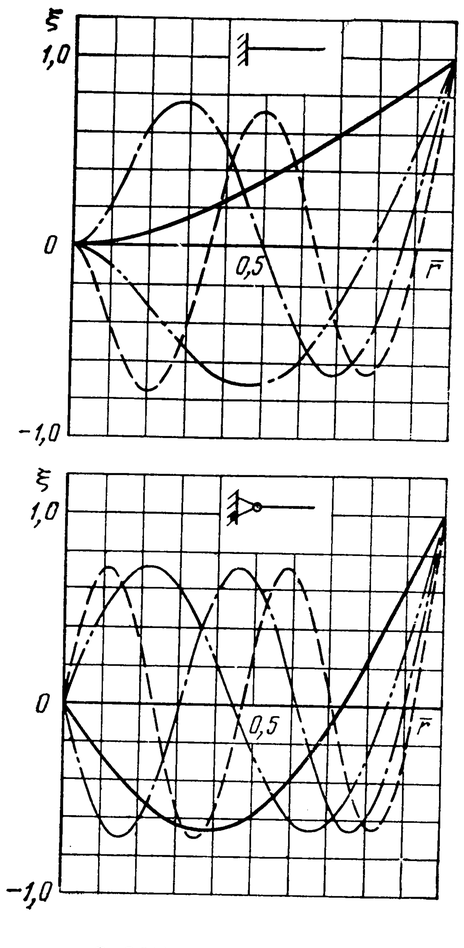


Рис. 3.2. Формы собственных изгибных колебаний (нормированные из условия $\xi''_{max}=1$):

——— I тон; —·—·— II тон; —·— III тон; – – – – –IV тон

многих случаях расчета форму колебаний достаточно найти с точностью до постоянного множителя. Поэтому можно, например, принять $C_j=1$. Иногда выбирают C_j из других формальных соображений, например так, чтобы на конце лопасти $\xi(R)=1$ или $\int\limits_0^R \xi^2(r)\,dr=1$. Такие формы называют нормированными.

Поступая аналогичным образом в случае шарнирного крепления лопасти, получим уравнение для определения значений α_j в виде

$$\operatorname{tg}\alpha_j R=\operatorname{th}\alpha_j R. \qquad (3.16)$$

Решая это уравнение, найдем значения

$$\alpha_1\approx\frac{3{,}927}{R};\quad \alpha_2\approx\frac{7{,}068}{R};\quad \alpha_3\approx\frac{10{,}210}{R};\quad \alpha_4\approx\frac{13{,}352}{R}.$$

Приближенно можно записать

$$\alpha_j\approx\frac{\pi}{R}\left(j+\frac{1}{4}\right),\quad j=1,\ 2,\ 3\ldots$$

Эта формула тем точнее, чем выше номер тона j.

Форма колебаний описывается выражением

$$\xi_j(r)=B\left[T(\alpha_j r)+\left(-\frac{V(\alpha_j R)}{T(\alpha_j R)}\right)V(\alpha_j r)\right]$$

Для первых четырех тонов формы $\xi_j=(r)$ показаны на рис. 3.2.

Отметим, что в случае шарнирно подвешенной лопасти корнем уравнения (3.16) является также $\alpha_0=0$. Из уравнения (3.14) при $\alpha=0$ следует $p_0=0$, а из уравнения (3.8) с учетом граничных условий (3.3) и (3.5) — $\xi_0=r$. Такая форма колебаний называется нулевой, она соответствует колебаниям шарнирно подвешенной лопасти без изгибных деформаций (как абсолютно жесткого стержня), напряжений в лонжероне лопасти при этом не возникает. Для лопасти с жестким креплением к втулке нулевого тона нет.

§ 3.3. НЕКОТОРЫЕ ВЫВОДЫ О СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТАХ И ФОРМАХ

Из изложенного следует, что собственные частоты увеличиваются с увеличением жесткости и уменьшением массы, однако для заметного изменения частот надо существенно изменить жесткость или массу, так как эти параметры входят в (3.14) в подкоренное выражение. Сравним собственные частоты для одной и той же лопасти, закрепленной жестко и шарнирно. С учетом нулевого тона ($p_0^{ш}=0$) имеет место следующий ряд неравенств:

$$p_0^{ш}<p_1^{ж}<p_1^{ш}<p_2^{ж}<\ldots$$

Собственные формы позволяют получить представление о характере распределения напряжений по радиусу лопасти при изгибных колебаниях. Используя известные из курса сопротивления материалов формулы, найдем

$$\sigma=\frac{Mh}{I}=\frac{EI\,y''\,h}{I}=E\,h\,y'', \qquad (3.17)$$

где h — расстояние от точки, в которой определяется напряжение, до главной оси Ox.

Учитывая (3.6), $\sigma=Ehy''=Eh\xi''(r)\delta(t)$, а амплитуда напряжений $\Delta\sigma=E\,h\,\xi''(r)\sqrt{M^{*2}+N^{*2}}=\mathrm{const}\,\xi''(r)$.

Вторые производные $\xi''(r)$ нетрудно определить, используя формулы (3.15) и (3.16). Для форм, изображенных на рис. 3.2, они показаны на рис. 3.3. Из графиков видно, что для жестко закрепленной лопасти наибольшие напряжения возникают в комлевой части (в заделке). При колебаниях по второму тону большие напряжения будут также в сечениях, расположенных в средней части лопасти ($\bar r\approx0{,}5$), а при колебаниях по третьему тону — и в сечениях, расположенных на относительных радиусах $\bar r\approx0{,}3$ и $\bar r\approx0{,}7$.

Для шарнирно прикрепленной лопасти при колебаниях по первому тону (рис. 3.3) большие напряжения возникают в сечении на относительном радиусе $\bar r\approx0{,}4$. При колебаниях по второму тону — в сечениях на относительных радиусах $\bar r\approx0{,}25$ и $\bar r\approx0{,}7$. При

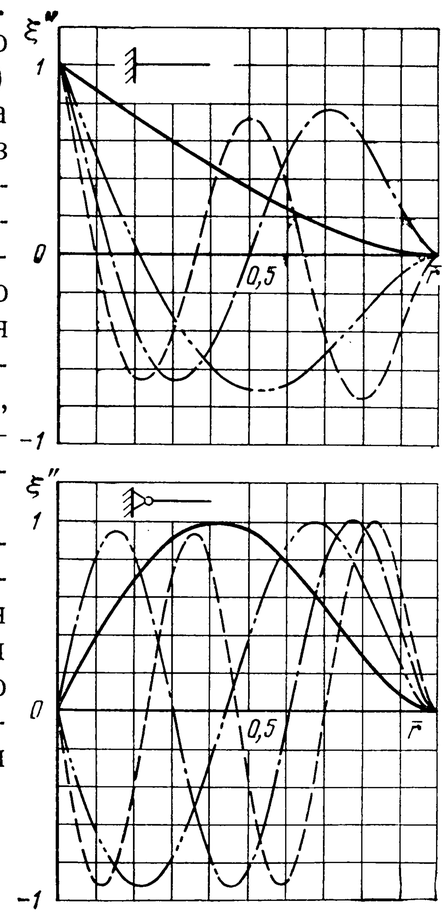


Рис. 3.3. Моментные формы при свободных изгибных колебаниях (нормированные из условия $\xi''_{max}=1$):

——— I тон; —·—·— II тон; —·— III тон; – – – – –IV тон

колебаниях по третьему тону — на относительных радиусах $\bar{r}\approx 0{,}15$, $\bar{r}\approx 0{,}45$ и $\bar{r}\approx 0{,}8$. Рассмотренный метод применим для колебаний как в плоскости взмаха, так и в плоскости вращения, так как вид уравнений (3.1) и (3.2) одинаков. При одинаковых граничных условиях значения α_j и формы колебаний в плоскости наименьшей и в плоскости наибольшей жесткости совпадают. Частоты колебаний определяются формулой (3.14), в которую при расчете колебаний в плоскости взмаха и в плоскости вращения надо подставить одни и те же значения α_j и m, но разные значения жесткости: в первом случае EI_x, а во втором EI_y. Поэтому значения частот собственных изгибных колебаний в плоскости взмаха и в плоскости вращения отличаются. Как правило, жесткость лопасти в плоскости вращения больше, чем жесткость в плоскости взмаха: $EI_y > EI_x$. Следовательно, частоты собственных изгибных колебаний невращающейся лопасти в плоскости вращения обычно выше, чем в плоскости взмаха.

§ 3.4. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ИНТЕГРАЛЬНОМ СООТНОШЕНИИ (3.18)

Для реальных лопастей жесткости и массы распределены по радиусу неравномерно. В этом случае можно воспользоваться методом последовательных приближений. Перенесем в уравнении (3.8) второй член в правую часть, дважды проинтегрируем в пределах от R до r, затем разделим левую и правую части на EI и снова дважды проинтегрируем (в пределах от 0 до r). В результате получим следующее интегральное соотношение:

$$\xi = p^2 \int_0^r \int_0^r \frac{1}{EI} \int_R^r \int_R^r m\,\xi\, dr\, dr\, dr\, dr + C_3 r + C_4, \qquad (3.18)$$

где постоянные интегрирования $C_3 = \xi'(0)$; $C_4 = \xi(0)$.

В случае жесткого крепления лопасти из граничных условий $\xi'(0)=0$ и $\xi(0)=0$ следует, что $C_3 = C_4 = 0$, а в случае шарнирного крепления (из условия $\xi(0)=0$) — $C_4 = 0$.

Рассмотрим вначале случай жесткого крепления. Предположим, что частота p известна. В правую часть выражения (3.18) подставим произвольную функцию радиуса $u^{(0)}(r)$ и выполним интегрирование. В результате получим новую функцию $u^{(1)}(r)$:

$$u^{(1)}(r) = p^2 \int_0^r \int_0^r \frac{1}{EI} \int_R^r \int_R^r m u^{(0)}\, dr\, dr\, dr\, dr. \qquad (3.19)$$

Снова подставим ее в правую часть выражения (3.18) и, выполнив указанные операции, получим новую функцию $u^{(2)}(r)$ и т. д. В теории колебаний показывается (см., например, [3]), что такой процесс сходится и $u(r)$ стремится к форме собственных колебаний низшего (первого) тона.

Если выполнять аналогичные вычисления, полагая в формуле (3.18) $p^2=1$, то масштаб кривой $\xi^{(n)}(r)$ в каждом приближении уменьшается в p^2 раз, где p — истинное значение собственной частоты. Из изложенного ясно, каким образом практически осуществляется вычисление формы и частоты первого тона: выбирается функция $u^{(0)}(r)$ исходного приближения, выполняются вычисления по формуле (3.18) при $p^2=1$, определяется приближенное значение собственной частоты:

$$p^{(1)} = \sqrt{\frac{u^{(1)}(r)}{u^{(0)}(r)}}.$$

Далее вычисления повторяются для принятой в качестве исходной функции $u^{(1)}(r)$ и т. д.

Сопоставляя последовательные значения вычисленных таким образом частот, следует прекратить процесс последовательных приближений, когда разница между двумя последовательными значениями $p^{(n)}$ и $p^{(n+1)}$ станет меньше установленной заранее величины (обычно 0,1—0,5%). На практике в качестве $u^{(0)}(r)$ часто выбирают линейные функции $u^{(0)}(r)=1$ или $u^{(0)}(r)=r$. Процесс последовательных приближений сходится всегда к форме низшего тона, какая бы функция $u^{(0)}(r)$ ни была бы выбрана в качестве первого приближения. Поэтому для нахождения частот и форм более высоких тонов изложенный выше метод непосредственно не применим и должен быть несколько дополнен. На каждом шаге процесса приближения следует производить ортогонализацию (см. § 3.7) функции $u(r)$ к низшим, ранее найденным формам колебаний лопасти. Например, если необходимо определить частоту и форму второго тона, то на каждом шаге процесса приближения производится ортогонализация функции $u^{(n)}(r)$ к определенной заранее форме первого тона колебаний. При этом определяется функция

$$u^{*(n)} = u^{(n)} - c^{(n)}\xi_1, \qquad (3.20)$$

где $c^{(n)}$ — некоторый коэффициент; ξ_1 — форма колебаний первого тона.

Именно эта функция u^*, а не функция u, как при расчете частоты и формы первого тона, и используется в качестве исходной для последующего приближения, т. е. подставляется в правую часть формулы (3.19). Для определения коэффициента $c^{*(n)}$ используется условие ортогональности (3.45) (см. § 3.7). Функция $u^{*(n)}$, как приближенная форма второго тона, должна удовлетворять этому условию:

$$\int_0^R m u^{*(n)} \xi_1\, dr = 0. \qquad (3.21)$$

Подставляя в условие (3.21) выражение (3.20), получим

$$\int_0^R m u^{*(n)} \xi_1\, dr = \int_0^R m u^{(n)} \xi_1\, dr - c^{(n)} \int_0^R m \xi_1^2\, dr = 0.$$

Отсюда определяется коэффициент $c^{(n)}$:

$$c^{(n)} = \frac{\int_0^R m u^{(n)} \xi_1\, dr}{\int_0^R m \xi_1^2\, dr}.$$

При определении значения собственной частоты также вместо функции u используется функция u^*:

$$p = \sqrt{\frac{u^{*(n)}}{u^{*(n+1)}}}.$$

Если необходимо найти форму и частоту j-го тона, то для функции u^* составляется выражение

$$u^* = u - c_1\xi_1 - c_2\xi_2 - \ldots - c_{j-1}\xi_{j-1}. \qquad (3.22)$$

Коэффициенты c_1, c_2... определяются из условий ортогональности u^* ко всем предыдущим формам колебаний, которые должны быть известны заранее:

$$\int_0^R mu^* \xi_\nu \, dr = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, j-1. \tag{3.23}$$

Подставляя в условия (3.23) выражение (3.22) и учитывая, что формы ξ_1, ξ_2... ортогональны друг другу, получим формулу для определения c_1, c_2, ...:

$$c_\nu = \frac{\int_0^R mu\, \xi_\nu \, dr}{\int_0^R m\, \xi_\nu^2 \, dr}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, j-1.$$

В случае шарнирного крепления лопасти исходное для метода последовательных приближений уравнение (3.18) содержит постоянную интегрирования C_3. Таким образом, возникает дополнительная задача определения коэффициента C_3, а в остальном метод последовательных приближений для рассматриваемого случая ничем не отличается от предыдущего. Как уже отмечалось, для шарнирно подвешенной лопасти существует нулевая форма $\xi_0 = r$, $p_0 = 0$. Поэтому для определения C_3 можно воспользоваться условием ортогональности формы первого тона и формы нулевого тона, которое имеет вид

$$\int_0^R mu^{(n+1)} \xi_0 \, dr = 0. \tag{3.24}$$

Откуда с учетом (3.18) следует

$$C_3 = -\frac{\int_0^R mr \int_0^r \int_0^r \frac{1}{EI} \int_R^r \int_R^r mu^{(n)} \, dr\, dr\, dr\, dr\, dr}{\int_0^R mr^2 \, dr}.$$

Уравнение (3.24) можно было бы получить, если воспользоваться граничным условием для шарнирно подвешенной лопасти, заключающимся в равенстве нулю момента относительно горизонтального шарнира, определяемого в случае свободных колебаний только силами инерции колебаний лопасти.

Выясним смысл операций, предусмотренных методом последовательных приближений. Найдем ускорение некоторого элемента лопасти при ее свободных колебаниях по какому-либо тону j. На основании формулы (3.6) имеем: $\ddot{y}_j = \ddot{\delta}_j(t)\xi_j(r)$. Погонная инерционная нагрузка $w_{ин} = -m\ddot{y}_j = -m\xi_j\ddot{\delta}_j$. Из этого выражения следует, что инерционная нагрузка в каждом сечении имеет амплитуду, пропорциональную $m\xi_j$. Используя известную из курса сопротивления материалов формулу, находим

$$M^0 = -\int_R^r \int_R^r m\, \xi_j \, dr\, dr.$$

Таким образом, первые два интегрирования в формуле (3.18) можно рассматривать как определение амплитуды изгибающего момента по заданным амплитудам инерционной погонной нагрузки. Поэтому формула (3.18) может быть переписана в виде

$$u^0 = \int_0^r \int_0^r \frac{M^0}{EI} \, dr\, dr + C_3 r + C_4.$$

Следовательно, два последних интегрирования можно рассматривать как определение амплитуд колебаний по заданным амплитудам изгибающих моментов.

Итак, расчет по методу последовательных приближений может рассматриваться как последовательное определение амплитуд моментов по заданным амплитудам перемещений с последующим определением новых амплитуд перемещений по найденным амплитудам моментов.

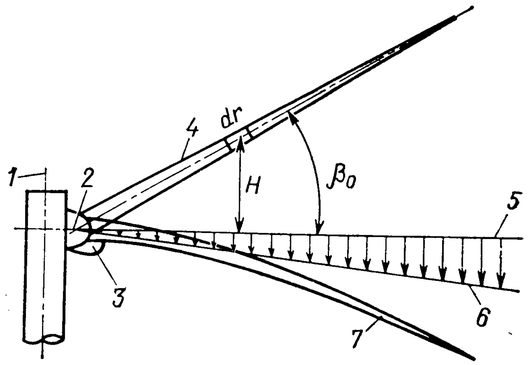


Рис. 3.4. Нагружение лопасти при ее падении на ограничитель свеса:

1 — ось вала винта; *2* — ось ГШ; *3* — ограничитель свеса; *4* — лопасть в исходном положении; *5* — плоскость вращения; *6* — распределение начальных скоростей; *7* — деформированная лопасть

§ 3.5. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПАДЕНИИ ЛОПАСТИ НА ОГРАНИЧИТЕЛЬ СВЕСА

Результаты, полученные в предыдущих разделах, дают возможность решить задачу о напряжениях, возникающих при свободных колебаниях лопасти в условиях, определяемых расчетным случаем II-з норм прочности. В соответствии с этим случаем рассматривается падение на ограничитель невращающейся и непришвартованной лопасти, поднятой вверх, например, порывом ветра на некоторый заданный угол взмаха β_0. При падении на ограничитель свеса возбуждаются свободные изгибные колебания лопасти. При колебаниях возникают демпфирующие силы (аэродинамические и силы внутреннего демпфирования конструкции), поэтому колебания постепенно затухают. При определении максимальных напряжений в лонжероне демпфированием можно пренебречь. С этим допущением уравнение движения лопасти имеет уже известный нам вид (3.1). Его решение также известно:

$$y = \sum_j \left(M_j^* \cos p_j t + N_j^* \sin p_j t\right) \xi_j, \tag{3.25}$$

где ξ_j и p_j — формы и частоты собственных изгибных колебаний лопасти.

Они определяются с учетом того, что комель лопасти лежит на ограничителе (рис. 3.4), т. е. при таких же граничных условиях, как и для лопасти с жестким креплением к втулке, — выражения (3.3), (3.4).

Постоянные M_j^* и N_j^* определяются из начальных условий, которые имеют вид

$$y_{t=0} = 0; \quad \dot{y}_{t=0} = v_0(r), \tag{3.26}$$

т. е. в начальный момент возникновения колебаний лопасть, коснувшаяся ограничителя, не изогнута, а точки ее обладают некоторой скоростью $v_0(r)$. Подставляя $t=0$ в решение (3.25) и приравнивания его нулю в соответствии с первым начальным условием (3.26), получим

$$\sum M_j^* \xi_j = 0,$$

откуда все $M_j^* = 0$. Дифференцируя по времени решение (3.25), подставляя в полученное выражение для скорости $\dot{y}$ значение $t=0$ и используя второе начальное условие (3.26), получим

$$\sum N_j^* p_j \xi_j = v_0(r).$$

Умножая левую и правую части этого равенства на $m\xi_k dr$ и интегрируя по

длине лопасти, получим

$$\sum N_j^* p_j \int_0^R m\,\xi_j\,\xi_k\,dr = \int_0^R v_0(r)\,m\,\xi_k\,dr. \qquad (3.27)$$

На основании свойства ортогональности собственных форм [см. (3.45)] в левой части выражения (3.27) все слагаемые, за исключением содержащего ξ с индексом $j=k$, равны нулю. Поэтому (3.27) имеет вид

$$N_k^* p_k \int_0^R m\,\xi_k^2\,dr = \int_0^R m v_0\,\xi_k\,dr.$$

Из этого соотношения можно найти коэффициенты $N_k{}^*$, если известна функция $v_0(r)$ — распределение скоростей по радиусу лопасти. Обычно в ряде (3.25) ограничиваются тремя-четырьмя слагаемыми. Далее, определив по формуле (3.25) y, можно найти y'' и по формуле (3.17) — напряжения в сечениях лопасти, т. е. решить поставленную задачу.

Распределение начальных скоростей $v_0(r)$ может быть найдено из следующих соображений. Поднятая вверх лопасть обладает потенциальной энергией (см. рис. 3.4)

$$\Pi = \int_0^R mg\,H\,dr = \int_0^R mgr\sin\beta_0\,dr = S_{\text{г.ш}}\sin\beta_0.$$

При падении эта энергия переходит в кинетическую, которая при касании лопастью упора равна:

$$T = I_{\text{г.ш}}\frac{\omega^2}{2},$$

где $I_{\text{г.ш}}$ — момент инерции лопасти относительно горизонтального оперения; ω — угловая скорость лопасти в момент касания упора.

Приравнивая выражения для энергий, получим

$$I_{\text{г.ш}}\frac{\omega^2}{2} = S_{\text{г.ш}}\sin\beta_0,$$

откуда и определяем ω и $v_0(r)=\omega r$.

Полученные в расчете напряжения должны быть меньше критических напряжений потери устойчивости стенок лонжерона и предела текучести его материала.

§ 3.6. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЛОПАСТИ В ПЛОСКОСТИ ВЗМАХА. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

В отличие от случая невращающейся лопасти уравнения движения при колебаниях в плоскости взмаха и в плоскости вращения для вращающейся лопасти (см. § 3.8) будут различными. Рассмотрим сначала колебания в плоскости взмаха. Сохраним при этом предположение § 3.1 о характеристиках лопасти и ее крепления. Угловую скорость винта ω будем считать постоянной.

Уравнение колебаний может быть получено из условий равновесия элемента лопасти (рис. 3.5). На элемент Δr действует нагрузка $w\Delta r$. По концам элемента приложены силы и моменты — реакции

соседних участков лопасти. Силы можно разложить на составляющие по осям Oy и Or (Q и N). Сила N представляет собой центробежную силу. Напишем сумму проекций всех сил на ось Oy (ось винта):

$$Q + \frac{\partial Q}{\partial r}\Delta r - Q + w\Delta r = 0,$$

откуда $$\frac{\partial Q}{\partial r} + w = 0. \qquad (3.28)$$

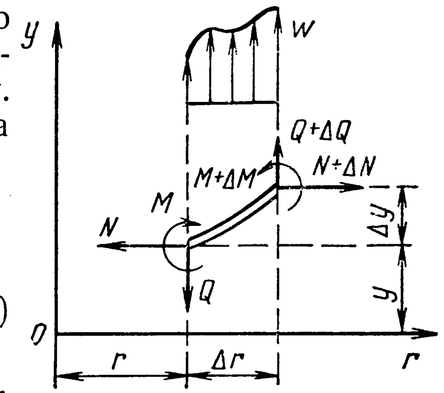


Рис. 3.5. Силы и моменты, действующие на элемент лопасти

Сумма моментов всех сил относительно левого конца элемента лопасти может быть записана в следующей форме:

$$M + \frac{\partial M}{\partial r}\Delta r - M - \left(N + \frac{\partial N}{\partial r}\Delta r\right)\frac{\partial y}{\partial r}\Delta r + \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial r}\Delta r\right)\Delta r +$$
$$+ w\Delta r\,\frac{\Delta r}{2} + \frac{\partial N}{\partial r}\Delta r\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial y}{\partial r}\Delta r = 0.$$

Сохранив только члены первого порядка малости, получим

$$\frac{\partial M}{\partial r}\Delta r - N\,\frac{\partial y}{\partial r}\Delta r + Q\Delta r = 0,$$

откуда $$\frac{\partial M}{\partial r} - N\,\frac{\partial y}{\partial r} + Q = 0.$$

Продифференцировав это уравнение по r, получим

$$M'' - (Ny')' + Q' = 0.$$

Подставив в это уравнение Q' из уравнения (3.28) и M из известного соотношения $M=EIy''$, получим уравнение движения упругой лопасти:

$$(EI\,y'')'' - (Ny')' = w. \qquad (3.29)$$

Погонная нагрузка w складывается из внешней (аэродинамической) и инерционной нагрузок:

$$w = T - m\ddot{y}. \qquad (3.30)$$

Так как мы рассматриваем свободные колебания лопасти, то $T=0$. Таким образом, уравнение свободных колебаний имеет вид

$$(EI\,y'')'' - (Ny')' + m\ddot{y} = 0. \qquad (3.31)$$

Если центробежная сила $N=0$, то уравнение (3.31) совпадает с уравнением колебаний невращающейся лопасти (3.1). Решение уравнения (3.31) ищем в форме (3.6).

При подстановке (3.6) в уравнение (3.31), последнее распадается на два:

$$\ddot{\delta}(t)+p^2\delta(t)=0; \tag{3.32}$$

$$[EI\,\xi''(r)]''-[N\,\xi'(r)]'-p^2 m\,\xi(r)=0. \tag{3.33}$$

Из уравнения (3.32), аналогичного (3.9), следует, что лопасть совершает гармонические колебания, описываемые выражением (3.10).

В настоящее время нет способа нахождения решения уравнения (3.33) в замкнутой форме. Поэтому необходимо применить один из приближенных численных методов. Воспользуемся методом Бубнова — Галеркина [23, 34], согласно которому решение ищется в виде ряда:

$$\xi=\sum C_i\,\zeta_i(r), \tag{3.34}$$

где C_i — постоянные, подлежащие определению; $\zeta_i(r)$ — заданные заранее функции радиуса r.

При выборе функций $\zeta_i(r)$ необходимо, чтобы каждая из них удовлетворяла всем граничным условиям, а совокупность функций ζ_i была бы полной. Других обязательных требований к функциям ζ_i не предъявляется. Их можно выбирать из различных соображений. Так, в качестве функций ζ_i могут быть взяты формы колебаний какой-либо ранее спроектированной лопасти, характеристики которой близки к рассчитываемой. Можно воспользоваться функциями Крылова (3.12). Как будет показано ниже, определенные возможности появляются при использовании в качестве функций ζ_i найденных ранее форм колебаний невращающейся лопасти. Вначале рассмотрим общий случай, когда функции ζ_i не обладают какими-либо специальными свойствами.

Следуя методу Бубнова — Галеркина, подставим ряд (3.34) в уравнение (3.33), умножим его на одну из функций ζ_k и проинтегрируем по радиусу лопасти. В результате получим следующее соотношение:

$$\sum_i C_i\int_0^R (EI\,\zeta_i'')''\,\zeta_k\,dr-\sum_i C_i\int_0^R (N\,\zeta_i')'\,\zeta_k\,dr-p^2\sum_i C_i\int_0^R m\zeta_i\,\zeta_k\,dr=0. \tag{3.35}$$

Введя обозначения

$$\int_0^R (EI\,\zeta_i'')''\,\zeta_k\,dr=c_{ik};$$

$$\int_0^R (N\,\zeta_i')'\,\zeta_k\,dr=b_{ik}; \tag{3.36}$$

$$\int_0^R m\,\zeta_i\,\zeta_k\,dr=m_{ik},$$

получим $\sum_i C_i\,(c_{ik}-b_{ik}-p^2 m_{ik})=0, \quad k=0,\ 1,\ldots$ (3.37)

Функции ζ_i известны, поэтому определенные интегралы (3.36) могут быть вычислены и, следовательно, представляют собой известные числа. Очевидно, что можно получить любое число соотношений типа (3.37), используя в качестве ζ_k каждую функцию, входящую в ряд (3.34). Таким образом, применение операций, предусмотренных методом Бубнова — Галеркина, позволило вместо дифференциального уравнения (3.33) получить систему алгебраических уравнений типа (3.37) относительно неизвестных пока коэффициентов C_i. Система состоит из бесконечного числа уравнений, так как ряд (3.34), вообще говоря, бесконечный. На практике обычно ограничиваются четырьмя-пятью членами ряда (3.34). Уравнения системы (3.37) являются однородными. Условием существования нетривиального решения является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta=\begin{vmatrix} c_{00}-b_{00}-p^2 m_{00} & c_{10}-b_{10}-p^2 m_{10}\ldots \\ c_{01}-b_{01}-p^2 m_{01} & c_{11}-b_{11}-p^2 m_{11}\ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{vmatrix}=0. \tag{3.38}$$

Характеристическое уравнение (3.38) представляет собой полином (относительно неизвестной величины p^2), степень которого равна m — числу членов ряда (3.34). Решая его, получим m корней. Корни являются действительными положительными числами. Таким образом определяются m значений собственных частот. Практически следует воспользоваться ЭЦВМ, тем более, что соответствующая программа входит обычно в состав стандартных программ. Каждому значению p_j соответствует своя форма колебаний. Ее можно найти с помощью системы алгебраических уравнений (3.37), помня при этом, что уравнения системы — однородные. Поэтому в системе (3.37) следует отбросить любое уравнение, а в оставшиеся подставить одно из значений p_j. Неизвестные коэффициенты C_0, $C_1,\ldots$ могут быть определены только с точностью до произвольного множителя, т. е. из системы (3.37) можно найти только соотношение между коэффициентами C_0, $C_1,\ldots$, например, отношения типа

$$\frac{C_1}{C_0}=\chi_1;\quad \frac{C_2}{C_0}=\chi_2;\ \ldots \tag{3.39}$$

Система (3.37) будет удовлетворяться при любых значениях C_0 и значениях C_1, C_2, ..., найденных из соотношений (3.39): $C_1=\chi_1 C_0$, $C_2=\chi_2 C_0$, ... Иными словами, форма колебаний

$$\xi_j=\sum_{i=0} C_i\,\zeta_i=C_0\left(\zeta_0+\sum_{i=0}\chi_i\,\zeta_i\right)$$

так же, как и в случае невращающейся лопасти (§ 3.2), может быть найдена с точностью до неопределенного множителя C_0, т. е. в произвольном масштабе. Подставляя в систему (3.37) (без одного из уравнений) по очереди каждое значение p_j, найдем группы значений $\chi_i^{(j)}$, соответствующие каждому данному значению p_j, т. е. для каждой собственной частоты свою форму.

В процессе решения мы искусственно оборвали ряд (3.34). Вследствие этого полученные значения p_j и $\xi_j(r)$ являются приближенными. Точность определения p_j и ξ_j зависит от выбора ζ_i и числа членов, сохраненных в ряде (3.34). С увеличением числа членов увеличивается точность расчета, но возрастает и объем вычислений. Возможности метода определяются возможностями ЭЦВМ (объемом памяти и скоростью счета).

При шарнирном креплении к втулке для вращающейся [как и для невращающейся (§ 3.3)] лопасти одна из форм соответствует нулевому тону колебаний, т. е. колебаний без изгиба:

$$\xi_0 = C_0 r. \tag{3.40}$$

В отличие от невращающейся лопасти частота таких колебаний не равна нулю, в чем можно убедиться, если подставить форму (3.40) в уравнение (3.33). Оно удовлетворяется при $p_0 = \omega$, т. е. частота нулевого тона равна угловой скорости вращения винта.

Рассмотренный метод пригоден и для расчета частот и форм колебаний невращающейся лопасти. Достаточно только во всех формулах положить $\omega = 0$.

§ 3.7. СВОЙСТВО ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ

Получим некоторые необходимые для дальнейших выводов соотношения. Предположим, что формы изгибных колебаний вращающейся лопасти известны. Подставим одну из них ξ_j в уравнение (3.33). Так как она является решением этого уравнения, то при $p = p_j$ уравнение удовлетворяется. Поэтому можно написать

$$(EI\,\xi_j'')'' - (N\xi_j')' - p_j^2 m\,\xi_j = 0.$$

Умножив это равенство на какую-либо другую форму ξ_k и проинтегрировав по радиусу лопасти, получим следующее соотношение:

$$\int_0^R (EI\,\xi_j'')''\,\xi_k\,dr - \int_0^R N(\xi_j')'\,\xi_k\,dr - p_j^2 \int_0^R m\,\xi_j\,\xi_k\,dr = 0. \tag{3.41}$$

Теперь подставим в (3.33) форму ξ_k и соответствующую ей частоту p_k, умножим это равенство на форму ξ_j и, проинтегрировав по радиусу, получим соотношение

$$\int_0^R (EI\,\xi_k'')''\,\xi_j\,dr - \int_0^R (N\xi_k')'\,\xi_j\,dr - p_k^2 \int_0^R m\,\xi_k\,\xi_j\,dr = 0, \tag{3.42}$$

отличающееся от предыдущего только взаимной заменой индексов j и k. Интеграл $\int_0^R (EI\,\xi_j'')''\,\xi_k\,dr$ преобразуем двукратным интегрированием по частям, учитывая при этом граничные условия:

$$\int_0^R (EI\,\xi_j'')''\,\xi_k\,dr = (EI\,\xi_j'')'\,\xi_k\Big|_0^R - \int_0^R (EI\,\xi_j'')'\,\xi_k'\,dr = -\int_0^R (EI\,\xi_j'')'\,\xi_k'\,dr =$$

$$= -(EI\,\xi_j'')'\Big|_0^R + \int_0^R EI\,\xi_j''\,\xi_k\,dr = \int_0^R EI\,\xi_i''\,\xi_k''\,dr. \tag{3.43}$$

Аналогично интеграл $\int_0^R (N\xi_j')'\,\xi_k\,dr$ путем интегрирования по частям и с учетом граничных условий может быть преобразован к виду

$$\int_0^R (N\xi_j')'\,\xi_k\,dr = -\int_0^R N\xi_j'\,\xi_k'\,dr. \tag{3.44}$$

Из соотношения (3.43) следует, что первые слагаемые в уравнениях (3.41) и (3.42) одинаковы. Аналогично, из соотношения (3.44) следует, что вторые слагаемые в этих уравнениях также одинаковы. Поэтому вычитая (3.41) из (3.42), получим

$$p_j^2 \int_0^R m\,\xi_k\,\xi_j\,dr - p_k^2 \int_0^R m\,\xi_k\,\xi_j\,dr = 0.$$

Из этого выражения видно, что при $j \neq k$ и $p_j \neq p_k$ должно выполняться такое условие:

$$\int_0^R m\,\xi_k\,\xi_j\,dr = 0; \quad j \neq k. \tag{3.45}$$

Таким образом, формы собственных колебаний удовлетворяют условию (3.45). Это свойство форм называется свойством ортогональности собственных форм, а условие (3.45) — условием ортогональности.

Из (3.41) — (3.45) также следует, что

$$\int_0^R EI\,\xi_j''\,\xi_k''\,dr + \int_0^R N\xi_j'\,\xi_k'\,dr = 0; \quad j \neq k, \tag{3.46}$$

т. е. производные от форм колебаний тоже удовлетворяют определенному условию.

§ 3.8. ФОРМУЛА ДЛЯ УЧЕТА ВЛИЯНИЯ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ

Вернемся теперь к решению задачи о колебаниях методом Галеркина. Пусть функции ζ_i, входящие в ряд (3.34), представляют собой формы колебаний вращающейся лопасти. Из соотношений (3.45) и (3.46) следует, что интегралы, обозначенные ранее m_{ik}, b_{ik} и c_{ik} [см. (3.36)] и входящие в систему уравнений (3.37), при

таком выборе функций ($\zeta_i=\xi_i$) и при неодинаковых индексах i и k обладают следующими свойствами:

$$m_{ik}=\int_0^R m\,\xi_i\,\xi_k\,dr=0;$$

$$c_{ik}-b_{ik}=\int_0^R EI\,\xi_i''\,\xi_k''\,dr+\int_0^R N\,\xi_i'\,\xi_k'\,dr=0.$$

Поэтому в определителе (3.38) все члены, кроме расположенных по главной диагонали, обращаются в нуль. Следовательно, характеристическое уравнение приобретает форму

$$(c_{00}-b_{00}-p^2 m_{00})(c_{11}-b_{11}-p^2 m_{11})\ldots=0$$

и распадается на отдельные уравнения вида:

$$c_{jj}-b_{jj}-p^2 m_{jj}=0. \quad j=0,\ 1,\ldots$$

Коэффициент b_{jj} удобно преобразовать с учетом выражения для центробежной силы $N=\int_r^R m\,\omega^2 r\,dr=\omega^2\int_r^R mr\,dr=\omega^2 S_r$ к виду

$$b_{jj}=\int_0^R (N\,\xi_j')\,\xi_j\,dr=-\int_0^R N\,(\xi_j')^2\,dr=\omega^2\int_0^R S_r\,(\xi_j')^2\,dr=-\omega^2 b_{jj}^*.$$

Таким образом, можно получить следующую формулу для собственных частот вращающейся лопасти:

$$p_j^2=\frac{c_{jj}}{m_{jj}}+\omega^2\frac{b_{jj}^*}{m_{jj}}. \tag{3.47}$$

Здесь коэффициенты

$$m_{jj}=\int_0^R m\xi_j^2 dr;\quad b_{jj}^*=\int_0^R S_r\,(\xi_j')^2 dr;$$

$$c_{jj}=\int_0^R EI\,(\xi_j'')^2 dr$$

должны быть вычислены для форм колебаний вращающейся лопасти. Однако, как показывают расчеты, значения коэффициентов m_{jj}, b_{jj}^* и c_{jj} мало меняются, если вместо форм $\xi_{j\,\text{вр}}$ колебаний вращающейся лопасти в соответствующие интегралы подставить формы собственных колебаний невращающейся лопасти, т. е. приближенно имеем

$$m_{jj}=\int_0^R m\,(\xi_{j\text{вр}})^2 dr\approx\int_0^R m\,(\xi_{j\text{нв}})^2 dr=m_j;$$

$$b_{jj}^*=\int_0^R S_r\,(\xi_{j\text{вр}}')^2 dr\approx\int_0^R S_r\,(\xi_{j\text{нв}}')^2 dr=b_j^*;$$

$$c_{jj}=\int_0^R EI\,(\xi_{j\text{вр}}'')^2 dr\approx\int_0^R EI\,(\xi_{j\text{нв}}'')^2 dr=c_j.$$

Если $\omega=0$, т. е. винт не вращается, то $p_j^2=c_j/m_j=p_{j\text{нв}}^2$. Таким образом, получим приближенную формулу

$$p_j^2=p_{j\text{нв}}^2+k_j\omega^2, \tag{3.48}$$

где $p_{j\,\text{нв}}$ — собственная частота невращающейся лопасти, $k_j=b_j^*/m_j$. Эта формула хорошо отражает действительность и вполне пригодна для расчетов значений собственных частот вращающейся лопасти.

Из (3.48) видно, что с увеличением частоты вращения винта собственные частоты изгибных колебаний лопасти увеличиваются. Физически это объясняется действием увеличивающейся центробежной силы, которая стремится распрямить лопасть, т. е. как бы увеличивает ее жесткость на изгиб.

§ 3.9. ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПЛОСКОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Вывод уравнения колебаний лопасти в плоскости вращения осуществляется так же, как и для колебаний в плоскости взмаха. Различие состоит в том, что нагрузка w подставляется в (3.29) в соответствии с выражением

$$w=Q_a-m\ddot{x}+\omega^2 mx, \tag{3.49}$$

где $m\ddot{x}$ — инерционные погонные силы от перемещений элемента по оси Ox; Q_a — аэродинамическая нагрузка в плоскости вращения.

По форме выражение (3.49) отличается от (3.30) наличием члена $\omega^2 mx$. На элемент лопасти Δr действует центробежная сила $m\Delta r\omega^2 r''$. Проекция этой силы на ось Oy, параллельную оси винта (рис. 3.6, *а*), равна нулю, поэтому в выражении (3.30) члена, соответствующего центробежной силе, нет. Проекция на ось Ox, лежащую в плоскости вращения, равна (рис. 3.6, *б*): $m\Delta r\omega^2 r'\frac{x}{r'}=$ $=m\omega^2 x\Delta r$. Этот член (при $\Delta r=1$) и входит в формулу (3.49). Следовательно, уравнение свободных колебаний имеет вид

$$(EI_y x'')''-(Nx')'-\omega^2 mx+m\ddot{x}=0. \tag{3.50}$$

Как и при рассмотрении уравнения колебаний в плоскости взмаха, решение этого уравнения будем искать в форме (3.6): $x=$ $=\xi_x(r)\,\delta(t)$. При этом уравнение (3.50) распадается на два, одно из которых имеет вид (3.32), а другое:

$$[EI_y\xi_x''(r)]''-[N\xi_x'(r)]'-\omega^2 m\xi_x(r)-p^2 m\xi_x(r)=0. \tag{3.51}$$

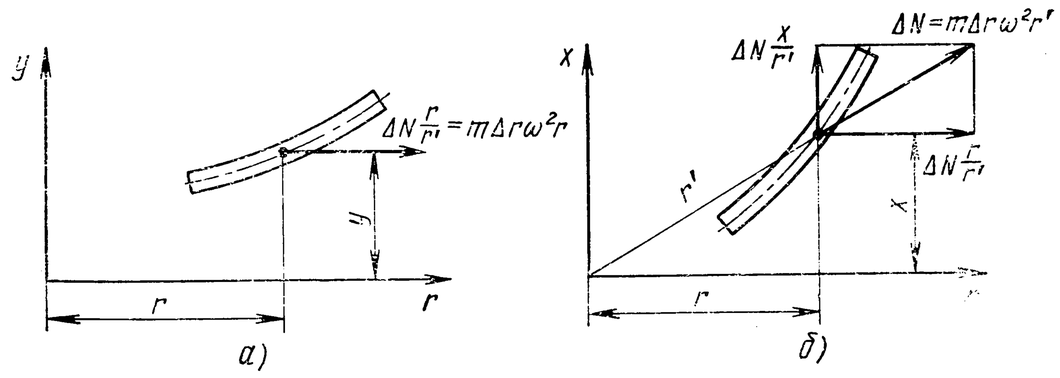


Рис. 3.6. Центробежная сила, действующая на элемент лопасти:
а — вид в плоскости взмаха; *б* — вид в плоскости вращения

Следовательно, как и в плоскости взмаха, колебания будут происходить по гармоническому закону. Введем новый параметр:

$$p^{*2}=p^2+\omega^2. \qquad (3.52)$$

Уравнение (3.51) примет вид

$$(EI_y\xi'')''-(N\xi')'-p^{*2}m\xi=0. \qquad (3.53)$$

Уравнение (3.53) по форме не отличается от рассмотренного ранее уравнения колебаний в плоскости взмаха. Поэтому все изложенное выше относится и к колебаниям в плоскости вращения. Так, например, решение уравнения (3.53) может быть найдено методом Галеркина. Кроме того, может быть получена приближенная формула

$$p_j^{*2}=p_{j\text{нв}}^2+k_j\omega^2.$$

Она отличается от формулы (3.48) тем, что параметр p^* не является собственной частотой. Для того чтобы получить выражение для собственной частоты, надо воспользоваться формулой (3.52), из которой следует

$$p^2=p^{*2}-\omega^2. \qquad (3.54)$$

Тогда $p_j^2=p_{j\text{нв}}^2+(k_j-1)\omega^2$. (3.55)

Эта формула отличается от (3.48) меньшим на единицу коэффициентом во втором слагаемом. Поэтому с увеличением частоты вращения винта собственная частота колебаний в плоскости вращения растет медленнее, чем в плоскости взмаха. Коэффициенты k_j в формулах (3.48) и (3.55) также могут несколько отличаться из-за того, что формы колебаний в плоскости взмаха и в плоскости вращения могут быть различными в зависимости от разного распределения по радиусу жесткостей EI_y и EI_x.

§ 3.10. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Возможен и иной подход к решению рассматриваемой задачи, основанный на представлении лопасти в виде некоторого числа конечных элементов [23]. Разделим лопасть на 25—30 участков (рис. 3.7). Длины участков l_i могут быть при этом неодинаковыми. Будем считать, что на каждом участке жесткость не меняется по его длине — $EI_i=\text{const}$. Распределенную по длине участка массу заменим двумя равными по величине сосредоточенными массами, расположенными на концах участка: $m_{i\text{л}}=\frac{1}{2}\int\limits_{l_i} m\,dr$, $m_{i\text{п}}=\frac{1}{2}\int\limits_{l_i}\times$ $\times m\,dr$. Следовательно, на границе участков $i-1$ и i будет расположена масса $m_i=m_{i-1\,\text{п}}+m_{i\,\text{л}}$. Таким образом, центробежная сила на каждом участке по длине его не меняется, а на границе двух соседних участков происходит ее скачкообразное изменение на величину $m_i\omega^2 r_j$. Также скачкообразно на величину $-m_i\ddot{y}_i$ меняется сила Q_i — инерционная сила, возникающая при движении масс m_i в направлении оси Oy.

Рассмотрим деформации одного из участков. Для этого можно воспользоваться выведенным ранее уравнением (3.31). Вследствие того, что на длине участка инерционные поперечные силы отсутствуют и центробежная сила постоянна, уравнение (3.31) приобретает вид

$$(EIy'')''-N_y''=0,$$

или, так как $EIy''=M$ и $y''=M/(EI)$, то

$$M''-\mu_i^2M=0,$$

где $\mu_i^2=N_i/(EI_i)$ — постоянная величина.

Решение этого уравнения имеет вид

$$M=A\,\text{sh}\,\mu_i x+B\,\text{ch}\,\mu_i x.$$

Коэффициенты A и B определяются из граничных условий (рис. 3.8): при $x=0$ $M=M_\text{л}$; при $x=l_i$ $M=M_\text{п}$, где $M_\text{л}$ — момент на

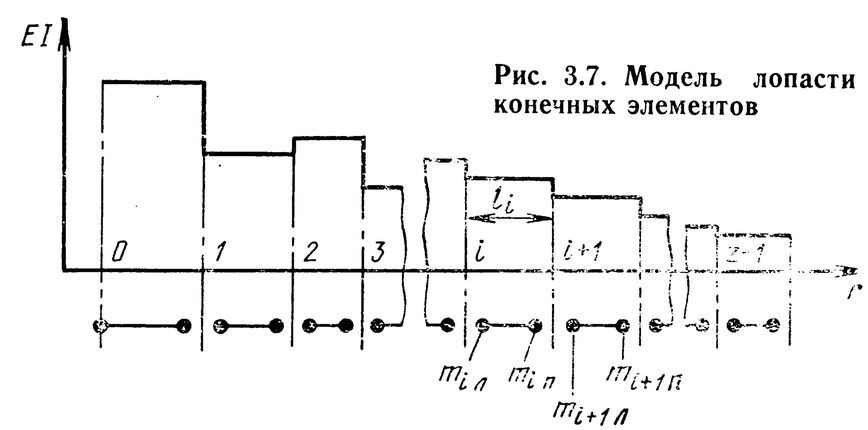


Рис. 3.7. Модель лопасти в методе конечных элементов

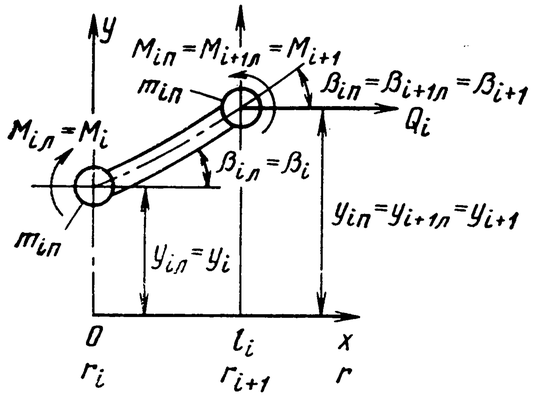


Рис. 3.8. Конечный элемент лопасти

левом, а $M_п$ — момент на правом конце участка. Отсюда

$$A=\frac{M_п}{\operatorname{sh}\mu_i l_i}-\frac{M_л}{\operatorname{th}\mu_i l_i};$$

$$B=M_л.$$

Следовательно,

$$M=EIy''=\left(\frac{M_п}{\operatorname{sh}\mu_i l_i}-\frac{M_л}{\operatorname{th}\mu_i l_i}\right)\times$$
$$\times\operatorname{sh}\mu_i x+M_л\operatorname{ch}\mu_i x.$$

Проинтегрировав дважды это уравнение, получим

$$y=\frac{1}{\mu_i N_i}\left[\left(\frac{M_п}{\operatorname{sh}\mu_i l_i}-\frac{M_л}{\operatorname{th}\mu_i l_i}\right)\operatorname{sh}\mu_i x+M_л\operatorname{ch}\mu_i x\right]+$$
$$+\beta^* x+y^*.$$

Постоянные интегрирования β^* и y^* можно определить, полагая, что на левом конце участка (см. рис. 3.8) $x=0$, $\beta=\beta_{i\,л}$, $y=y_{i\,л}$ или на правом конце $x=l_i$, $\beta=\beta_{i\,п}$, $y=y_{i\,п}$. Используя те или другие соотношения, получим уравнение деформаций в форме

$$b_i(y_{i+1}-y_i)=d_iM_{i+1}+e_iM_i+\beta_i \tag{3.56}$$

или в форме $b_i(y_{i+1}-y_i)=-e_iM_{i+1}-d_iM_i+\beta_{i+1}$, (3.57)

где $b_i=\frac{1}{l_i}$; $d_i=m_i\left(1-\frac{\mu_i l_i}{\operatorname{sh}\mu_i l_i}\right)$; $e_i=m_i\left(\frac{\mu_i l_i}{\operatorname{th}\mu_i l_i}-1\right)$,

а для y, β и M индексы взяты в соответствии с рис. 3.7 и 3.8.

Среди других, пока неизвестных величин в выражения (3.56) и (3.57) входят углы поворота концов участка $\beta_i=\beta_{i\,л}$ и $\beta_{i+1}=\beta_{i\,п}$. Чтобы исключить их, можно воспользоваться тем, что для двух соседних участков углы поворота в разделяющем их сечении одинаковы, так как лопасть на самом деле не разрезана, т. е. $\beta_{i\,п}=\beta_{i+1\,л}$. Для этого используем уравнение для участка i в форме (3.57), а для следующего участка $i+1$ запишем уравнение в форме (3.56):

$$b_{i+1}(y_{i+2}-y_{i+1})=d_{i+1}M_{i+2}+e_{i+1}M_{i+1}+\beta_{i+1},$$

т. е. так, чтобы в них входило одно и то же значение $\beta=\beta_{i+1}$. Чтобы исключить β_{i+1}, вычтем из второго уравнения первое и получим

$$b_iy_i+a_{i+1}y_{i+1}+b_{i+1}y_{i+2}=d_iM_i+c_{i+1}M_{i+1}+d_{i+1}M_{i+1}, \tag{3.58}$$

где $a_{i+1}=-b_{i-1}-b_i$; $c_i=e_{i-1}+e_i$.

Запишем теперь уравнение моментов относительно левого конца участка (см. рис. 3.8):

$$M_{i+1}-M_i-N_i(y_{i+1}-y_i)+Q_il_i=0.$$

Это уравнение удобно преобразовать, разделив его на l_iN_i и перенеся члены с M и Q в правую часть:

$$b_i(y_i-y_{i+1})=\frac{1}{l_iN_i}M_i-\frac{1}{l_iN_i}M_{i+1}-\frac{Q_i}{N_i}. \tag{3.59}$$

Такое же уравнение можно записать и для соседнего $i+1$ участка:

$$b_{i+1}(y_{i+1}-y_{i+2})=\frac{1}{l_{i+1}N_{i+1}}M_{i+1}-\frac{1}{l_{i+1}N_{i+1}}M_{i+2}-\frac{Q_{i+1}}{N_{i+1}}. \tag{3.60}$$

Сложим уравнения (3.59) и (3.60) для двух соседних участков, в результате получим

$$b_iy_i+a_{i+1}y_{i+1}+b_{i+1}y_{i+2}=m_i^*M_i+n_{i+1}M_{i+1}+m_{i+1}^*M_{i+2}+$$
$$+\frac{Q_{i+1}}{N_{i+1}}-\frac{Q_i}{N_i}, \tag{3.61}$$

где $m_i^*=\frac{1}{l_iN_i}$; $n_i=-m_{i-1}^*-m_i^*$; $Q_i=$

$$=-\sum_{k=i+1}^{k=z}m_k\dot{y}_k;\quad N_i=\omega^2\sum_{k=i+1}^{k=z}m_kr_k.$$

Левая часть этого уравнения содержит неизвестные перемещения y_i, y_{i+1}, y_{i+2}. Возвращаясь к полученным выше уравнениям типа (3.58), можно видеть, что левые части уравнений (3.58) и (3.61) одинаковы. Поэтому из уравнения (3.61) можно исключить перемещения y_i, y_{i+1} и y_{i+2} и получить уравнение моментов в окончательной форме:

$$h_iM_i+g_{i+1}M_{i+1}+h_{i+1}M_{i+2}=\frac{Q_{i+1}}{N_{i+1}}-\frac{Q_i}{N_i}. \tag{3.62}$$

Здесь $h_i=d_i-m_i^*$; $g_i=c_i-n_i$.

Таким образом, проведенные выкладки позволили составить две системы уравнений: типа (3.58) и типа (3.62). Рассмотрим теперь способ решения этих двух систем уравнений. Из предыдущего известно (см. § 3.1), что частное решение, соответствующее одной из форм колебаний, имеет вид

$$y=\bar{y}(r)\sin pt. \tag{3.63}$$

Соответственно законы изменения изгибающего момента и углов поворота сечений по времени при колебаниях лопасти по одному тону могут быть записаны в виде

$$M=\bar{M}(r)\sin pt; \tag{3.64}$$

$$\beta=\bar{\beta}(r)\sin pt. \tag{3.65}$$

Если выражения (3.63) — (3.65) подставить в системы уравнений (3.58) и (3.62) и полученные выражения разделить на $\sin pt$, то получатся системы уравнений, имеющие вид

$$b_i\bar{y}_i+a_{i+1}\bar{y}_{i+1}+b_{i+1}\bar{y}_{i+2}=d_i\bar{M}_i+c_{i+1}\bar{M}_{i+1}+d_i\bar{M}_{i+2}; \quad (3.66)$$

$$h_i\bar{M}_i+g_{i+1}\bar{M}_{i+1}+h_{i+1}\bar{M}_{i+2}=-p^2\left(\frac{\bar{Q}_{i+1}}{N_{i+1}}-\frac{\bar{Q}_i}{N_i}\right), \quad (3.67)$$

где

$$\bar{Q}_{i+1}=-\sum_{k=1+2}^{k=z} m_k\bar{y}_k;\ \bar{Q}_i=-\sum_{k=i+1}^{k=z} m_k\bar{y}_k. \quad (3.68)$$

Уравнений (3.66) и (3.67) недостаточно, так как общее число уравнений $2z-2$, а число неизвестных $\bar{M}_i$ и $\bar{y}_i$ составляет $2z+2$. Поэтому в системы уравнений включим уравнения типа (3.56), (3.57) и (3.59) для крайних участков — первого ($i=0$) и последнего ($i=z-1$) — и граничные условия, например, для шарнирного крепления $y_0=0$, $M_0=0$, $M_z=0$, для жесткого крепления $y_0=0$, $\beta_0=0$, $M_z=0$. Решение этих систем, т. е. определение собственной частоты и амплитуд колебаний концов участков $\bar{y}_i$, а следовательно, формы колебаний, находится посредством последовательных приближений в порядке, аналогичном изложенному в § 3.4. Задаемся значениями перемещений концов участков $\bar{y}_i^{(n)}$ и полагаем $p=1$. Решая систему уравнений (3.67) с учетом (3.68), находим амплитуды изгибающих моментов на концах участков $\bar{M}_i$. По найденным значениям $\bar{M}_i$ из другой системы уравнений (3.66) находим новые значения перемещений $\bar{y}_i^{(n+1)}$, которые используем в качестве исходных для нового шага приближений и т. д. Собственная частота определяется из соотношения

$$p_2^{(n)}=\bar{y}_i^{(n)}/\bar{y}_i^{(n+1)}. \quad (3.69)$$

Расчет прекращается, когда значения p, полученные в результате двух последовательных приближений, различаются на величину, меньшую заданной.

Системы (3.66) и (3.67) содержат много уравнений. Для решения их необходимо избрать подходящий путь. Не останавливаясь на подробном описании, отметим, что он сходится к низшему тону. Поэтому при определении частот и форм высших тонов на каждом шаге последовательных приближений необходимо производить ортогонализацию полученных приближенных значений амплитуд $\bar{y}_i$ так, как это было описано в § 3.4.

Метод может быть использован для расчетов лопастей с шарнирным или жестким креплением к втулке (как вращающихся, так и невращающихся) при колебаниях в плоскости взмаха или в плоскости вращения. В последнем случае необходимо учесть, что в результате расчета по формуле (3.69) будут получены не частоты p, а промежуточные величины, обозначенные в § 3.8 как p^*. Собственные частоты определяются по формуле (3.54).

§ 3.11. ВОЗМОЖНОСТИ РАССМОТРЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАСТЕЙ

Методам расчета изгибных колебаний балок посвящена обширная литература ([3, 9, 11, 34, 42 ,45] и др.). В § 3.2, 3.4, 3.6, 3.8 и 3.10 были описаны методы, применяемые обычно при проектировании лопастей. Оценим возможности этих методов на основании теоретических предпосылок с учетом положенных в основу каждого из них допущений и опыта применения на практике.

Метод, основанный на применении функций Крылова, пригоден только для невращающейся лопасти с постоянными по радиусу погонной массой и жесткостью. Его достоинства — возможность быстрого получения простых формул для определения частот и форм, наглядность, наличие готовых решений (например [2, 3, 42]). Так как лопасти с постоянными по радиусу погонными массами и жидкостями на практике не встречаются, то этот метод для точных количественных расчетов не применяется, но используется для получения качественных выводов. Он полезен также для приближенных расчетов колебаний других часто встречающихся в инженерной практике конструкций, которые схематично можно представить балочной моделью.

Метод последовательных приближений на основе интегрального соотношения (3.18) пригоден только для расчета невращающейся лопасти. Результаты расчетов могут быть использованы в качестве исходных при определении частот и форм вращающейся лопасти методом Галеркина.

Способ определения частот и форм колебаний с помощью метода Галеркина часто применяется на практике. Он позволяет получить все необходимые данные. Удобно пользоваться этим методом в случаях сравнительного расчета нескольких конструктивных вариантов лопастей с небольшими отклонениями параметров. Формула (3.48), полученная на основе метода Галеркина, дает возможность получить значение частот с практически достаточной точностью [23]. Формы колебаний вращающейся и невращающейся лопасти могут (см. [23]) заметно отличаться, особенно в случае жесткой заделки лопасти. Поэтому если задача состоит в нахождении собственных форм для последующего расчета вынужденных колебаний, то допущение о совпадении форм вращающейся и невращающейся лопасти неприемлемо. Метод Галеркина позволит найти формы вращающейся лопасти. Однако для лопастей с резкими переходами жесткости и наличием сосредоточенных масс результаты расчета могут оказаться ненадежными. Отсутствуют критерии, позволяющие судить о достаточности выбранного числа членов ряда (3.34), используемого в методе Галеркина. В этом отношении несомненным преимуществом обладает метод конечных элементов, предложенный

и разработанный А. В. Некрасовым [23]. Он является универсальным методом, позволяющим определить частоты и формы собственных колебаний любых незакрученных лопастей с необходимой степенью точности. Так как влиянием геометрической крутки, если она не превышает $\Delta\varphi = 10...15°$, можно пренебречь (§ 4.2), а большая крутка при проектировании лопастей не допускается, как нецелесообразная, метод Некрасова позволяет определять частоты и формы собственных колебаний всех встречающихся в практике лопастей несущих винтов. Поэтому он и получил широкое распространение на практике.

глава 4 РЕЗОНАНСНЫЕ ДИАГРАММЫ. СЛОЖНЫЕ ВИДЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

§ 4.1. РЕЗОНАНСНЫЕ ДИАГРАММЫ

Для практических целей обычно достаточно определить частоты первого, второго и третьего тонов в плоскости взмаха и двух низших тонов в плоскости вращения. Результаты расчетов позволяют построить так называемую резонансную диаграмму лопасти (рис. 4.1). По оси абсцисс отложена частота вращения несущего винта n, а по оси ординат — значения частот собственных колебаний f. Заметим, что частота f отличается от рассматривавшейся раньше круговой частоты p. Круговая частота аналогична угловой скорости и измеряется в радианах в секунду. Частота же f — число колебаний в единицу времени. Значения f пропорциональны p.

Главное практическое значение резонансных диаграмм состоит в возможности с их помощью оценить качество конструкции лопасти с точки зрения уровня переменных напряжений в них, а следовательно, и ресурса. Для этой цели кроме указанных выше кривых собственных частот

$$f_{cj} = f_j(n) \tag{4.1}$$

на графике проводятся прямые

$$f_{вi} = in, \quad i = 1,2,... \tag{4.2}$$

зависимости частоты гармоники аэродинамической нагрузки $f_{в\,i}$ от частоты вращения винта. Действительно, на установившемся режиме полета аэродинамическая нагрузка в сечении лопасти меняется по некоторому периодическому закону. Это дает возможность представить ее в виде тригонометрического ряда — суммы гармоник:

$$w = w^{(0)} + \sum w^{(ic)} \cos i\omega t + \sum w^{(is)} \sin i\omega t.$$

В этом выражении $w^{(0)}$ — величина постоянной составляющей нагрузки, $w^{(ic)}$ и $w^{(is)}$ — амплитуды гармоник нагрузки. Круговая частота первой гармоники, очевидно, будет ω, а соответствующая частота $f_{в\,1}$ равна частоте вращения винта n. Круговая частота второй гармоники 2ω, а соответствующая частота $f_{в\,2} = 2n$ и т. д. Таким образом частоты $f_{в\,1}$, $f_{в\,2}$ ... пропорциональны частоте вращения винта, откуда и следует формула (4.2).

Точки пересечения кривых (4.1) — собственных частот и прямых (4.2) — частот гармоник аэродинамической нагрузки соответствуют условию $f_{c\,j} = f_{в\,i}$, т. е. условию равенства частоты одной из гармоник возбуждающей силы одной из собственных частот, а следовательно,— резонансу. При этом даже при небольшой амплитуде данной гармоники аэродинамической нагрузки в лопасти, как правило,

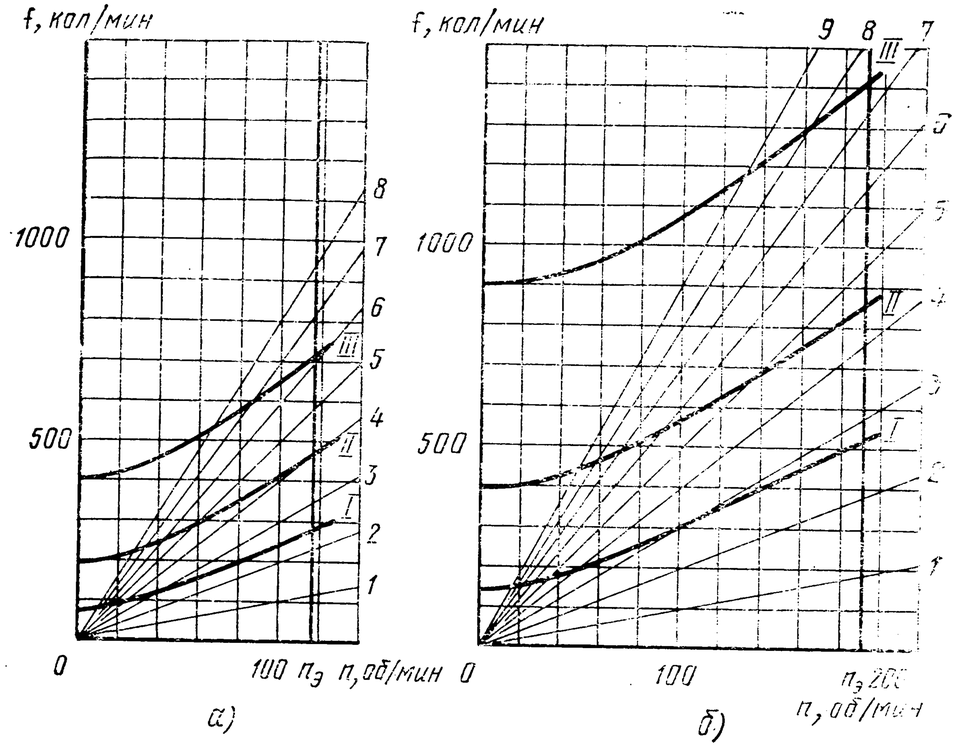


Рис. 4.1. Резонансные диаграммы лопастей:

а — в плоскости наименьшей жесткости; *б* — в плоскости наибольшей жесткости; *1—9* — номера гармоник; *I—III* — номера тонов

возникают большие по величине переменные напряжения. Для оценки влияния резонанса на ресурс необходимо, однако, обратить внимание на частоту вращения винта, при которой имеет место пересечение кривых (4.1) и (4.2). Для каждого вертолета устанавливаются предельные значения частот вращения винта, допустимые в полете: $n_{э\,min}$ и $n_{э\,max}$. При частоте вращения меньше $n_{э\,min}$ винт работает только кратковременно: при раскрутке и при остановке, и эти режимы работы составляют лишь незначительную долю общего срока службы. Поэтому резонансные точки, расположенные вне зоны полезных частот вращения, практического значения не имеют. Если же резонанс возникает в зоне рабочих частот вращения винта в полете или достаточно близко от нее, то увеличение напряжений из-за резонанса неизбежно скажется на ресурсе лопастей. Как показывает опыт, такие лопасти имеют неприемлемо низкий ресурс.

На рис. 4.1, *а* показана резонансная диаграмма для лопасти, спроектированной без учета требований по устранению резонанса в рабочем диапазоне частоты вращения винта. Кривая частоты второго тона собственных изгибных колебаний пересекается с прямой, соответствующей четвертой гармонике нагрузки, в диапазоне рабочих частот вращения винта. Поэтому в лонжероне лопасти возникали большие переменные напряжения с частотой около 8 Гц. Ресурс этой лопасти был равен всего 150 ч. На рис. 4.1, *б* показан другой пример. Для этой лопасти точки пересечения кривых собственных частот и прямых частот гармоник нагрузки достаточно

удалены от диапазона рабочих частот вращения винта в полете, а при $n = n_э$ частоты $f_с$ и $f_в$ заметно отличаются. Резонансных колебаний в полете поэтому нет. Лопасть имеет большой ресурс (3000 ч).

Величина ресурса определяется комплексом различных факторов (см. гл. 1). Поэтому исключение резонансов в диапазоне рабочих частот вращения винта нельзя рассматривать как достаточное условие получения большого ресурса. Однако оно является, несомненно, необходимым условием. Наличие резонанса может вызвать также повышенные вибрации фюзеляжа, большие переменные напряжения во многих агрегатах вертолета (см. гл. 11). Поэтому при проектировании лопастей необходимо обеспечить отсутствие резонансов в диапазоне рабочих частот вращения винта. Значения собственных частот зависят от массовых и жесткостных характеристик лопасти, изменяя которые конструктор может влиять на резонансную диаграмму. Практически возможности конструктора в известной мере ограничены. Так, например, простое увеличение площади лонжерона приведет к увеличению жесткости, но при этом возрастет и погонная масса, а, следовательно, собственные частоты увеличатся в меньшей мере. Если отношение EI/m останется при этом неизменным, то, как это прямо следует из формул (3.14) и (3.48), для лопасти с постоянными по радиусу погонной массой и жесткостью собственные частоты вообще не изменятся. При одной и той же погонной массе лонжерона можно получить различные значения жесткости EI, соответствующим образом располагая материал в сечении. Однако высота лонжерона ограничена профилем лопасти, выбираемым из соображений, связанных с обеспечением приемлемых аэродинамических характеристик. Поэтому возможности разнесения материала от нейтральной оси оказываются ограниченными.

Возможности разнесения материала вдоль хорды для увеличения жесткости в плоскости вращения также ограничены, так как чрезмерное смещение материала назад по хорде может привести к недопустимому по соображениям безопасности от флаттера (см. гл. 7) сдвигу назад центровки лопасти. Кроме того, увеличение ширины лонжерона может привести к увеличению уровня переменных напряжений. С другой стороны, жесткости лопасти не могут быть существенно уменьшены. Действительно, при малой жесткости в плоскости взмаха прогиб лопасти под действием веса при невращающемся винте будет слишком большим, что вызовет существенные трудности при компоновке вертолета. При снижении жесткости лонжерона в плоскости вращения путем уменьшения его ширины одновременно уменьшается и его крутильная жесткость, что допустимо только до известных пределов. Вес лопасти также ограничен. Увеличение веса ведет к снижению весовой отдачи вертолета, а чрезмерное уменьшение — к увеличению уровня переменных напряжений (см. гл. 6).

Однако из изложенного ни в коей мере не следует, что конструктор лишен возможности создать лопасти без резонансов в диапазо-

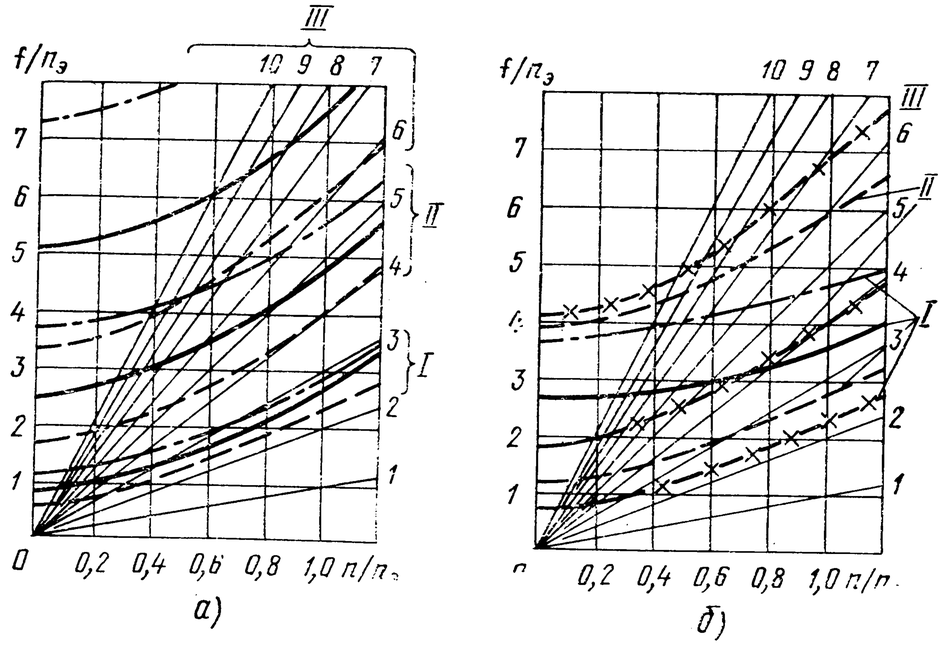


Рис. 4.2. Резонансные диаграммы лопастей:

а — для плоскости взмаха; *б* — для плоскости вращения; *1—10* — номера гармоник; *I—III* — номера тонов; —×— очень малая жесткость; — — — — малая жесткость; ——— средняя жесткость; —•— большая жесткость

не рабочих частот вращения. Наоборот, это всегда может быть достигнуто при грамотном проектировании, с проработкой нескольких различных вариантов конструкции на основе комплекса расчетов, в состав которого обязательно входит определение частот и форм собственных колебаний.

Для того чтобы ознакомиться с резонансными диаграммами лопастей, встречающимися на практике, удобно несколько преобразовать эти диаграммы. Для этого выберем какое-либо характерное значение частоты вращения винта в диапазоне рабочих частот вращения в полете $n_э$ и построим резонансные диаграммы в относительных координатах $n/n_э$ и $f/n_э$. На рис. 4.2, *а* приведена такая диаграмма для изгибных колебаний в плоскости взмаха лопастей различных типов. Из диаграммы видно, что особенности конструкции мало влияют на относительную частоту $f_{c\,1}/n_э$ первого тона изгибных колебаний в плоскости взмаха. Частоты второго и третьего тонов существенно различаются для лопастей различных типов. Наименьшие значения частот получаются обычно для лопастей с малой жесткостью — с трубчатым лонжероном (рис. 4.3, *б*). Лопасти такого типа обычно характеризуются высоким уровнем напряжений.

Для лопасти (рис. 4.3, *а*) с контурным (вписанным в профиль) лонжероном (лопасть средней жесткости на рис. 4.2, *а*) могут быть получены заметно более высокие значения собственных частот. Действительно, для таких лопастей доля погонной массы сечения, соответствующая не работающим на изгиб элементам конструкции, меньше, чем для лопастей с трубчатым лонжероном, при котором

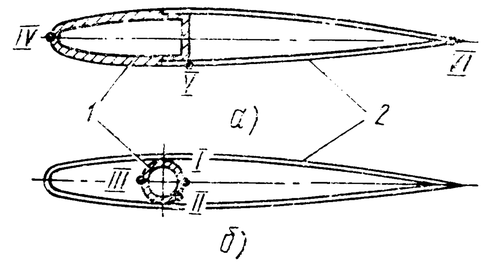


Рис. 4.3. Сечения лопастей различных типов:

а — профилированный лонжерон; *б* — трубчатый лонжерон; *1* — лонжерон; *2* — обшивка; *I—IV* — характерные точки

увеличиваются затраты материала на создание контура профиля. Материал, используемый для создания изгибной жесткости у контурного лонжерона, располагается рациональнее — в значительной своей части (см. рис. 4.3) дальше от нейтральных осей, чем у трубчатого лонжерона. Оба эти фактора позволяют получить большие отношения EI/m в сечениях лопасти, а следовательно, и более высокие собственные частоты. Лопасти с контурным лонжероном относительно просто спроектировать так, чтобы избежать резонансов в диапазоне рабочих частот вращения винта (см. рис. 4.1, *б*). Поэтому обычно они имеют большой ресурс.

Лопасти с большой жесткостью — лопасти небольших вертолетов, у которых относительный вес несущего винта невелик, что и дает возможность пойти на значительное увеличение веса лонжерона. При этом получаются хорошие по своим резонансным характеристикам лопасти с большим ресурсом.

Резонансные диаграммы для плоскости вращения (см. рис. 4.2, *б*), отличаются от диаграмм для плоскости взмаха большей разницей значений частот у лопастей различных типов. Это объясняется несколько большими возможностями изменения жесткости в плоскости вращения (посредством разноса материала по хорде, а не по высоте профиля). Для лопасти с трубчатым лонжероном круглого сечения и не работающим при изгибе каркасом характерен резонанс второго тона с четвертой гармоникой и, вследствие этого,— малый ресурс. Увеличение жесткости дает возможность уйти от этого резонанса и получить лопасть с хорошими резонансными характеристиками. Встречаются лопасти с еще более высокими жесткостями и частотами в плоскости вращения. Для таких лопастей практическое значение имеет только частота первого тона. Частоты второго и более высоких тонов увеличиваются настолько, что попадают в область высоких гармоник с очень малыми амплитудами, при которых значительные по величине напряжения не возникают даже при резонансе.

Некоторую сложность представляет оценка резонансных характеристик лопастей винта с втулкой на кардановом подвесе при их колебаниях в плоскости взмаха. Следует учитывать частоты собственных колебаний как при шарнирном, так и при жестком закреплении комля, но имея при этом в виду, что не все совпадения частот означают резонанс. Удобно ориентироваться по изгибающим моментам, передающимся с комля лопасти на втулку. Если суммарный момент на втулке не возникает, то она не поворачивается (как при жестком

ее креплении на валу). Поэтому частоты непроходных гармоник изгибающего момента следует сравнивать с собственными частотами, вычисленными при жестком закреплении лопасти. Для проходных гармоник существенное значение имеют частоты собственных колебаний шарнирно прикрепленной лопасти.

§ 4.2. СЛОЖНЫЕ ВИДЫ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАСТЕЙ

Несмотря на ряд упрощающих допущений, рассмотренные выше методы позволяют, как правило, получить результаты, хорошо отражающие действительность. Однако имеют место определенные исключения. В этих случаях для получения правильных результатов необходимы более сложные методы. Рассмотрение их выходит за пределы данного курса. Ограничимся только перечислением этих исключений и выяснением их физических основ. Для подробного же изучения будут указаны соответствующие литературные источники.

Совместные изгибно-крутильные колебания. В предыдущих разделах было принято, что центры тяжести (ЦТ) сечений совпадают с центрами жесткости ЦЖ, а ось жесткости (геометрическое место центров жесткости сечений) недеформированной лопасти прямолинейна. В действительности ось жесткости может быть криволинейной, а центры тяжести и жесткости некоторых сечений могут и не совпадать.

Рассмотрим упрощенный пример. На рис. 4.4 изображена консольная балка с массой M на конце. Будем считать, что масса самой балки пренебрежимо мала. Рассмотрим колебания балки при двух вариантах размещения груза на конце: когда центр тяжести груза лежит на линии центров жесткости балки и когда он смещен в горизонтальной плоскости на некоторую величину l. Система имеет возможность совершать изгибные колебания в вертикальной плоскости и крутильные колебания. Колебания в горизонтальной плоскости рассматривать не будем. Уравнение изгибных колебаний, выражающее условие равенства силы, действующей на груз со стороны балки, и инерционной силы, при $l=0$ имеет вид

$$M\ddot{y}+c_и y=0. \qquad (4.3)$$

Изгибная жесткость $c_и$ имеет простой физический смысл. Она представляет собой силу, которую необходимо приложить к концу балки, чтобы вызвать его единичное перемещение $y=1$.

Решение уравнения (4.3) известно:

$$y=y_0 \sin(p_и t+\varepsilon_и). \qquad (4.4)$$

Собственная частота колебаний

$$p_и=\sqrt{c_и/M_и}. \qquad (4.5)$$

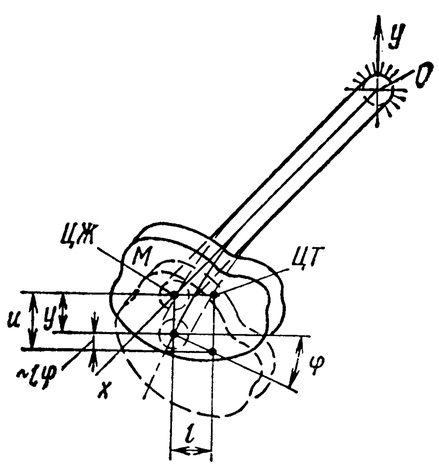


Рис. 4.4. Совместные изгибно-крутильные колебания

Аналогично может быть записано уравнение крутильных колебаний, выражающее равенство крутящих моментов, действующих на груз: упругого — $c_к\varphi$ и инерционного — $I\ddot{\varphi}$:

$$I\ddot{\varphi}+c_к\varphi=0. \qquad (4.6)$$

В этом уравнении I — момент инерции груза относительно точки его крепления к балке. Крутильная жесткость $c_к$ равна крутящему моменту, вызывающему единичный поворот конца балки $\varphi=1$. Решение уравнения (4.6), совпадающего по форме с уравнением (4.3), имеет вид

$$\varphi=\varphi_0 \sin(p_к t+\varepsilon_к).$$

Собственная частота крутильных колебаний

$$p_к=\sqrt{c_к/I}. \qquad (4.7)$$

Рассмотрим теперь случай закрепления груза с некоторым смещением его центра тяжести относительно оси жесткости балки. Уравнение сил, действующих на груз по оси Oy, теперь будет иметь вид

$$M\ddot{u}+c_и y=0, \qquad (4.8)$$

где u — перемещение центра тяжести, равное сумме перемещения конца балки y вследствие ее изгиба и перемещения центра тяжести груза при кручении балки. При малых колебаниях оно может быть определено из соотношения

$$u=y+\varphi l. \qquad (4.9)$$

С учетом (4.9) уравнение (4.8) принимает вид

$$M\ddot{y}+Ml\ddot{\varphi}+c_и y=0. \qquad (4.10)$$

Уравнение крутящих моментов относительно оси жесткости будет

$$Ml\ddot{y}+I\ddot{\varphi}+c_к\varphi=0, \qquad (4.11)$$

где $M\ddot{y}$ — сила инерции, действующая на груз при изгибе балки и приложенная в его центре тяжести; $\ddot{I}\varphi$ — момент инерционных сил от поворота груза; $c_к\varphi$ — упругий момент в балке относительно оси жесткости.

Рассматривая уравнения колебаний (4.10) и (4.11), можно установить, что в отличие от ранее рассмотренного случая эти уравнения являются совместными, так как в каждое из них входят обе переменные y и φ.

Решение системы (4.10) — (4.11) имеет вид

$$y=y_{01}\sin(p_1 t+\varepsilon_{и1})+y_{02}\sin(p_2 t+\varepsilon_{и2});$$
$$\varphi=\varphi_{01}\sin(p_1 t+\varepsilon_{к1})+\varphi_{02}\sin(p_2 t+\varepsilon_{к2}). \qquad (4.12)$$

Частоты собственных колебаний определяются, как и в рассмотренных ранее задачах (см. § 3.2 и 3.6), из условия существования

нетривиального решения. Приравнивая нулю определитель системы уравнений, полученных из уравнений (4.10) и (4.11) после подстановки в них $y=y_0 \sin pt$ и $\varphi=\varphi_0 \sin pt$, получим для частот собственных колебаний p_1 и p_2 формулу

$$p_{1,2}^2=\frac{c_и I+c_к M \pm \sqrt{(c_и I-c_к M)^2+4M^2l^2c_и c_к}}{2(MI-M^2l^2)}. \qquad (4.13)$$

Для анализа удобно преобразовать это выражение, используя формулы для частот раздельных изгибных и крутильных колебаний (4.5) и (4.7). Определив из этих формул $c_и$ и $c_к$: $c_и=p_и^2M$; $c_к=p_к^2I$ и, подставив их в формулу (4.13), получим

$$p_{1,2}^2=\frac{p_и^2+p_к^2 \pm \sqrt{(p_и^2-p_к^2)^2+4p_и^2p_к^2\chi}}{2(1-\chi)}, \qquad (4.14)$$

где $\chi=Ml^2/I$. Могут быть найдены и формы колебаний, которые в данной задаче представляют собой соотношения амплитуд изгибных и крутильных колебаний конца балки:

$$\frac{y_{0j}}{\varphi_{0j}}=\frac{p_j^2 l}{p_и^2-p_j^2}=\frac{p_к^2-p_j^2}{p_j^2 l}, \quad j=1,2.$$

Из решения (4.12) видно, что имеют место одновременно изгибные и крутильные колебания. Те и другие происходят с двумя частотами p_1 и p_2 и с определенными формами, т. е. с определенными для каждой частоты соотношениями амплитуд перемещений y_0 и углов поворота φ_0.

Предположим теперь, что каким-либо искусственным способом кручение балки не допускается, т. е. $\varphi=\ddot{\varphi}=0$, тогда от системы (4.10) — (4.11) останется только первое уравнение (4.10), в котором исчезнет член $Ml\ddot{\varphi}$. Балка будет совершать только изгибные колебания с частотой $p=p_и$. Такое значение частоты, которое получается, если в системе выделить некоторую подсистему с определенными ограничениями по ее движению (в данном случае $\varphi=0$), можно назвать парциальным. Аналогично может быть получена парциальная частота крутильных колебаний. Из уравнений (4.10) — (4.11) при $y=\ddot{y}=0$ получим $p=p_к$. Частоты $p_и$ и $p_к$ зависят от разных параметров и поэтому в общем случае отличаются друг от друга. Для определенности примем в дальнейших рассуждениях, что $p_к>p_и$.

Сравним частоты изгибно-крутильных колебаний, которые будут иметь место в рассматриваемой системе, с парциальными частотами. Из формулы (4.14) следует, что частоты p_1 и p_2 отличаются от $p_и$ и $p_к$:

$$p_2>p_к>p_и>p_1,$$

т. е. одна из частот совместных колебаний больше, а другая — меньше, чем парциальные частоты. Это различие увеличивается с ростом l. При небольших l частота p_2 близка к $p_к$, а соответствующая

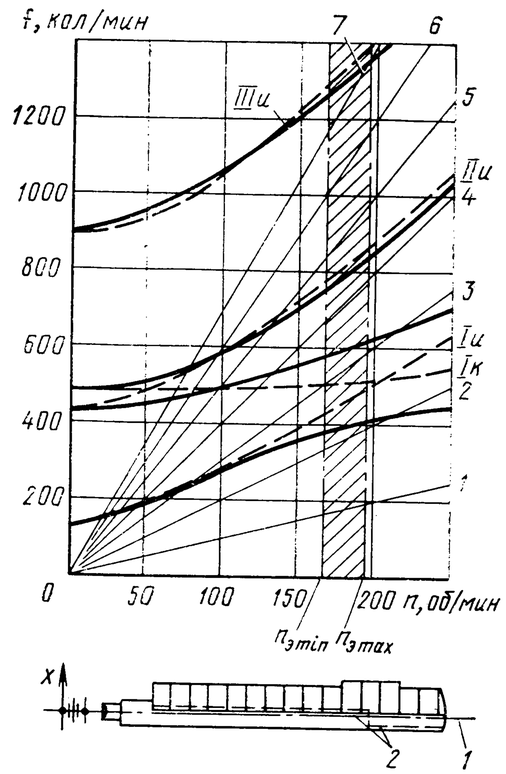


Рис. 4.5. Влияние кручения на вид резонансной диаграммы для лопасти со ступенчатой центровкой:

1 — ось жесткости; *2* — линия центров тяжести сечений; ———— частоты совместных колебаний; — — — — парциальные частоты (Iи, IIи, IIIи — изгибные, Iк — крутильные колебания); *1—7* — номера гармоник

форма характеризуется наличием значительного кручения; частота p_1 близка к $p_и$, а соответствующая форма отличается наличием главным образом изгиба.

Аналогичное, только более сложное явление, имеет место и при колебаниях лопасти, у которой центры тяжести сечений не совпадают с осью жесткости. Так же, как и в рассмотренном выше упрощенном примере, будут иметь место совместные изгибно-крутильные колебания. Остановимся только на основных выводах, полученных А. В. Некрасовым (см. [23] гл. 1, § 6) при исследованиях этой задачи. Влияние кручения оказывается наибольшим для лопастей со специфическим ступенчатым законом изменения центровки по радиусу (рис. 4.5), причем таком, что изменение центровки происходит на относительном радиусе 0,7—0,8, на котором располагается узел первого тона изгибных колебаний. Если центры тяжести сечений значительно смещены назад по сравнению с их обычным расположением по хорде, то в переднюю часть концевых сечений для борьбы с флаттером (см. гл. 7) приходится помещать особо тяжелый противофлаттерный груз. Такая необычная компоновка и приводит к указанному закону изменения центровки. Для таких лопастей при определении собственных частот учет кручения необходим. Методы расчета даны в [19, 20, 23]. Для лопастей с обычной компоновкой частоты совместных изгибно-крутильных колебаний незначительно отличаются от соответствующих парциальных частот и поэтому методы гл. 3 дают вполне удовлетворительные результаты. Способ расчета частот и форм изолированных крутильных колебаний дан в [23].

Колебания закрученной лопасти. В предыдущих разделах предполагалось, что лопасть является незакрученной (см. § 3.1). В действительности часто это условие не соблюдается. Поэтому лопасть в общем случае представляет собой закрученную балку (см. рис. 3.1, *б*). Для закрученных балок характерной является связь изгибных колебаний по двум направлениям. Понятия изгибные колебания в плоскости наибольшей жесткости и изгибные колебания в плоскости наименьшей жесткости теряют смысл, так как вследствие

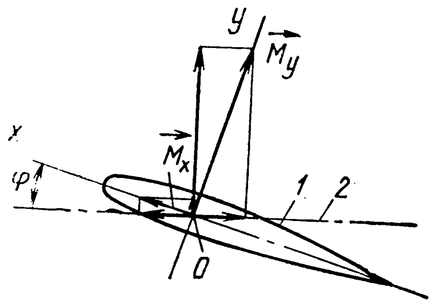


Рис. 4.6. Моменты относительно главных осей сечения и оси ГШ:

1 — сечение лопасти; *2* — ось ГШ

наличия крутки таких плоскостей просто нет. Если рассмотреть колебания такой балки в системе координат, выбранной так, чтобы ее две оси совпадали с главными осями какого-либо сечения, например, комлевого, то при свободных колебаниях любое сечение будет перемещаться как в направлении оси Ox, так и в направлении оси Oy. Частота и форма колебаний будут зависеть от жесткостей как относительно одной, так и относительно другой главных осей каждого сечения. Чтобы характеризовать форму, необходимо будет задать для каждого сечения перемещения по двум направлениям — x и y.

Крутка лопасти определяется наибольшим углом между одноименными главными осями в различных (обычно корневом и концевом) сечениях. Влияние крутки зависит не только от ее величины, но и от соотношения жесткостей EI_x/EI_y. Как показывают расчеты, при характерных для лопастей несущего винта соотношениях жесткостей и углах крутки (меньше 10—15°) ее влиянием можно пренебречь, рассматривая лопасть как незакрученную. Для больших углов крутки, обычных для пропеллеров (тянущих или толкающих винтов винтокрылов), может оказаться необходимым учет ее влияния (см. [51]).

Связь колебаний через граничные условия. Одно из допущений, принятых в предыдущих разделах, состояло в том, что одна из главных осей инерции считалась параллельной оси ГШ. В действительности угол между этими осями φ, как правило, отличается от нуля. Изгибающий момент M_x действует (рис. 4.6) в плоскости наименьшей жесткости, т. е. в плоскости rOy, а момент M_y — в плоскости наибольшей жесткости — rOx. Векторы этих моментов направлены соответственно по главным осям сечения Ox и Oy. Найдем сумму проекций векторов $\vec{M}_x$ и $\vec{M}_y$ на ось ГШ:

$$M_{\text{г.ш}} = M_x \cos\varphi - M_y \sin\varphi.$$

Момент относительно оси ГШ должен равняться нулю:

$$M_x \cos\varphi - M_y \sin\varphi = 0. \qquad (4.15)$$

При $\varphi = 0$ это условие совпадает с ранее применявшимся граничным условием $M_x = 0$ (3.5). При $\varphi \neq 0$, как это видно из (4.15), моменты M_x и M_y в комле лопасти связаны между собой. Изменение одного из них влечет за собой изменение другого. Поэтому свободные колебания лопасти, у которой главная ось Ox комлевого сечения не параллельна оси ГШ, являются совместными колебаниями в двух плоскостях. Лопасть изгибается как в плоскости наименьшей, так и в плоскости наибольшей жесткости. Частоты таких колебаний за-

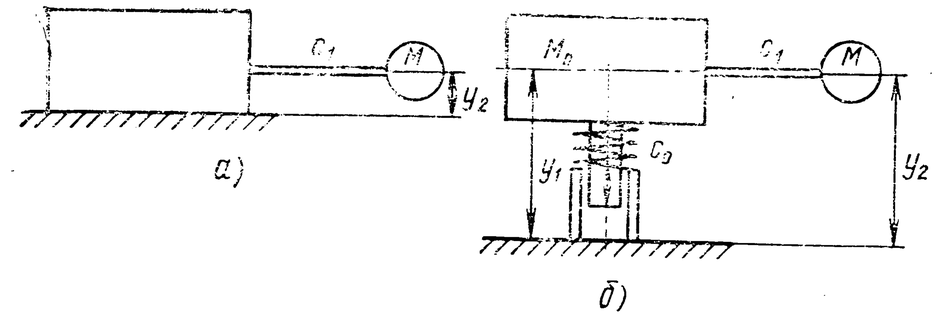


Рис. 4.7. Балка на жестко (*а*) и упруго (*б*) закрепленной опоре

висят от обеих жесткостей EI_x и EI_y и угла φ, а формы описываются двумя перемещениями — по осям x и y.

Как показывают более подробные исследования, для лопастей несущих винтов, имеющих ВШ, этим уточнением можно пренебречь. Для лопастей рулевых винтов рассмотрение этого вопроса будет продолжено в гл. 8.

Влияние на колебания податливости крепления втулки. Втулка, к которой крепятся лопасти, закреплена в действительности на упругом основании, а не жестко, как это было принято в предыдущих разделах.

Влияние податливости крепления втулки на собственные изгибные колебания можно качественно оценить, рассмотрев следующий пример. На конце балки, массой которой можно пренебречь, установлен груз M (рис. 4.7). Для случая неподвижной опоры (см. рис. 4.7, *а*) собственная частота изгибных колебаний балки будет определяться формулой (4.5). Пусть теперь опора, к которой закреплена балка, сама закреплена упруго (см. рис. 4.7, *б*). Движение системы описывается двумя дифференциальными уравнениями, выражающими равенства сил, действующих на груз и на массу опоры M_0:

$$M_0 \ddot{y}_1 = -c_0 y_1 + c_1 (y_2 - y_1);$$

$$M \ddot{y}_2 = -c_1 (y_2 - y_1).$$

Свободные колебания будут описываться выражениями

$$y_1 = \bar{y}_{11} \sin(p_1 t + \varepsilon_{11}) + \bar{y}_{12} \sin(p_2 t + \varepsilon_{12});$$

$$y_2 = \bar{y}_{21} \sin(p_1 t + \varepsilon_{21}) + \bar{y}_{22} \sin(p_2 t + \varepsilon_{22}),$$

где p_1 и p_2 — собственные частоты,

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[p_1^{*2} + p_2^{*2}\left(1 + \frac{M}{M_0}\right)\right] \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[p_1^{*2} + p_2^{*2}\left(1 + \frac{M}{M_0}\right)\right] - 4 p_1^{*2} p_2^{*2}}.$$

Здесь p_1^* и p_2^* — парциальные частоты: $p_1^* = \sqrt{\frac{c_0}{M_0}}$, $p_2^* = \sqrt{\frac{c_1}{M}}$.

Формы колебаний, представляющие собой в данном случае соотношения амплитуд колебаний опоры и конца балки, определяются формулой

$$\frac{\bar{y}_{2j}}{\bar{y}_{1j}} = \frac{p_1^{*2} + \frac{M}{M_0} p_2^{*2} - p_j^2}{\frac{M}{M_0} p_2^{*2}}, \quad j = 1,2.$$

Таким образом, влияние упругости крепления опоры сказалось в том, что вместо одной собственной частоты появились две — одна ниже, а другая — выше собственной частоты жестко закрепленной балки: $p_2 > p_2^* > p_1$ — а полные перемещения груза состоят из двух частей — прогиба балки и перемещения опоры.

Конечно, при рассмотрении колебаний упругой лопасти на упругой опоре соответствующие выкладки и результаты существенно усложняются, но качественная сторона влияния податливости опоры сохраняется. Каждой частоте собственных колебаний лопасти при жестком креплении соответствует несколько частот колебаний при податливой опоре. В совокупности независимо от жесткости опоры собственные частоты балки образуют бесконечную последовательность (§ 4.3). Однако если рассматривать некоторый определенный диапазон значений частот, то число собственных частот, находящихся в этом диапазоне, вследствие податливости крепления увеличивается. Соответственно каждой частоте появляется форма колебаний лопасти, отличающаяся от формы колебаний на жесткой опоре.

Упругие перемещения втулки несущего винта могут происходить как вследствие упругих колебаний фюзеляжа или фюзеляжа с крылом в целом, так и вследствие того, что крепление втулки к фюзеляжу (вал винта, картер редуктора, подредукторная рама) не является абсолютно жестким.

Как показывают подробные исследования [23], податливостью крепления в направлении оси винта можно пренебречь и собственные частоты колебаний в плоскости взмаха вычислять без учета перемещений втулки. Исключением может быть винт, расположенный на конце упругого крыла или фермы вертолета поперечной схемы. При колебаниях в плоскости вращения возможен гораздо больший, имеющий практическое значение, эффект упругого крепления втулки, что объясняется достаточно большой податливостью вала винта при изгибе и кручении, особенно для верхнего винта вертолета соосной схемы. В качестве примера на рис. 4.8 показана резонансная диаграмма в плоскости вращения для одного из винтов с учетом упругого крепления втулки. Как известно (см. гл. 2), гармоники сил, приходящих на втулку с отдельных лопастей, по результатам их сложения на втулке разделяются на непроходные и проходные. Непроходные гармоники не могут вызвать перемещений втулки в плоскости вращения, так как в сумме они дают силу, равную нулю. Поэтому смещение втулки отсутствует, несмотря на податливость

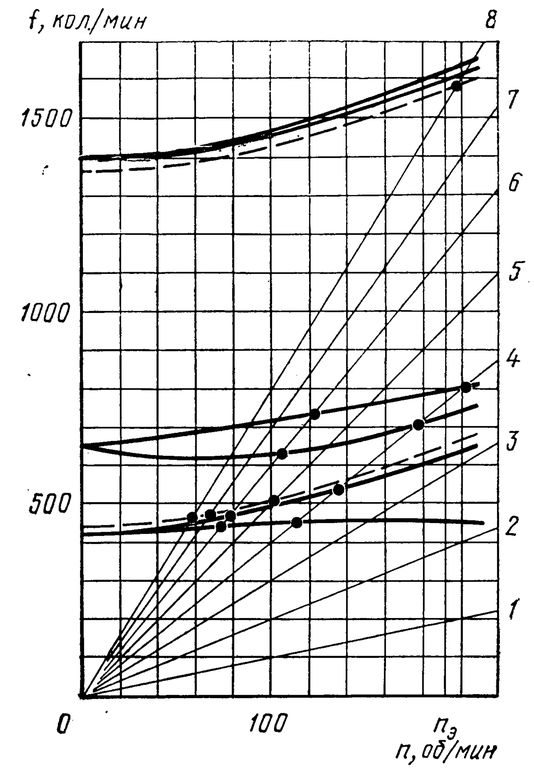


Рис. 4.8. Резонансная диаграмма с учетом податливости крепления опоры:

1—8 — номера гармоник; — — — неподвижная опора; ——— упруго закрепленная опора

крепления. Таким образом его следует рассматривать как абсолютно жесткое. Иной вывод следует сделать относительно проходных гармоник. Суммарная сила, возникающая при их сложении, и является силой, вызывающей изгибные деформации вала, т. е. упругие перемещения втулки. Следовательно, точки пересечения на резонансной диаграмме кривых собственных частот с прямыми, соответствующими частотами гармоник, в отличие от случая жесткого крепления втулки, не всегда означают возникновение резонансных колебаний. Для непроходных гармоник резонансным колебаниям соответствуют только точки пересечения прямых, соответствующих непроходным гармоникам, с кривой собственной частоты, вычисленной при жестком креплении втулки. Другие точки физического смысла не имеют. Для проходных гармоник — наоборот, не имеют смысла точки пересечения кривой собственной частоты, рассчитанной для жесткого крепления опоры. В качестве примера на резонансной диаграмме рис. 4.8 отмечены кружками точки, соответствующие резонансным колебаниям для пятилопастного винта. Точки пересечения, не отмеченные кружком, смысла не имеют. Аналогичный подход должен быть и при рассмотрении резонансной диаграммы в плоскости вращения с учетом крутильных колебаний вала. Проходной гармоникой, которая вызывает такие совместные колебания лопастей и втулки, является гармоника, кратная числу лопастей.

Метод расчета собственных частот с учетом упругих перемещений втулки, разработанный Л. Н. Гродко, изложен в работах [9, 10, 23]. Он основан на определении динамических жесткостей, понятие о которых будет дано в гл. 11.

§ 4.3. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНЕНИЯ РАССМОТРЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЗАДАЧ, НЕ СВЯЗАННЫХ С ЛОПАСТЬЮ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Изложенные в данной главе методы расчета и качественные результаты не ограничены только случаем лопастей несущего винта.

Они могут быть использованы и при анализе многих других конструкций балочного типа, нередко встречающихся на практике. Однако при этом следует иметь в виду, что выше были сделаны некоторые допущения, которые не влияют на результаты расчета лопастей несущего винта, но могут оказаться решающими при расчете некоторых других конструкций. Так, было принято, что сечение лопасти жестко в своей плоскости, т. е. форма сечения не меняется при нагружении. Это может привести к существенным ошибкам при расчете широких и коротких тел, например лопаток турбин и вентиляторов [11, 23, 30].

При определении перемещений не учитывались деформации, вызываемые перерезывающими силами. Это допущение (см. [34, 45]) может оказаться неприемлемым при расчете частот высоких тонов изгибных колебаний, а также при расчете частот балок, размеры поперечных сечений которых соизмеримы с их длиной.

Наконец, в уравнениях изгиба (3.1), (3.2), (3.31) и (3.50) не учитываются моменты инерционных сил от поворота сечений. Это может привести к заметным погрешностям при расчете балок с большими моментами инерции сечений, например, при расчете фюзеляжа, рассматриваемого как балка (см. гл. 11), и при расчете частот высоких тонов изгибных колебаний [34, 45].

При рассмотрении отдельных вопросов были получены некоторые результаты, которые, как это показывают более глубокие исследования (см., например, [2, 3, 11, 30, 34, 42, 45]) являются общими для свободных колебаний линейных систем с распределенными параметрами. Не останавливаясь на доказательствах, перечислим эти положения, так как их полезно знать для правильного подхода к решению многих встречающихся в практике частных задач.

1. Решение уравнений собственных колебаний может быть представлено в виде бесконечной суммы произведений двух функций: одной — только времени, а другой — только координат, т. е. в виде разложения по собственным формам колебаний:

$$y=\sum_{j=0}^{\infty}\delta_j(t)\,\xi_j(\bar{r}).$$

Функция $\delta_j(t)$ описывает гармонические колебания с круговой частотой p_j: $\delta_j=C_{1j}\cos p_jt+C_{2j}\sin p_jt$. Функция $\xi_j(\bar{r})$ — форма собственных колебаний, $\bar{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки.

2. Собственные частоты образуют бесконечную последовательность. Каждой собственной частоте соответствует хотя бы одна собственная форма (см., например, § 3.2 и 3.6).

3. При увеличении какой-либо массы произвольной упругой системы, равно как и при добавлении к этой системе новой массы, жестко прикрепляемой к какой-либо точке системы, все собственные частоты этой системы, как правило, будут уменьшаться. Уменьшение собственной частоты не произойдет только в том случае, если в форме колебаний, которая соответствует рассматриваемой частоте, точка присоединения добавляемой массы остается неподвижной, т. е. эта точка является узлом колебаний. В последнем случае собственная частота остается неизменной. Уменьшение массы приводит к обратному эффекту.

При увеличении жесткости отдельных связей какой-либо упругой системы, равно как и при добавлении к этой системе каких-либо упругих или абсолютно жестких связей, все собственные частоты этой системы, как правило, будут возрастать. Возрастание не произойдет только в том случае, если реакция этой связи в рассматриваемой форме колебаний все время равна нулю. При этом соответствующая частота остается неизменной. Уменьшение жесткости приводит к обратному эффекту.

Положения п. 3 даны в упрощенной формулировке, вытекающей, при определенных ограничениях, из общих теорем Куранта и Релея [3, 11]. Эта формулировка является практически полезной, так как непосредственно дает правило для проектирования упругих систем с заданными частотными характеристиками. Однако при ее использовании надо проверять выполнение ограничений. При увеличении массы не должна увеличиваться потенциальная энергия, а при увеличении жесткости — кинетическая энергия системы. В противном случае могут получиться результаты, противоположные указанным. Особенно важно отметить, что это может иметь место при наличии центробежной силы. Так, помещение дополнительной массы на вращающейся лопасти может привести к повышению некоторых собственных частот.

4. Собственные формы обладают свойствами ортогональности. Условие ортогональности имеет вид (3.45) для изгибных колебаний балки с любыми однородными граничными условиями. Для крутильных колебаний такой балки оно имеет вид

$$\int_0^R I_m\eta_j\eta_k\,dr=0,\quad j\neq k, \tag{4.16}$$

где I_m — погонный момент инерции сечения относительно центра жесткости; η_j, η_k — формы крутильных колебаний.

Для неоднородных граничных условий и для более сложных конструкций (например, комбинации нескольких балок) тоже существует условие ортогональности форм, но в более сложном виде, чем (3.45) или (3.46). Сведения общего характера содержатся в [42]. В [19] дан наиболее общий анализ свойства ортогональности форм изгибно-крутильных колебаний лопастей.

глава 5 РАСЧЕТ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАСТЕЙ

Вынужденные колебания лопастей происходят под действием аэродинамических сил и моментов. В общем случае они представляют собой совместные поперечные (изгибные в двух плоскостях) и крутильные колебания. В этой главе будут рассмотрены методы расчета изгибных колебаний в плоскости взмаха без учета изгиба в плоскости вращения и кручения лопасти. Такие же методы применяются и для расчета колебаний в плоскости вращения. В общем случае совместных колебаний используются по существу аналогичные методы [21, 51], отличающиеся совместным рассмотрением всех трех видов деформации и вызываемых ими нагрузок.

§ 5.1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Для расчета вынужденных колебаний лопасти необходимо определить вызывающие их аэродинамические нагрузки. Эта задача является одной из сложнейших в общей аэродинамике. Условия обтекания требуют совместного учета эффекта сжимаемости воздуха и нестационарности обтекания, явления срыва потока при углах атаки больше критического, пространственного обтекания отдельных частей лопасти, воздействия достаточно мощных свободных вихрей. Важное значение имеет точность определения исходных для расчета нагрузки параметров.

Отправными формулами для определения погонной аэродинамической нагрузки являются хорошо известные выражения:

$$Y = c_y \frac{\rho U^2}{2} b; \tag{5.1}$$

$$X = c_x \frac{\rho U^2}{2} b, \tag{5.2}$$

где ρ — плотность воздуха; b — хорда профиля; U — скорость потока, набегающего на профиль; c_y, c_x — коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления, зависящие, в свою очередь, от угла атаки α, чисел M и Re, формы профиля и состояния поверхности отсека.

В этих выражениях заранее известны только плотность воздуха ρ и хорда b. Определим скорости и углы атаки. Задачу решим путем нескольких последовательных переходов. Первый этап — разложение вектора скорости набегающего потока на две составляющие (рис. 5.1, *а*) — перпендикулярную V_n и параллельную V_t плоскости вращения винта:

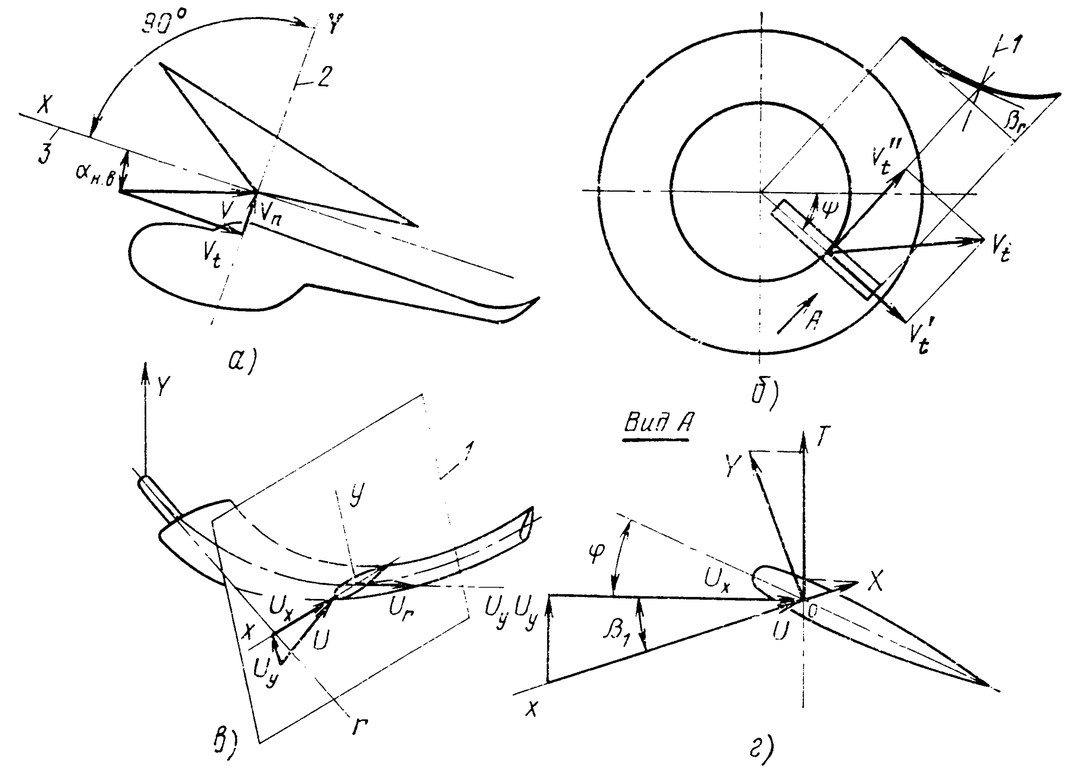


Рис. 5.1. Скорость потока относительно сечения лопасти:

1 — плоскость, перпендикулярная к оси лопасти; *2* — ось вращения винта; *3* — плоскость вращения винта

$$V_n = V \sin \alpha_{н.в}; \qquad V_t = V \cos \alpha_{н.в} \tag{5.3}$$

Здесь $\alpha_{н.в}$ — угол атаки несущего винта — угол между вектором скорости набегающего потока и плоскостью вращения.

Следующий шаг — разложение (рис. 5.1, *б*) компонента скорости V_t на две составляющие — перпендикулярную V_t'' и параллельную V_t' проекции оси лопасти на плоскость вращения. Эти компоненты:

$$V_t' = V_t \sin \psi = V \cos \alpha_{н.в} \sin \psi; \quad V_t'' = V_t \cos \psi = V \cos \alpha_{н.в} \cos \psi, \tag{5.4}$$

где ψ — азимут лопасти.

С учетом вращения лопасти полная величина составляющей скорости, перпендикулярной к проекции оси лопасти на плоскость вращения винта, будет

$$V_t^* = \omega r + V_t'' = \omega r + V \cos \alpha_{н.в} \sin \psi. \tag{5.5}$$

Найдем теперь скорости в плоскости, перпендикулярной к оси лопасти (см. рис. 5.1, *б* и *в*). Нормаль к этой плоскости составляет с плоскостью вращения угол β_r, который можно считать малым,

поэтому

$$\cos\beta_r \approx 1;\ \sin\beta_r \approx \operatorname{tg}\beta_r = y'. \tag{5.6}$$

В этой плоскости проведем две оси — ось Ox, параллельную плоскости вращения, и ось Oy — перпендикулярную к ней. Найдем проекции скорости потока относительно профиля на эти оси:

$$U_x = V_t^* = \omega r + V\cos\alpha_{\text{н.в}}\sin\psi; \tag{5.7}$$

$$U_y = V_n\cos\beta_r - V_t'\sin\beta_r - \frac{\partial y}{\partial t} - v_i \approx V_n - V_t'\beta_r - \frac{\partial y}{\partial t} - v_i. \tag{5.8}$$

В выражении для U_y происхождение первых двух слагаемых ясно из последовательного рассмотрения рис. 5.1, *б* и 5.1, *в*. Третье слагаемое соответствует скорости движения рассматриваемого сечения при колебаниях лопасти в плоскости взмаха. Четвертое слагаемое учитывает индуктивную скорость — дополнительную скорость потока, вызванную самим винтом. Об этой скорости будет сказано ниже. Используя соотношения (5.3), (5.4) и (5.5), формулу (5.8) можно привести к виду

$$U_y = V_n\sin\alpha_{\text{н.в}} - V\cos\alpha_{\text{н.в}}\cos\psi\frac{\partial y}{\partial r} - \frac{\partial y}{\partial t} - v_i. \tag{5.9}$$

В ряде случаев удобно использовать применяемые в аэродинамике винта коэффициенты режима работы μ и протекания λ:

$$\mu = \frac{V\cos\alpha_{\text{н.в}}}{\omega R};\quad \lambda = \mu\operatorname{tg}\alpha_{\text{н.в}} - \frac{v_i}{\omega R}.$$

Преобразовав правые части (5.7) и (5.9), получим

$$U_x = \omega R(\bar{r} + \mu\sin\psi); \tag{5.10}$$

$$U_y = \omega R\left(\lambda - \mu\cos\psi\frac{\partial y}{\partial r} - \frac{1}{\omega R}\frac{\partial y}{\partial t}\right). \tag{5.11}$$

Заметим, что полная скорость воздуха относительно профиля состоит из трех компонентов: U_x, U_y и третьего, перпендикулярного к ним и направленного по касательной к упругой оси лопасти, компонента скорости U_r (см. рис. 5.1, *в*). Однако часто этим компонентом пренебрегают.

При выводе формул (5.10) и (5.11) углы β_r полагались малыми. Не учитывались деформации лопасти в плоскости вращения и ее движение относительно ВШ, а также составляющие индуктивной скорости в плоскости вращения. Эти допущения не сказываются существенно (для рассматриваемой задачи) на величинах U_x и U_y. В формулах (5.10) и (5.11) величины V и ω можно считать заданными. Угол атаки $\alpha_{\text{н.в}}$ может быть взят из аэродинамического расчета вертолета. Иногда его значение уточняется при расчете изгибных колебаний (см. § 5.2). Производные y' и $\dot{y}$ неизвестны. Они могут быть найдены только путем расчета изгибных колебаний. Поэтому расчет аэродинамических нагрузок в общем случае неотделим от расчета изгибных колебаний.

В формулу (5.11) входит также индуктивная скорость v_i. На малых скоростях полета несущий винт вертолета создает большие индуктивные скорости, существенно отличающиеся по величине в различных точках пространства около винта. Закон изменения индуктивной скорости по азимуту представляет собой сложную периодическую функцию, многие гармоники которой имеют значительную величину. С ростом скорости полета индуктивные скорости заметно уменьшаются. На малых скоростях полета индуктивная скорость значительно изменяет величину скорости U_y, а следовательно, и углы атаки сечений. При этом особенно важно, что изменения углов атаки будут иметь периодический характер со значительными амплитудами нескольких гармоник. Поэтому расчеты изгибающих моментов без учета переменной индуктивной скорости приводят в диапазоне малых скоростей полета к очень значительным погрешностям.

Поле индуктивных скоростей определяется с помощью вихревой теории, которая подробно рассматривается в курсе аэродинамики несущего винта. Не останавливаясь поэтому подробно на рассмотрении вихревых теорий, разработанных различными авторами (Майкопаром и Слуцким, Баскиным, Проскуряковым, Вождаевым, Тищенко, а также Ван Ши-цунем и рядом иностранных авторов [4, 22, 31]), отметим, что для нашей задачи приемлемы лишь те из них, в которых вихревая пелена, образованная свободными вихрями, рассматривается как скошенное цилиндрическое тело. Теории, в которых эта пелена искуственно превращается в плоскую, не пригодны. Лучшие результаты можно ожидать при применении так называемых лопастей теорий (Тищенко, Вождаев), в которых рассматривается винт с конечным числом лопастей в отличие от теорий винтов с бесконечным числом лопастей.

Другая особенность любой вихревой теории состоит в следующем. Величины индуктивных скоростей зависят от расположения и интенсивности вихрей. Структура вихрей зависит от распределения аэродинамической нагрузки, которое, в свою очередь, определяется наряду с другими факторами и распределением индуктивных скоростей. Следовательно, расчет поля индуктивных скоростей неразрывно связан с расчетом аэродинамической нагрузки. Если величины аэродинамической нагрузки определяются без учета изгибных и крутильных колебаний лопасти, то возможны существенные ошибки. Поэтому в общем случае необходимо совместное решение трех задач — определения колебаний лопасти, аэродинамической нагрузки и индуктивных скоростей. Такой метод расчета для режимов полета на малой скорости подробно рассматривается в [23]. Обычно в расчетах при больших скоростях полета индуктивная скорость полагается постоянной по радиусу и азимуту и определяется по известной формуле Глауэрта:

$$\frac{v_i}{\omega R} = \frac{c_T}{4\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}}.$$

Угол атаки сечения, как это следует из рассмотрения рис. 5.1, *г*,

представляет собой сумму:

$$\alpha=\beta_1+\varphi, \tag{5.12}$$

где β_1 — угол притекания; φ — угол установки лопасти.

Угол притекания определяется, в свою очередь, соотношениями:

$$\operatorname{tg}\beta_1=U_y/U_x;\ \cos\beta_1=U_x/U;\quad \sin\beta_1=U_y/U, \tag{5.13}$$

т. е. рассмотренными выше скоростями U_x и U_y. Угол установки представляет собой сумму

$$\varphi=\theta_{а.п}+\varkappa\beta_0+\vartheta_{кр}, \tag{5.14}$$

где $\theta_{а.п}$ — угол установки, обуславливаемый положением автомата перекоса; $\varkappa\beta_0$ — угол установки от действия компенсатора взмаха с коэффициентом $\varkappa$; $\beta_0=\left.\frac{\partial y}{\partial r}\right|_{r=0}$ — угол поворота комлевого сечения; $\vartheta_{кр}$ — угол, получающийся вследствие кручения лопасти в полете под действием приложенного к лопасти крутящего момента.

Для определения углов установки, таким образом, необходимо выполнить аэродинамический расчет, расчет балансировки и расчет кручения лопасти. Часто кручением лопасти пренебрегают, а аэродинамический расчет и расчет балансировки выполняют в предположении, что лопасти винта являются абсолютно жесткими на изгиб и на кручение.

Для того чтобы наконец воспользоваться формулами (5.1) и (5.2), необходимо еще найти коэффициенты c_y и c_x. Так как углы атаки сечений лопасти могут меняться в широком диапазоне, то коэффициенты c_y и c_x определяются в зависимости от угла атаки по результатам так называемой круговой продувки, т. е. продувки, выполненной при различных углах атаки от 0 до 360° (рис. 5.2). Для учета влияния сжимаемости, которое может быть достаточно большим, следует использовать результаты продувок, выполненных при различных числах М.

Для приближенных рсчетов используют линейную зависимость

$$c_y=c_y^{\alpha}\alpha, \tag{5.15}$$

которая, как известно, справедлива в действительности лишь для ограниченного диапазона углов атаки.

При нестационарном обтекании характеристики профиля могут существенно изменяться. Так, например, зависимость c_y от α приобретает вид, показанный на рис. 5.3. При этомс одинаковым углам атаки соответствуют разные значения c_y в зависимости от закона изменения угла атаки. Отмечается увеличение $c_{y\,max}$, особенно, если профиль выводится на большой угол атаки с большой скоростью. Поэтому для получения более точных результатов следует учитывать эффект нестационарного обтекания.

Для расчета колебаний лопасти в плоскости наименьшей жесткости необходимо определить составляющую аэродинамической

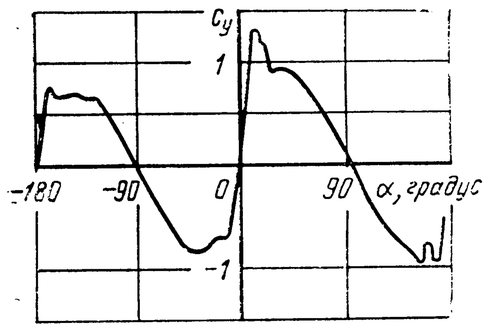


Рис. 5.2. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки по результатам круговой продувки

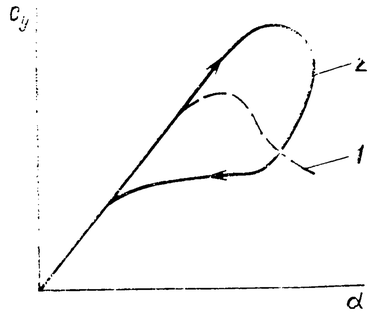


Рис. 5.3. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки:

1 — статическая зависимость; *2* — зависимость при быстром изменении угла атаки

силы, направленную перпендикулярно к соответствующей главной оси инерции сечения.

В большинстве случаев используются приближенные соотношения, в которых пренебрегается малым углом между главной осью и плоскостью вращения. Полагая, что эта ось параллельна плоскости винта, т. е. совпадает с осью OX, получаем на основании рис. 5.1, *г* и формул (5.13) искомую силу:

$$T=Y\cos\beta_1+X\sin\beta_1=Y\frac{U_x}{U}+X\frac{U_y}{U}. \tag{5.16}$$

С учетом формул (5.1) и (5.2):

$$T=\frac{\rho bU}{2}(c_yU_x+c_xU_y). \tag{5.17}$$

При малых углах атаки α и притекания β_1 из формулы (5.16) следует приближенное соотношение $T\approx Y$.

§ 5.2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

На рис. 5.4 изображена схема определения нагрузки при наиболее общем подходе, с учетом наибольшего числа факторов, подводящая итог изложенному выше. Показаны этапы расчета со ссылками на номера формул в тексте, внутренние связи и связи с другими расчетами. Входные данные для расчета летных характеристик и балансировки, не связанные с расчетом T, на схеме условно не показаны.

Для ряда практических целей можно обойтись хотя и менее точным, но более простым методом определения аэродинамической нагрузки, дающим возможность получить удобную формулу для силы T. Основным допущением в этом методе является допущение о малости углов атаки α сечений. Не учитывается также влияние сжи-

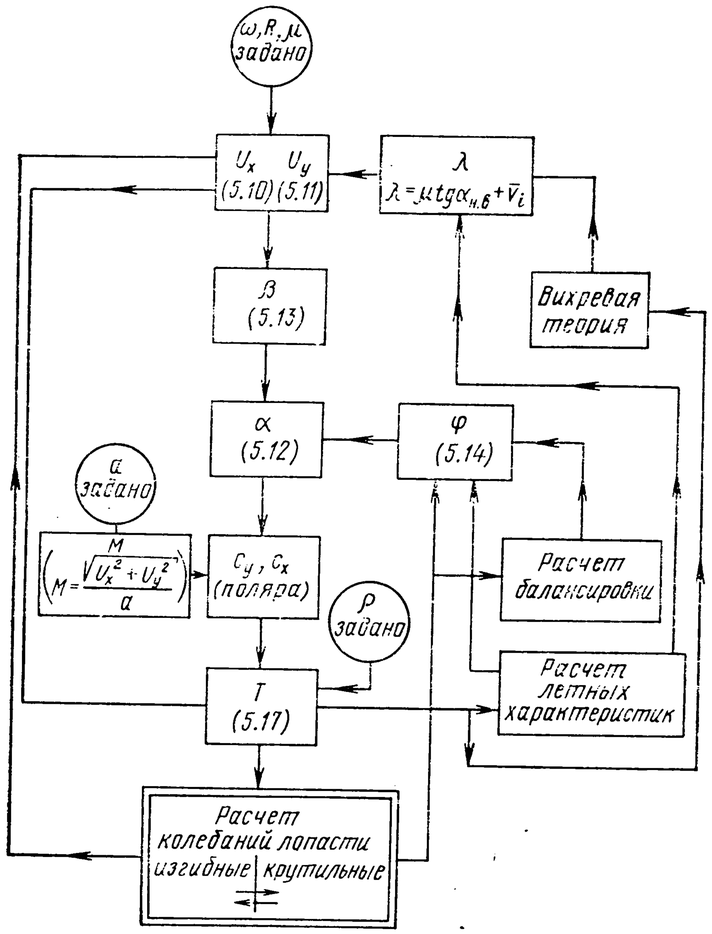


Рис. 5.4. Схема определения аэродинамической нагрузки

маемости и нестационарность обтекания. При небольших углах атаки существует линейная зависимость (5.15). Поэтому аэродинамическая нагрузка

$$T=c_y^\alpha\alpha\,\frac{\rho U^2}{2}\,b. \tag{5.18}$$

При малых углах α невелик и угол β_1, поэтому $tg\,\beta_1\approx\beta_1$, следовательно,

$$\alpha=\varphi+\beta_1\approx\varphi+\frac{U_y}{U_x} \tag{5.19}$$

и $U\approx U_x$. (5.20)

Подставляя приближенные выражения (5.19) и (5.20) в формулу (5.8), получим

$$T\approx\frac{c_y^\alpha\rho b}{2}(\varphi U_x^2+U_xU_y). \tag{5.21}$$

Эта же формула могла бы быть получена и при другом подходе к определению аэродинамической нагрузки, а именно в предположении о стационарном обтекании профиля идеальной (невязкой) и несжимаемой жидкостью.

§ 5.3. РАСЧЕТ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАСТИ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

Уравнение изгибных колебаний лопасти было получено в § 3.6 [формулы (3.29) и (3.30)]. Рассмотрим один из возможных методов решения, основанный на упрощенном варианте определения аэродинамической погонной нагрузки в соответствии с формулой (5.21). Подставим в (5.21) выражения для U_x и U_y — (5.10) и (5.11). Введем обозначения:

$$T_1(r,\ \psi)=\frac{c_y^\alpha\rho b}{2}\,\omega^2R^2\left[\varphi(\bar{r}+\mu\sin\psi)^2+\lambda(\bar{r}+\mu\sin\psi)\right];$$

$$T_2(r,\ \psi)=\frac{c_y^\alpha\rho b}{2}\,\omega^2R^2\mu\cos\psi(\bar{r}+\mu\sin\psi);$$

$$T_3(r,\psi)=\frac{c_y^\alpha\rho b}{2}\,\omega^2R^2(\bar{r}+\mu\sin\psi).$$

Учитывая эти обозначения и подставляя полученное выражение для T в уравнения колебаний (3.29), (3.30), после переноса членов, содержащих неизвестную y в левую часть, получим

$$(EIy'')''-(Ny')'+m\ddot{y}-T_2y'+T_3\frac{1}{\omega}\dot{y}=T_1. \tag{5.22}$$

Это уравнение — уравнение в частных производных с переменными коэффициентами T_2 и T_3 — функциями радиуса и азимута. Уравнение (5.22) необходимо рассматривать совместно с граничными условиями (3.3), (3.4) или (3.5). Обратимся к одному из приближенных способов — методу Галеркина. Решение ищем в форме ряда:

$$y=(r,\ t)=\sum\delta_i(t)\zeta_i(r). \tag{5.23}$$

Формула (5.23) — сумма произведений функций только времени $\delta_i(t)$ на функции только радиуса $\zeta_i(r)$. Зададимся системой функций ζ_i. Требования к выбору их состоят в том, что каждая из функций ζ_i в отдельности должна удовлетворять граничным условиям, а система функций должна быть полной. Одним из обычных, хотя и не обязательным, приемов является выбор в качестве функций ζ_i форм собственных колебаний вращающейся лопасти.

Следуя методу Галеркина, подставим ряд (5.3) в уравнение (5.22), умножим каждый член на одну из функций ζ_k и проинтегрируем получившееся выражение по радиусу лопасти. Результат этих операций будет иметь следующий вид:

$$\int_0^R(EI\sum\delta_i\zeta_i'')''\zeta_k dr-\int_0^R(N\sum\delta_i\zeta_i')'\zeta_k dr+\int_0^R m\sum\ddot{\delta}_i\zeta_i\zeta_k dr-$$

$$-\int_0^R T_2\sum\delta_i\zeta_i'\zeta_k dr+\int_0^R T_3\frac{1}{\omega}\sum\dot{\delta}_i\zeta_i\zeta_k dr=\int_0^R T_1\zeta_k dr. \tag{5.24}$$

Введем дополнительно к (3.36) обозначения

$$\int_0^R T_2\zeta_i'\zeta_k dr = g_{ik}(t);\ \int_0^R T_3 \frac{1}{\omega}\zeta_i\zeta_k dr = h_{ik}(t);\ \int_0^R T_1\zeta_k dr = \Phi_k(t). \qquad (5.25)$$

С учетом (3.36) и (5.25), изменив порядок действий (интегрирование и суммирование) выражение (5.24) можно переписать так:

$$\sum_i [m_{ik}\ddot{\delta}_i + h_{ik}\dot{\delta}_i + (c_{ik} - b_{ik} - g_{ik})\delta_i] = \Phi_k,\ k = 0, 1, \ldots \qquad (5.26)$$

Используя поочередно каждую функцию ζ из системы функций, входящих в ряд (5.23), можно получить столько уравнений типа (5.26), сколько взято членов в ряде (5.23). Таким образом, получается система уравнений типа (5.26), отличающихся друг от друга формально индексом k, а по существу — видом функции ζ_k, а следовательно, величинами коэффициентов m_{ik}, c_{ik}, b_{ik} и др.

Система уравнений (5.26) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений с неизвестными функциями азимута δ_i. Причем особенностью этих уравнений является наличие переменных, периодических коэффициентов при неизвестных $h_{ik}(t)$ и $g_{ik}(t)$. Вследствие этого решение системы (5.26) ищем снова в форме ряда для каждой неизвестной функции δ_i. Так как на установившемся режиме полета решение должно быть периодической функцией азимута, то δ_i может быть записано в виде

$$\delta_i = \sum_{n=0} A_n^{(i)} \cos n\omega t + \sum_{n=1} B_n^{(i)} \sin n\omega t,\ i = 0, 1, \ldots \qquad (5.27)$$

В этом выражении $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$ — неизвестные коэффициенты, которые рассматриваются как постоянные, не зависящие ни от радиуса, ни от азимута. Вторично следуя методу Галеркина, ряды (5.27) подставим в уравнения системы (5.26), умножим каждый член на одну из функций $\cos k\omega t$, $\sin k\omega t$ и проинтегрируем получившиеся выражения в пределах от 0 до $T = 2\pi/\omega$ — периода (продолжительности) одного оборота винта. В результате получим из каждого уравнения системы (5.26) новую систему теперь уже алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$. Системы, полученные из каждого уравнения, оказываются связанными между собой и образуют одну общую систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$. В общем случае выполнение всех этих преобразований чрезвычайно громоздко. Можно воспользоваться готовыми результатами ([23] гл. 1, § 8).

В ряде (5.23) для практических целей, как правило, необходимо взять четыре члена. Поэтому в системе уравнений (5.26) будет четыре уравнения. Каждую неизвестную функцию δ_i представляют в в виде ряда, состоящего из постоянной части и первых пяти — восьми гармоник. Таким образом, для каждого δ_i мы будем иметь до $2\times 8 + 1 = 17$ неизвестных коэффициентов $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$.

Общее число неизвестных будет $17\times 4 = 68$ и столько же будет уравнений. Поэтому возникает сложность в решении такой системы даже при использовании ЭЦВМ. Обычно применяется метод последовательных приближений, основывающийся на том, что коэффициенты $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$, соответствующие низшим гармоникам, незначительно зависят от коэффициентов $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$, более высоких гармоник и, кроме того, коэффициенты $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$, соответствующие одной из функций δ_i, незначительно зависят от величины коэффициентов $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$, соответствующих функциям δ_i с бо́льшим индексом i.

Конечной целью расчета является определение нормальных напряжений в сечениях лонжерона. Для этого по найденным величинам $A_n^{(i)}$ и $B_n^{(i)}$ вычисляются по формулам (5.27) значения δ_i для различных моментов времени t. Используя следующее из формулы (5.23) соотношение $y'' = \sum \delta_i\zeta_i''$, можно вычислить значения $y'' = f(r, t)$. В заключение по формуле (3.17) определяются нормальные напряжения.

Рассмотрим теперь некоторые упрощения. В качестве функций ζ выберем собственные формы изгибных колебаний вращающейся лопасти $\xi_{i\,\text{вр}}$. Тогда на основе свойства ортогональности форм собственных колебаний (3.45) и (3.46) имеем следующие равенства: $m_{ik} = 0$, $c_{ik} - b_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Заменим теперь коэффициент h_{ik}, являющийся функцией азимута, его средним за оборот значением $h_{ik} \approx (h_{ik})_{\text{ср}}$, что дает возможность избавиться в уравнениях от периодических коэффициентов. Наконец, хотя это строго и не обосновано, положим $g_{ik} = 0$ и $h_{ik} = 0$ при $i \neq k$. Тогда система (5.26) распадается на независимые дифференциальные уравнения вида

$$m_{kk}\ddot{\delta}_k + h_{kk}\dot{\delta} + (c_{kk} - b_{kk})\delta_k = \Phi_k,\ k = 0, 1, \ldots \qquad (5.28)$$

Если правую и левую части уравнения (5.28) разделить на m_{kk} и вспомнить формулу (3.47) для определения собственной частоты вращающейся лопасти, то получим:

$$\ddot{\delta}_k + 2n_{kk}\dot{\delta}_k + p_k^2\delta_k = \frac{\Phi_k}{m_{kk}},\ k = 0, 1, \ldots, \qquad (5.29)$$

где $n_{kk} = \dfrac{h_{kk}}{2m_{kk}}$, $p_k^2 = \dfrac{c_{kk} - b_{kk}}{m_{kk}}$.

Форма каждого из этих уравнений совпадает с формой уравнения, описывающего вынужденные колебания линейной системы с одной степенью свободы, свойства колебаний которой хорошо известны. Амплитуды колебаний системы с одной степенью свободы зависят от соотношения частот вынуждающей силы и собственной частоты. Если частота одной из гармоник $f_{\text{в}i} = in$ аэродинамической нагрузки, входящей в правые части уравнений (5.29), окажется близкой к собственной частоте какого-либо тона f_c, то соответствующая функ-

ция δ_k будет содержать в числе других гармонику с частотой $f=in$ с большой амплитудой. Следовательно, возникнут большие колебания лопасти с формой этого тона и с частотой этой гармоники. Причем из формулы (3.17) следует, что большие изгибающие моменты возникнут в тех сечениях, в которых будут большие значения функции ξ''.

Если параметры лопасти выбраны так, что совпадения собственных частот и частот действующих гармоник нагрузки при рабочих частотах вращения винта отсутствуют, то при небольших амплитудах гармоник аэродинамической нагрузки будут относительно невелики и соответствующие гармоники функций δ_i, а следовательно, и величины изгибающих моментов. Гармоники аэродинамической нагрузки выше второй на всех режимах полета, даже в диапазоне малых скоростей, имеют относительно малые величины амплитуд. Поэтому появление больших по величине амплитуд третьей или более высоких гармоник изгибающего момента может быть вызвано только какой-либо специфической причиной, и прежде всего — наличием резонанса в диапазоне рабочих частот вращения винта. В условиях резонанса амплитуда третьей или более высокой гармоники изгибающих моментов может быть того же порядка, что и амплитуда первой гармоники.

§ 5.4. О ДРУГИХ МЕТОДАХ РАСЧЕТА ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАСТИ

Расчеты, основанные на использовании приближенной зависимости (5.21), могут в известных случаях привести к погрешностям. Существуют более точные методы расчета вынужденных колебаний по аэродинамическим нагрузкам, определяемым на основе аэродинамической теории более высокого уровня с учетом данных круговой продувки, влияния сжимаемости, нестационарности обтекания и переменных индуктивных скоростей, т. е. в соответствии с общей схемой рис. 5.4. К их числу относятся: комбинированный метод с использованием форм собственных колебаний и численного интегрирования по времени и метод непосредственного определения траекторий движения точек лопастей. Рассмотрим сначала основные черты первого из них. Вернемся к уравнению изгибных колебаний (3.29). Будем искать его решение, как и в § 5.3, в виде ряда (5.23). В отличие от выкладок в предыдущем параграфе, в качестве функций радиуса сразу же выбираем собственные формы колебаний вращающейся лопасти, а метод Галеркина применим непосредственно к уравнению (3.29), не подставляя аналитического выражения для аэродинамической нагрузки. В результате получим уравнения вида

$$\int_0^R \left(EI\sum \delta_i\xi_i''\right)''\xi_k dr - \int_0^R \left(N\sum \delta_i\xi_i'\right)'\xi_k dr + \int_0^R m\sum \delta_i\xi_k dr = \int_0^R T_0\xi_k dr. \quad (5.30)$$

Число этих уравнений равно числу членов ряда (5.3). Используя обозначения (3.36) и учитывая, что при $i\neq k$ коэффициенты $m_{ik}=0$ и $c_{ik}-b_{ik}=0$, уравнения (5.30) можно записать так:

$$m_{kk}\ddot{\delta}_k+(c_{kk}-b_{kk})\delta_k=\int_0^R T\xi_k dr,\ k=0,1,\ldots \quad (5.31)$$

Теперь рассмотрим способ нахождения функций δ_i, учитывая при этом, что аэродинамическая нагрузка T пока не определена. Сущность этого способа состоит в следующем. Для начального момента времени t_0 задаются значения $\delta_k(t_0)$ и $\dot{\delta}_k(t_0)$, по которым с помощью формулы (5.23) определяются перемещение $y(t_0)$ и скорость $\dot{y}(t_0)$. Далее с учетом найденных значений $y(t_0)$ и $\dot{y}(t_0)$ в соответствии со схемой рис. 5.4 определяется величина T в каждом сечении лопасти. Конечно, эта величина T может не совпадать с действительным значением T в данном сечении лопасти, на данном азимуте, в данном режиме. Однако это не существенно, так как рассматриваемый метод относится к методам последовательных приближений и значения функций y и T, найденные в первом приближении, будут затем уточнены. Обращаясь теперь к уравнениям (5.31), можно, рассматривая их как формулы для определения δ:

$$\ddot{\delta}_k=\frac{1}{m_{kk}}\left[\int_0^R T\xi_k dr-(c_{kk}-b_{kk})\delta_k\right],\ k=0,1,\ldots, \quad (5.32)$$

найти начальные значения $\ddot{\delta}_k(t_0)$.

Дальнейшим шагом является определение перемещений, скоростей и ускорений в следующий момент времени: $y(t_0+\Delta t)$, $\dot{y}(t_0+\Delta t)$ и $\ddot{y}(t_0+\Delta t)$. Для этого надо воспользоваться одним из методов численного интегрирования. Однако не всякий из них приемлем. Так, для данной задачи оказывается нецелесообразным применение известного метода численного интегрирования Эйлера. Выбор метода численного интегрирования во многом определяет затраты времени на расчет, которые могут оказаться неприемлемыми даже для ЭЦВМ с большой скоростью счета. Время счета, очевидно, зависит от принятого шага Δt. Но при неудачном выборе метода численного интегрирования и большой величине Δt может оказаться, что расчет будет расходящимся или неудовлетворительным по точности. Уменьшение же величины Δt ведет к увеличению времени счета. Подробные исследования, проведенные автором рассматриваемого метода расчета изгибных колебаний А. В. Некрасовым [22, 23], показали, что одним из наиболее подходящих является способ интегрирования с повторным пересчетом. Он состоит в следующем. Первые значения $\delta_k^{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)$ и $\dot{\delta}_k^{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)$ в момент времени $t_0+\Delta t$ определяются по формулам

$$\delta_k^{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)=\delta_k(t_0)+\Delta t\dot{\delta}_k(t_0)+\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\delta}_k(t_0);$$

$$\dot{\delta}_k^{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)=\dot{\delta}_k(t_0)+\Delta t\ddot{\delta}_k(t_0).$$

По найденным значениям $\delta_k^{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)$ и $\dot{\delta}_k^{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)$ определяется аэродинамическая нагрузка T и из уравнений (5.32) — величины $\ddot{\delta}_k^{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)$. Далее определяется

$$\ddot{\delta}_{k\text{ср}}=\frac{\ddot{\delta}^{\mathrm{I}}(t_0)+\ddot{\delta}_k^{\mathrm{I}}(t_0+\Delta t)}{2}$$

и производится повторный пересчет:

$$\dot{\delta}_k^{\mathrm{II}}(t_0+\Delta t)=\delta_k(t_0)+\Delta t\dot{\delta}_k(t_0)+\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\delta}_{k\text{ср}};$$

$$\dot{\delta}_k^{\mathrm{II}}(t_0+\Delta t)=\delta_k(t_0)+\Delta t\ddot{\delta}_{k\text{ср}}.$$

Эти значения $\delta_k^{\mathrm{II}}(t_0+\Delta t)$ и $\dot{\delta}_k^{\mathrm{II}}(t_0+\Delta t)$ считаются окончательными для момента времени $t_0+\Delta t$. По ним находится снова величина $T(t_0+\Delta t)$ и из уравнений (5.32) — новые значения $\ddot{\delta}_k^{\mathrm{II}}(t_0+\Delta t)$, также считающиеся окончательными. После таких расчетов выполняется в том же порядке переход к следующему моменту времени.

Постепенно такой расчет выполняется для интервала времени $\tilde{T}_1$, равного продолжительности одного оборота винта $\tilde{T}$. Очевидно, что полученные в конце такого расчета значения δ_k и $\dot{\delta}_k$ не совпадают с произвольно выбранными начальными значениями $\delta_k(t_0)$ и $\dot{\delta}_k(t_0)$. Поэтому расчет продолжается для следующего, равного продолжительности одного оборота винта интервала $\tilde{T}_2=\tilde{T}$ и т. д. При правильном выборе шага Δt разница результатов счета для любых двух моментов времени, отличающихся на величину $\tilde{T}$, постепенно уменьшается. Критерием для прекращения счета служит неравенство

$$\max_{0<t<T}|\delta(t+T)-\delta(t)|<\varepsilon,$$

где ε — заранее заданная величина (обычно $\varepsilon=0{,}01...0{,}02$). При удачно выбранных значениях $\delta_k(t_0)$ и $\dot{\delta}_k(t_0)$ расчет может окончиться через 2—3 оборота винта. Рекомендации по выбору шага Δt даны в [22 и 23]. После окончания такого расчета по известным величинам δ_k определяются изгибающие моменты или напряжения для каждого азимута.

Методы расчета изгибных колебаний с непосредственным определением траекторий движения точек лопасти [23] базируются на представлении лопасти в виде отдельных участков и рассмотрения уравнений движения каждого участка

$$m_i\ddot{y}_i=C_i+T_i \tag{5.33}$$

и уравнений связи по изгибающим моментам и деформациям соседних участков. В уравнениях (5.33) C_i — упругие силы, действующие на данный участок от соседних.

Рассматриваются две модели лопасти: балочная и шарнирная. Первая из них в основном похожа на модель, применявшуюся (в § 3.9) при изучении свободных колебаний. Дополнительно необходимо приложить нагрузки T, действующие на каждый участок. Они считаются приложенными в виде сосредоточенной силы T_i в конце каждого участка.

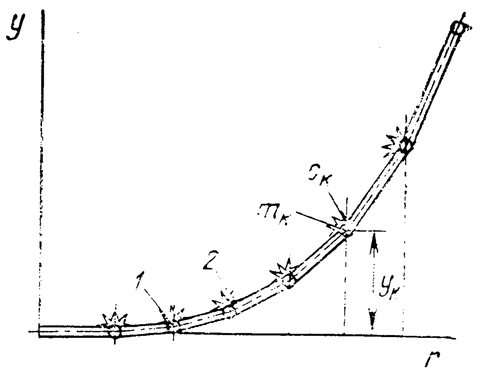


Рис. 5.5. Шарнирная модель лопасти:

1 — шарнир и масса; *2* — пружина

В шарнирной модели участки, на которые разбита лопасть, считаются абсолютно жесткими и соединенными между собой с помощью шарниров, а упругость имитируется пружинками, включенными между участками (рис. 5.5). Масса участка разносится по его концам. В обоих вариантах расчеты ведутся с применением численного интегрирования. Подробно эти методы описаны в [22 и 23].

В ряде работ рассматриваются и другие методы расчета изгибных колебаний в плоскости взмаха. Ранние работы, выполненные в период, когда еще не были освоены ЭЦВМ, в значительной мере были посвящены отысканию способов сокращения объема вычислительных работ, основанных на различных допущениях. С появлением ЭЦВМ эти работы потеряли практическую ценность. Оценивая целесообразность применения других методов, основанных на счете с помощью ЭЦВМ, необходимо прежде всего изучить принятые в них допущения. Есть методы, по допущениям не отличающиеся от описанных в данной главе и принятых в практике, но использующие другой математический аппарат. Они не могут дать новые результаты. Вместе с тем их внедрение потребовало бы трудоемкой работы по составлению, отладке и своению сложных программ. Однако предлагаемый в этих работах математический аппарат может оказаться полезным.

В то же время существующие методы дают результаты, не полностью совпадающие с данными эксперимента. Поэтому дальнейшая работа по уточнению существующих методов на основе более глубокого проникновения в суть рассматриваемых явлений является, несомненно, целесообразной.

§ 5.5. О РАСЧЕТЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ВИДОВ КОЛЕБАНИЙ

Существуют методы расчета совместных поперечных (изгибных в двух плоскостях) [51], изгибных в плоскости взмаха и крутильных [23], а также поперечных и крутильных колебаний [21]. Они базируются в основном на тех же приемах, что и рассмотренные в § 5.4, — методах разложения по формам собственных колебаний и численного интегрирования. Аэродинамическая нагрузка определяется наиболее общим методом, т. е. по схеме рис. 5.4 с дополнениями для вычисления аэродинамических моментов сечений. При совместных колебаниях в уравнениях движения появляются нелинейные члены. Метод численного интегрирования позволяет их учесть, так же как нелинейную характеристику демпфера вертикального шарнира. Наиболее глубоко задача о совместных колебаниях исследована в работах А. Ю. Лисса [19, 20, 21]. Направлениями дальнейшего раз-

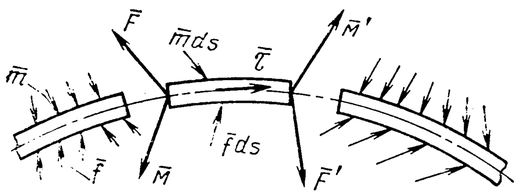


Рис. 5.6. Силы и моменты, действующие на элемент тонкой балки

вития методов расчета вынужденных колебаний являются более точное определение аэродинамической нагрузки, учет эффекта действия перерезывающих сил, учет совместности колебаний лопастей и упругого фюзеляжа и др.

В данном курсе мы не можем подробно останавливаться на этих исследованиях. Уделим только некоторое внимание исходной системе уравнений движения тонкой балки.

Рассматривая (рис. 5.6) равновесие некоторого участка упругой изогнутой и закрученной тонкой балки [36], можно написать два векторных уравнения:

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = -\vec{f}; \quad \frac{d\vec{M}}{ds} = -\vec{\tau} \times \vec{F} - \vec{m}.$$

Здесь $\vec{F}$ и $\vec{M}$ — векторы внутренних упругих сил и моментов; $\vec{f}$ и $\vec{m}$ — векторы внешних погонной нагрузки и погонного момента; $\vec{\tau}$ — единичный вектор, касательный к упругой оси, s — длина дуги упругой линии.

В проекциях на оси главного трехгранника, т. е. трехгранника, образованного осью w, направленной по касательной к упругой линии стержня, и главными осями инерции сечений u и v, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{dF_u}{ds} + qF_w - rF_v = -f_u;\\
&\frac{dF_v}{ds} + rF_u - pF_w = -f_v;\\
&\frac{dF_w}{ds} + pF_v - qF_u = -f_w;\\
&\frac{dM_u}{ds} + qM_w - rM_v = F_v - m_u;\\
&\frac{dM_u}{ds} + rM_u - pM_w = -F_u - m_v;\\
&\frac{dM_w}{ds} + pM_v - qM_u = -m_w.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Здесь F_u, F_v и F_w — перерезывающие и растягивающая силы; M_u, M_v и M_w — изгибающие и крутящий моменты; f_u и f_v — внешняя распределенная поперечная нагрузка; m_u, m_v и m_w — внешние распределенные изгибающие и крутящий моменты; p и q — кривизны проекций элемента ds упругой линии на плоскости соответственно vw и uw; r — кручение стержня.

Моменты связаны с кривизнами и кручением упругой оси известными соотношениями:

$$M_u = EI_u(p - p_0); \quad M_v = EI_v(q - q_0); \quad M_w = GI_p(r - r_0),$$

где EI_u, EI_v и GI_p — изгибные и крутильные жесткости; p_0, q_0 и r_0 — значения p, q и r для стержня без нагрузки.

Для прямого стержня $p_0 = q_0 = 0$. Для стержня без начального кручения $r_0 = 0$.

Если в выражения для $\vec{f}$, $\vec{F}$, $\vec{m}$ и $\vec{M}$ включить инерционные нагрузки, то система (5.34) превращается в систему уравнений движения тонкой балки в общем случае. Эти уравнения и являются основой для различных исследований сложных колебаний балки. Из них нетрудно получить уравнения для более простых частных случаев. Так, например, полагая $M_v = M_w = 0$ из первого и четвертого уравнений (5.34), получим уравнение изгиба в плоскости наименьшей жесткости. Если $M_w = 0$, получим систему уравнений для расчета совместных изгибных колебаний в двух плоскостях закрученной балки:

$$\frac{dF_u}{ds} + qF_w - rF_v = -f_u; \quad \frac{dM_u}{ds} - rM_v = F_v - m_u;$$

$$\frac{dF_v}{ds} + rF_u - pF_w = -f_v; \quad \frac{dM_v}{ds} + rM_u = -F_u - m_v.$$

Отметим еще, что из шестого уравнения системы (5.34) следует

$$\frac{dM_w}{ds} = -m_w - (pM_v - qM_u). \tag{5.35}$$

Это соотношение оказывается полезным для подсчета крутящих моментов (см. гл. 9).

глава 6 НАГРУЖЕНИЕ ЛОПАСТЕЙ В ПОЛЕТЕ

В поперечных сечениях лопасти несущего винта действуют изгибающие моменты в двух плоскостях, центробежная сила и момент кручения. Напряжения (касательные) от последнего обычно не имеют существенного значения для прочности лопасти с металлическим лонжероном. Стеклопластики плохо выдерживают действие касательных напряжений. Поэтому лонжероны из стеклопластика проектируют так, чтобы величина касательных напряжений от крутящего момента не превышала 0,005—0,01 ГПа (в зависимости от типа стеклопластика и конструкции лопасти). Центробежная сила определяет в основном величину статической подгрузки. Как показывает опыт проектирования, для того чтобы лопасти имели удовлетворительный ресурс, нормальные напряжения от центробежной силы не должны превышать 0,25 ГПа в стальном лонжероне и 0,08 ГПа в лонжероне из алюминиевого сплава. Исключением является комлевая часть (в месте крепления стыковочного узла), где они должны быть в два-три раза меньше. Это одно из условий выбора площадей сечений лонжерона. Изгибающие моменты вызывают как переменные, так и постоянные напряжения. Первые имеют определяющее значение для ресурса лопастей.

Изгибающие моменты лопасти, прикрепленной к втулке с помощью горизонтального и вертикальных шарниров, и соответствующее им напряженное состояние собственно лонжерона рассматриваются в § 6.1. Особенности нагружения для винта без индивидуальных ГШ даны в § 6.3, а для винта без ВШ — в гл. 8. Специфическим задачам определения напряжений в комлевой части лопасти, включающей комель лонжерона и стыковочный узел, посвящен § 6.2. В нем рассматривается также напряженное состояние обшивки.

§ 6.1. ИЗГИБАЮЩИЕ МОМЕНТЫ ЛОПАСТИ И НАПРЯЖЕНИЯ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ ИМИ В ЛОНЖЕРОНЕ

На рис. 6.1 показана типичная осциллограмма изгибающего момента в плоскости взмаха, измеренного в средней части лопасти. Переменная часть изгибающего момента определяется в основном первой и второй гармониками. Такой гармонический состав характерен для сечений, расположенных в средней части лопасти, практически на всех режимах полета. Величину переменной части изгибающего момента принято характеризовать полуразмахом переменных

изгибающих моментов, т. е. полуразностью наибольшего и наименьшего за оборот значений изгибающего момента (рис. 6.1):

$$\Delta M = (M_{max} - M_{min})/2.$$

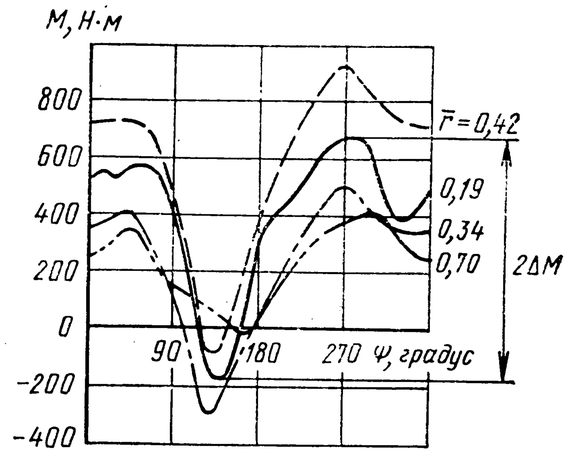


Рис. 6.1. Изменение изгибающего момента по азимуту на крейсерском режиме полета:

ΔM — полуразмах

Полуразмахи изгибающего момента в плоскости наименьшей жесткости в средней части лопасти изменяются по скорости полета так, как это показано на рис. 6.2, *а*. С ростом скорости полета их величина растет. Это объясняется ростом по скорости полета первой и второй гармоник аэродинамической нагрузки, особенно при полете с большими относительными скоростями ($\bar{V} = V/\omega R > 0{,}3$).

Как показывают подробные расчеты, величины перемещения $y(r)$, а следовательно, и кривизны $y''(r)$ при действии на лопасть только первых двух гармоник аэродинамической нагрузки определяются в основном величиной центробежной силы и в значительно меньшей мере упругими свойствами лопасти. В первом приближении можно считать, что перемещение и кривизна лопасти такие же, как у гибкой нити, не имеющей изгибной жесткости, колеблющейся в поле центробежных сил под действием поперечной аэродинамической нагрузки. Очевидно, что для такой нити перемещение y и кривизна y'' уменьшаются с увеличением центробежной силы. Поэтому при увеличении частоты вращения винта кривизна y'', как правило, уменьшается, а следовательно, на основании (3.17) уменьшаются моменты и вызываемые ими напряжения (см. рис. 6.2, *б*).

Размещение на конце лопасти дополнительной массы приводит также к уменьшению кривизны упругой нити вследствие увеличения центробежной силы. Поэтому величина изгибающего момента в плоскости наименьшей жесткости и уровень переменных напряжений в средней части лопасти при этом уменьшаются. Увеличение массы конца лопасти как средство снижения уровня переменных напряжений в ее средней части применяется на практике. Однако при этом необходимо иметь в виду увеличение центробежной силы, т. е. статической подгрузки и нагрузок на втулку несущего винта. Кроме того, изменение массовых характеристик лопасти может оказать неблагоприятное влияние на величину переменных напряжений в комлевой и концевой частях лопасти. При рассмотрении влияния параметров лопасти на вид резонансных диаграмм (см. § 4.1) отмечалось, что изменение массы или жесткости лопасти мало влияет на частоту первого тона изгибных колебаний. Это и позволяет при рассмотрении определяемых в основном первой и

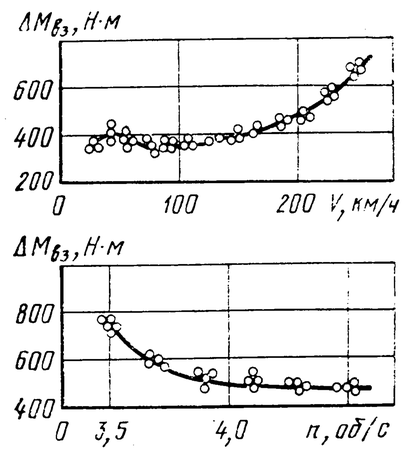


Рис. 6.2. Зависимость полуразмаха изгибающего момента в плоскости взмаха ($\Delta M_{вз}$) от скорости полета вертолета (*а*) и частоты вращения винта (*б*)

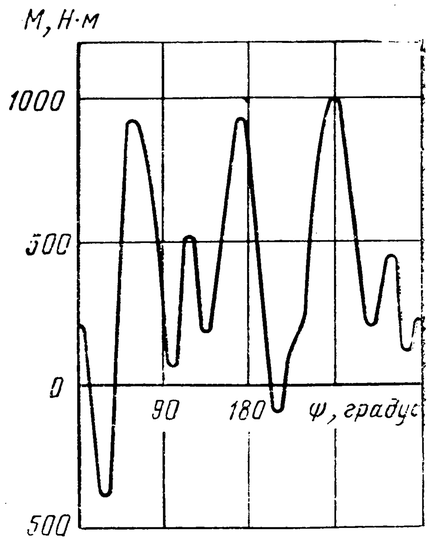


Рис. 6.3. Изменение по азимуту изгибающего момента в плоскости взмаха ($\bar{r}=0{,}9$)

второй гармониками изгибающих моментов и напряжений в средней части лопасти не обращаться к резонансной диаграмме. Но для комлевых сечений и сечений на внешнем конце лопасти, где более высокие гармоники являются существенными, такой подход оказывается неправильным.

Рассмотрим теперь следующий фактор, влияющий на величину напряжений в средней части лопасти, а именно строительную высоту лонжерона. Увеличение строительной высоты лонжерона ведет на основании формулы (3.17) к увеличению напряжений. Этот вывод кажется на первый взгляд парадоксальным. Увеличение строительной высоты обычной балки влечет за собой снижение напряжений, а не их рост. Кажущееся противоречие объясняется тем, что лопасть является балкой, на которую в отличие от невращающейся балки действуют центробежные силы. Увеличение строительной высоты влечет за собой увеличение жесткости EI, определяющей для невращающейся балки форму упругой линии. При увеличении жесткости EI кривизна y'' уменьшается и напряжения (формула 3.17) также уменьшаются. Для вращающейся лопасти, как уже упоминалось выше, изменение изгибной жесткости в обычных пределах почти не влияет на кривизну y''. Поэтому напряжения возрастают в соответствии с (3.17) пропорционально строительной высоте лонжерона.

Одним из факторов, наиболее эффективно влияющих на величину напряжений изгиба, является конструктивная крутка лопасти. Она приводит к перераспределению аэродинамической нагрузки на лопасти. С увеличением крутки по абсолютной величине, рекомен-

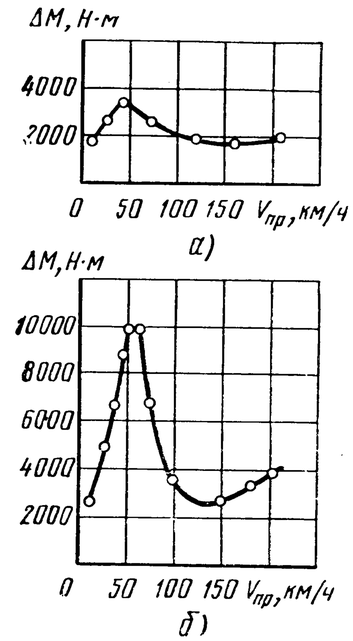


Рис. 6.4. Зависимость полуразмаха изгибающего момента от скорости полета для лопасти с хорошими частотными характеристиками (*а*) и лопасти с резонансом (*б*)

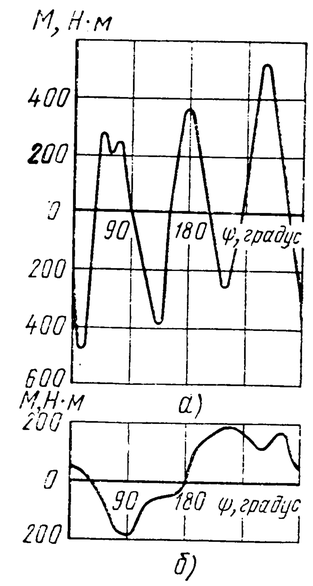


Рис. 6.5. Изменение по азимуту изгибающего момента в плоскости вращения для лопасти с резонансом (*а*) и с хорошими частотными характеристиками (*б*)

дуемым по аэродинамическим соображениям, уровень переменных изгибающих моментов существенно возрастает.

Для сечений, расположенных на внешней по радиусу части лопасти (относительный радиус $\bar{r}>0{,}7$) и в комлевой части ($\bar{r}<0{,}2$) характерны другие закономерности. На рис. 6.3 показан пример изменения по азимуту изгибающего момента в плоскости наименьшей жесткости в сечении $\bar{r}=0{,}9$. Хорошо заметны более высокие, по сравнению с первой и второй, гармоники. Они в значительной мере и определяют величину полуразмаха переменной части изгибающего момента. Как уже отмечалось выше, они особенно велики на режимах полета с малой скоростью. Поэтому закон изменения полуразмахов в этих сечениях по скорости полета имеет вид, показанный на рис. 6.4. Причем величина пика в диапазоне малых скоростей существенно зависит от резонансных характеристик лопасти. Для лопасти с резонансом в зоне рабочих оборотов переменные изгибающие моменты на малых скоростях полета достигают очень большой величины.

Изменение массовых и жесткостных параметров лопасти, а также и числа оборотов винта может привести как к положительному, так и отрицательному эффекту. Если эти меры приводят к увеличению разницы собственных частот и частот действующих гармоник, то уровень изгибающих моментов понизится.

Заметное влияние на величину изгибающих моментов оказывает угол атаки несущего винта. При малых скоростях полета с увеличением угла атаки неравномерность поля индуктивных скоростей

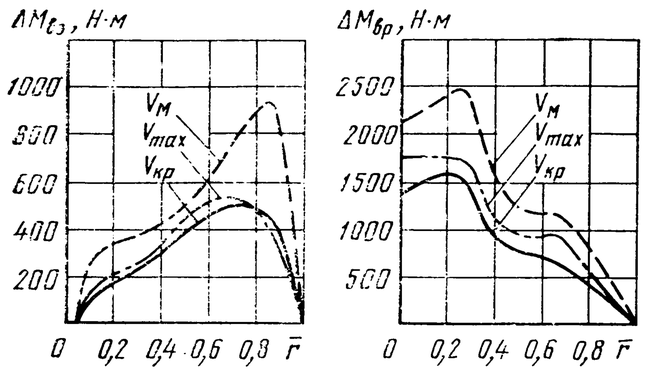


Рис. 6.6. Распределение полуразмахов изгибающих моментов в плоскости взмаха и в плоскости вращения по радиусу лопасти

увеличивается, что влечет за собой увеличение переменной части изгибающего момента. Поэтому особенно большие переменные изгибающие моменты наблюдаются при торможении вертолета. Они могут быть в 1,5—2 раза больше, чем в установившемся горизонтальном полете с малой скоростью, соответствующей пику на рис. 6.4. Поэтому, несмотря на кратковременность, режим торможения всегда рассматривается при определении ресурса лопастей.

Рассмотрим теперь изгибающий момент в плоскости наибольшей жесткости. В зависимости от резонансной диаграммы (отсутствие или наличие резонанса в диапазоне рабочих чисел оборотов) переменный изгибающий момент определяется главным образом первой гармоникой (рис. 6.5, *б*) или суммой, включающей заметные по величине резонирующие гармоники (рис. 6.5, *а*). Основные закономерности изменения изгибающего момента в плоскости наибольшей жесткости в зависимости от режимов полета (скорости и частоты вращения) и параметров лопасти (ее жесткостных и массовых характеристик) в основном такие же, как и для момента в плоскости наименьшей жесткости.

Отметим, что распределения моментов по радиусу в плоскости взмаха и в плоскости вращения отличаются друг от друга (рис. 6.6). Момент в плоскости взмаха обращается в горизонтальном шарнире в нуль. Момент в плоскости вращения в вертикальном шарнире в нуль не обращается вследствие наличия демпфера. Его величина в шарнире ограничена моментом демпфера.

В сечениях лонжерона в точках, не лежащих на главных осях, возникают напряжения от обоих компонентов изгибающего момента $M_{вз}$ и $M_{вр}$. Как правило, для контурных лонжеронов лопастей с разрезными хвостовыми отсеками наибольшие полуразмахи суммарных переменных напряжений в сечениях на относительном радиусе $\bar{r}>0{,}2$ отмечаются в точке, лежащей на нижней поверхности лопасти против задней стенки лонжерона (точка *V* на рис. 4.3, *а*), а в сечениях на $\bar{r}<0{,}2$ — в носике профиля (точка *IV* на рис. 4.3, *а*).

Для трубчатого лонжерона наибольший уровень переменных напряжений в сечениях на $\bar{r}>0{,}2$ отмечается обычно в точках на поверхности лонжерона снизу — сзади (точка *II* на рис. 4.3, *б*), а в сечениях на $\bar{r}<0{,}2$ — в точках, расположенных вблизи главной оси *OX* (точки *I* и *III* на рис. 4.3, *б*). Для лопастей с неразрезными отсеками большие напряжения возникают в хвостовом стрингере (точка *VI* на рис. 4.3, *а*).

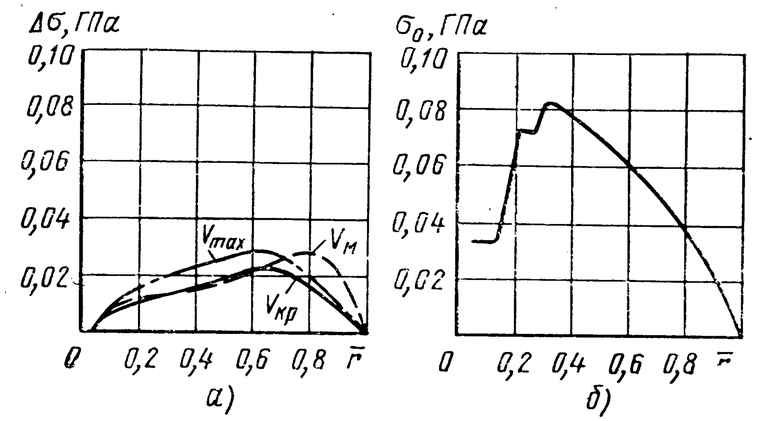


Рис. 6.7. Изменение амплитуд переменных напряжений (*а*) и напряжений статической подгрузки (*б*) по радиусу лопасти

Как показывают результаты эксперимента, напряжения в наиболее нагруженных точках для лопасти с разрезными отсеками в сечениях $\bar{r}>0{,}2$ примерно на 2/3 определяются моментом в плоскости наименьшей жесткости, а в сечениях $\bar{r}<0{,}2$ — в большей мере моментом в плоскости наибольшей жесткости.

При полете на крейсерской скорости $V_{кр}$ и на скоростях, больших $V_{кр}$, обычно наибольшие переменные напряжения возникают в сечениях (рис. 6.7, *а*), расположенных в средней части лопасти (на относительных радиусах $\bar{r}=0{,}5...0{,}7$). В горизонтальном полете на малых скоростях и при торможении наибольшие переменные напряжения возникают в сечениях ближе к внешнему концу лопасти ($\bar{r}=0{,}7...0{,}9$). Статическая подгрузка обычно увеличивается к комлю лопасти (рис. 6.7, *б*). Поэтому при определении ресурса лопасти обычно рассматриваются сечения на разных относительных радиусах ($\bar{r}=0{,}2...0{,}8$) и выбирается то из них, для которого повреждаемость, вычисленная по величинам напряжений на всех режимах с учетом их относительной продолжительности (см. гл. 1) и с учетом статической подгрузки, оказывается наибольшей.

Общие качественные закономерности, изложенные выше применительно к одновинтовому вертолету, остаются справедливыми и для двухвинтовых вертолетов. Однако величины переменных напряжений могут быть существенно больше. Действительно, на двухвинтовых вертолетах имеет место влияние одного винта на другой. Поле индуктивных скоростей вблизи лопастей определяется не только собственными индуктивными скоростями, но и и индуктивными скоростями, вызванными в этих точках другим винтом. Эти дополнительные индуктивные скорости вызывают соответствующие изменения углов атаки сечений, а следовательно, и нагрузок в сечениях лопасти. Важно отметить, что в различных точках диска рассматриваемого винта другой винт вызывает различные по величине индуктивные скорости. Поэтому влияние одного винта на другой проявляется в увеличении переменных нагрузок, а следовательно, переменных изгибающих моментов на лопасти. Рассматриваемый эффект зависит от режима полета и взаимного расположения вин-

тов. Особенно велики дополнительные переменные моменты на режимах полета в диапазоне малых скоростей, на которых возникают большие переменные индуктивные скорости.

Для вертолетов поперечной схемы взаимное влияние винтов относительно невелико. Верхний винт вертолета соосной схемы обычно существенно влияет на уровень переменных напряжений на нижнем винте. Для вертолетов продольной схемы отмечается значительное взаимное влияние винтов, особенно переднего винта на задний, напряжения в лопастях которого могут быть значительно (иногда в несколько раз) больше, чем в лопастях переднего винта или изолированного винта, т. е. винта, на который не влияют другие винты. На ряде режимов уровень переменных моментов и напряжений на переднем винте также заметно выше, чем на изолированном. Очевидно, что взаимное влияние винтов следует учитывать при расчете лопастей, а соответствующее увеличение переменных напряжений, приводящее в конечном итоге к необходимости увеличения массы конструкции для обеспечения заданного ресурса — при выборе схемы вертолета.

§ 6.2. КОМЛЕВАЯ ЧАСТЬ ЛОПАСТИ. НАПРЯЖЕНИЯ В ОБШИВКЕ

В комлевой части лопасти действуют большие по величине изгибающий момент в плоскости вращения и центробежная сила. Изгибающий момент в плоскости взмаха уменьшается до нуля в горизонтальном шарнире. Однако наличие перепадов массы и жесткости на переходном участке от втулки к лопасти может привести к большим величинам изгибающего момента в этой части лопасти [23]. Величины переменных изгибающих моментов определяются при общем расчете вынужденных изгибных колебаний лопасти (см. гл. 5). На рассматриваемом участке изгибающие моменты и центробежная сила передаются на стыковочный узел.

Для лопасти с контурным лонжероном вначале предположим, что щеки стыковочного узла связаны без проскальзывания с поверхностью лонжерона по всей площади их соприкосновения. Примем в первом приближении гипотезу плоских сечений, т. е. будем считать, что точки, расположенные до приложения нагрузки в одной плоскости, перпендикулярной к оси лонжерона, остаются в плоскости, которая при изгибе поворачивается, а при растяжении смещается поступательно. При таких предположениях отношение части изгибающего момента, действующей в узле, M_y, к части момента, воспринимаемой лонжероном, $M_л$ будет пропорционально изгибным жесткостям узла ($EI_у$) и лонжерона ($EI_л$):

$$M_у/M_л = EI_у/EI_л. \qquad (6.1)$$

Так же будет распределена и центробежная сила:

$$N_у/N_л = EF_у/EF_л. \qquad (6.2)$$

Здесь $N_у$ и $N_л$ — осевые силы в обеих щеках узла и в лонжероне от

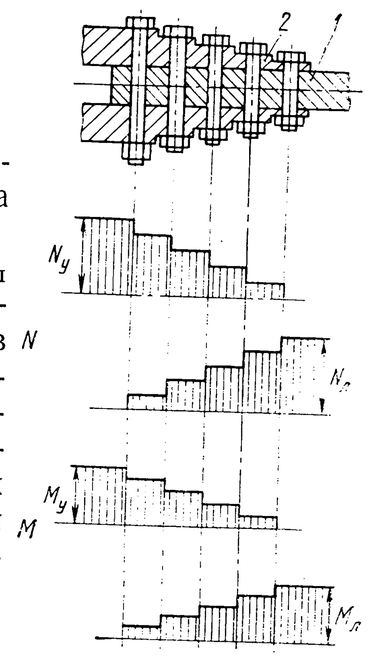


Рис. 6.8. Схема распределения центробежной силы и изгибающего момента по лонжерону (*1*) и щекам стыковочного узла (*2*)

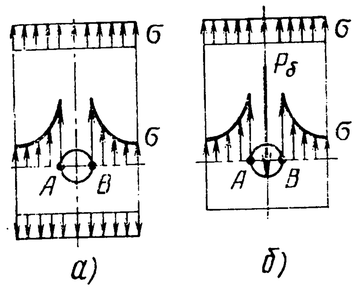
центробежной силы лопасти; $F_у$ и $F_л$ — площади поперечных сечений обеих щек узла и лонжерона.

Очевидно, что сумма осевых сил $N_у$ и $N_л$ равна центробежной силе, а сумма моментов $M_у$ и $M_л$ — изгибающему моменту в рассматриваемом сечении. В действительности передача изгибающего момента и центробежной силы происходит в основном через болты крепления стыковочного узла к лонжерону. Поэтому эпюры осевой силы и изгибающего момента имеют вид, схематически (без учета изменения M и N по радиусу лопасти и эффекта упругости болтов) показанный на рис. 6.8.

Из формул (6.1) и (6.2) и рис. 6.8 следует, что если жесткость узла, определяемая шириной и толщиной щек, постоянна по радиусу, то передача изгибающего момента и центробежной силы осуществляется в основном крайними болтами, а остальные болты нагружены мало. Это приводит к снижению усталостной прочности как лонжерона, так и щек узла из-за увеличения напряжений около отверстий под крайние болты. Поэтому целесообразно предусмотреть плавное или ступенчатое уменьшение ширины и толщины щек по их длине.

Распределения напряжений в сечении щеки и стенке лонжерона не являются равномерными из-за наличия концентраторов — отверстий и сил, приходящих от болтов. Наличие отверстия приводит к концентрации напряжений от осевой силы, переданной на щеку предыдущими болтами (рис. 6.9, *а*). Этот вид концентрации напряжений у данного отверстия существует независимо от наличия или отсутствия болта в нем. Наличие болта приводит к появлению добавочных напряжений, вызываемых силой $P_б$, передаваемой этим болтом (рис. 6.9, *б*). Наибольшие напряжения возникают в точках A и B, расположенных по концам диаметра отверстия. Напряжения от силы, приходящей от рассматриваемого болта, суммируются с напряжениями от осевой силы в щеке, вызванной предыдущими болтами. Суммарные максимальные напряжения будут значительно больше номинальных, определенных без учета отверстия и болта.

Для лопастей, имеющих лонжерон из стеклопластика, создание надежного комлевого узла является особенно сложной задачей, так как стеклопластик может иметь плохие характеристики при работе на срез и скалывание. В каждом конкретном случае необходимы специальные экспериментальные работы для отработки конструкции такого стыка.



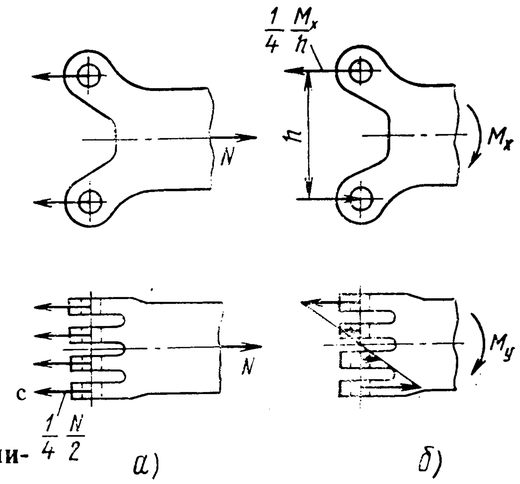


Рис. 6.9. Концентрация напряжений:
а — от отверстия; *б* — от силы, приходящей с болта

Рис. 6.10. Распределение сил по проушинам стыковочного узла:
а — от центробежной силы; *б* — от моментов M_x и M_y

Изгибающие моменты и центробежная сила в стыковочном узле нагружают его проушины. Центробежная сила приблизительно равномерно распределяется по проушинам. Изгибающие моменты вызывают силы (рис. 6.10), величины которых могут быть найдены на основании гипотезы плоских сечений. Расчет проушин по заданным силам выполняется на основе экспериментальных материалов (см. гл. 9 и 15).

Обшивка отсеков воспринимает аэродинамическую нагрузку. Поэтому в ней появляются соответствующие нормальные и касательные напряжения. В зависимости от конструкции крепления обшивки к лонжерону в ней могут возникнуть большие по величине нормальные и касательные напряжения вследствие изгиба лонжерона. Рассмотрим лопасти наиболее распространенной конструкции с контурным лонжероном, к которому приклеены отдельные, не связанные жестко между собой отсеки.

Из результатов продувок, по известным из расчета аэродинамических нагрузок (см. § 5.2) значениям угла атаки и числа M, можно получить эпюры распределения по хорде разности давлений на верхней и нижней поверхности профиля Δp. Создаваемые ею перерезывающая сила и момент, стремящийся изогнуть отсек шириной l вверх или вниз (рис. 6.11, *б*), равны

$$Q=\int_x^b l\Delta p dx;\quad M=\int_x^b\int_x^b l\Delta p dx dx.$$

В обшивке изгибающий момент вызывает нормальные, а перерезывающая сила — касательные напряжения.

Лонжерон лопасти, изгибаясь в плоскости вращения, деформирует приклеенный к нему хвостовой отсек так, как это схематически изображено на рис. 6.11, *а*. В обшивке возникают нормальные напряжения как в площадках, перпендикулярных (σ_x), так и параллельных (σ_r) хорде. Пусть лопасть изогнута внешним концом впе-

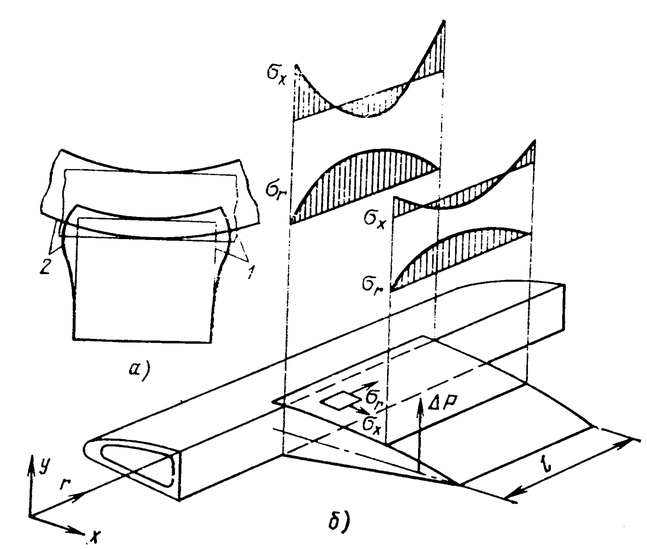


Рис. 6.11. Напряжения в обшивке:
а — деформации отсека, вызванные изгибом лонжерона; *б* — нагружение отсека; *1* — лонжерон и обшивка до деформации; *2* — лонжерон и обшивка после деформации

ред (по вращению). При этом напряжения σ_x в средней (по радиусу) части отсека будут сжимающими, и по концам — растягивающими. При изгибе назад (против вращения) получается обратная картина распределения этих напряжений. Система таких напряжений является самоуравновешивающейся. Рассматривая (см. рис. 6.11, *б*) несколько сечений, перпендикулярных хорде, проведенных на разном расстоянии от лонжерона, можно отметить, что к задней кромке напряжения σ_x уменьшаются, что объясняется тем, что задняя кромка ничем не удерживается от перемещений в плоскости вращения. Так как изгибающий момент является переменным, то напряжения σ_x также будут переменными по времени. Наибольшие по величине полуразмаха напряжения $\Delta\sigma_x$ возникают в углах отсека, примыкающих к лонжерону. Одновременно возникают переменные нормальные напряжения σ_r. Они увеличиваются к середине отсека. Деформациям обшивки, вызываемым изгибом лонжерона в плоскости взмаха, также соответствуют появляющиеся в ней напряжения. Величины рассматриваемых напряжений, как это следует из изложенного, пропорциональны величинам переменной части изгибающих моментов в плоскости взмаха и вращения. Расчет напряжений по известным величинам $M_{вз}$ и $M_{вр}$ производится методами теории упругости.

§ 6.3. ОСОБЕННОСТИ НАГРУЖЕНИЯ ЛОПАСТЕЙ ВИНТА БЕЗ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ШАРНИРОВ

При анализе нагружения необходимо различать (по способу крепления втулки к валу) два вида винтов без индивидуальных горизонтальных шарниров: с жестким креплением и с шарнирным креплением (втулка на кардановом подвесе, втулка с общим ГШ). Отсутствие у лопасти индивидуального горизонтального шарнира может привести, казалось бы, к очевидному выводу о том, что изгибающий момент в комле лопасти, как консольно закрепленной балке, будет большим по величине. Однако этот вывод правилен лишь частично. Рассмотрим постоянную часть изгибающего момента в плоскости взмаха. Пусть сначала данные лопасти прикреплены к

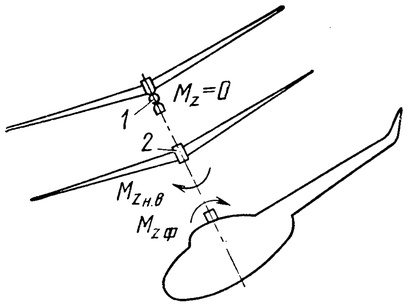


Рис. 6.12. Моменты на втулке винта без индивидуальных ГШ:

1 — втулки на кардановом подвесе; *2* — жесткое крепление втулки к валу

втулке с помощью ГШ. На определенном режиме полета угол конусности такого винта равен $a_{0ш}$. Если теперь заклинить ГШ, то постоянная составляющая изгибающего момента в том сечении, где был ГШ, останется равной нулю. Таким образом, если при проектировании винта с жестким креплением лопастей к втулке предусмотрен конструктивный угол конусности $a_{0к}$, величина которого выбрана из условия

$$a_{0к}=a_{0ш}, \qquad (6.3)$$

то постоянная часть изгибающего момента обращается в нуль, как при наличии ГШ. Это удается обеспечить не на всех режимах полета, так как угол $a_{0ш}$ зависит от режима работы винта и изменяется поэтому при изменении веса вертолета и режима полета (особенно при маневрах).

Переменный изгибающий момент, действующий в комле лопасти, передается на втулку. На основании правила суммирования сил и моментов лопастей на втулке (см. гл. 2) первая гармоника изгибающего момента в плоскости взмаха является проходной. На втулке ей соответствует переменный момент, имеющий ту же частоту, а амплитуду — пропорциональную амплитуде первой гармоники изгибающего момента одной лопасти. Однако для втулки на кардановом подвесе (рис. 6.12) момент на втулке должен быть равен нулю (вследствие наличия кардана). Для проходной гармоники момента это возможно только, если ее амплитуда в сечении $\bar{r}=0$ каждой лопасти обращается в нуль. Таким образом, по отношению к первой гармонике, а также и другим проходным гармоникам лопасти винта с втулкой на кардановом подвесе эквивалентны лопастям с индивидуальными ГШ.

Для винта с жестким креплением втулки к валу имеют место иные закономерности. Вследствие отсутствия кардана момент на втулке в общем случае не должен быть равным нулю. Относительно невращающихся осей, связанных с вертолетом, момент на втулке от первых гармоник изгибающих моментов лопастей является постоянным моментом с составляющими по продольной OX_1 и поперечной OZ_1 осям вертолета ($M_{x\,\text{н.в}}$ и $M_{x\,\text{н.в}}$). Эти составляющие из условия равенства нулю суммы моментов сил, действующих на вертолет на установившемся режиме полета (условие балансировки), по абсолютной величине должны равняться моментам относительно втулки сил, действующих на фюзеляж:

$$M_{x\,\text{н.в}}=-M_{x\text{ф}};\ M_{z\,\text{н.в}}=-M_{z\text{ф}}.$$

Если вертолет спроектирован так, что моменты действующих на фюзеляж сил, подсчитанные относительно втулки $M_{x\,\text{ф}}$ и $M_{z\,\text{ф}}$, равны нулю, то должны быть равными нулю составляющие момента, создаваемого винтом, $M_{x\text{н.в}}=0$ и $M_{z\text{н.в}}=0$. Это возможно только, если равна нулю амплитуда первой гармоники изгибающего момента лопасти в плоскости взмаха. Выполняя требование балансировки, летчик по необходимости отклоняет ручку управления так, чтобы нагрузки на лопасти были бы такими, при которых $M_{x\text{н.в}}=0$ и $M_{z\text{н.в}}=0$. При этом первая гармоника изгибающего момента каждой лопасти в сечении $\bar{r}=0$ также обращается в нуль. Таким образом, если момент на втулке, создаваемый силами, действующими на фюзеляж, равен нулю, то это по отношению к первой гармонике изгибающего момента в плоскости взмаха эквивалентно наличию горизонтального шарнира. По-видимому, нельзя спроектировать вертолет, чтобы условия $M_{x\text{ф}}=0$ и $M_{z\text{ф}}=0$ выполнялись на всех режимах полета. Однако на всех установившихся режимах величина первой гармоники изгибающего момента в комле лопасти ограничена из условий балансировки вертолета.

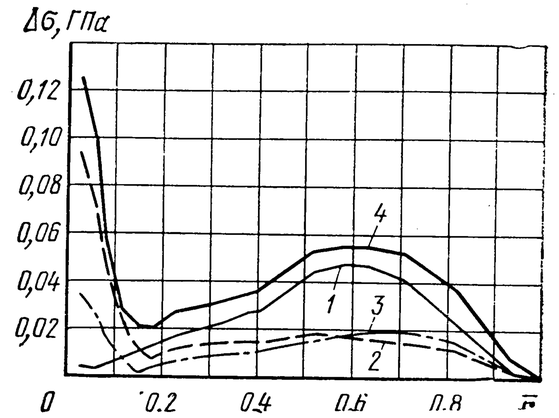


Рис. 6.13. Переменные напряжения изгиба лопасти в плоскости взмаха (жесткое крепление лопасти к втулке):

1 — первая гармоника; *2* — вторая гармоника; *3* — третья гармоника; *4* — полуразмах

Амплитуды непроходных гармоник для винта на кардановом подвесе и амплитуды любой гармоники выше первой для винта с жестким креплением втулки в комлевой части в нуль не обращаются. Они могут достигать в комле значительных величин (рис. 6.13). На внешней по радиусу части лопасти амплитуды гармоник изгибающего момента мало отличаются по величине при жестком креплении лопасти и при наличии индивидуального ГШ.

Оценивая нагружение винта с жестким креплением лопастей и втулки, необходимо особо рассматривать маневры вертолета. При отклонениях ручки управления для выполнения маневра на втулке создается момент $M_{\text{н.в}}\neq 0$, а следовательно, амплитуда первой гармоники изгибающего момента в комле возрастает и может оказаться очень большой.

Изгибающий момент в плоскости вращения для винтов обоих видов без ВШ достаточно высок (подробнее см. гл. 8).

Расчет лопастей с креплением без индивидуальных ГШ и ВШ может быть выполнен на основе изученных ранее методов (см. гл. 3 и 5).

глава 7 ФЛАТТЕР НЕСУЩЕГО ВИНТА

Эта глава посвящена колебаниям, которые в отличие от рассмотренных ранее относятся к другому классу — классу автоколебаний. В технике известно много примеров [30, 50] систем, которые при известных условиях обладают способностью поддерживать незатухающие колебания, черпая энергию из некоторого источника. Напомним, что для возбуждения рассмотренных в гл. 3 свободных колебаний энергия в систему вводится только в начальный момент времени. Установившиеся свободные колебания возможны только, если отсутствует отвод энергии. Свободные колебания без затухания являются идеализированным явлением. Для поддержания вынужденных колебаний в систему подводится энергия, компенсирующая потери механической энергии на трение. Подвод энергии осуществляется посредством действующих на систему внешних периодических возбуждающих сил. В задаче о вынужденных колебаниях лопасти такими силами являлись аэродинамические силы. Автоколебания отличаются от вынужденных колебаний отсутствием внешнего периодического воздействия. Сама колеблющаяся система обладает свойством поддерживать свои колебания, черпая из некоторого источника энергию для компенсации ее потерь на работу демпфирующих сил. Следовательно, для того чтобы установить возможность автоколебаний, надо найти канал, по которому в систему подается энергия, причем величина ее должна быть не меньше энергии, рассеиваемой при демпфировании.

§ 7.1. АВТОКОЛЕБАНИЯ ОТСЕКА ЛОПАСТИ

Оценим работу, совершаемую силами различных типов. Силы упругости являются консервативными, т. е. работа этих сил за полный цикл колебаний равна нулю. Также равна нулю работа инерционных сил за полный цикл колебаний. Рассмотрим работу аэродинамических сил. Пусть профиль, помещенный в набегающий поток воздуха, совершает поступательные перемещения перпендикулярно к скорости потока. При таком движении появляются подъемная сила Y и момент M. Приращение угла атаки $\Delta\alpha$, как это видно из рис. 7.1, равно

$$\Delta\alpha = -\dot{y}/V. \tag{7.1}$$

При малых α на основании формул (5.18) и (7.1) погонная

сила Y имеет вид

$$Y = -c_y^\alpha \frac{\rho V}{2} b\dot{y}. \tag{7.2}$$

Элементарная работа этой силы отрицательна:

$$dA = Y ds = Y y dt = -c_y^\alpha \frac{\rho V}{2} b\dot{y}^2 dt < 0.$$

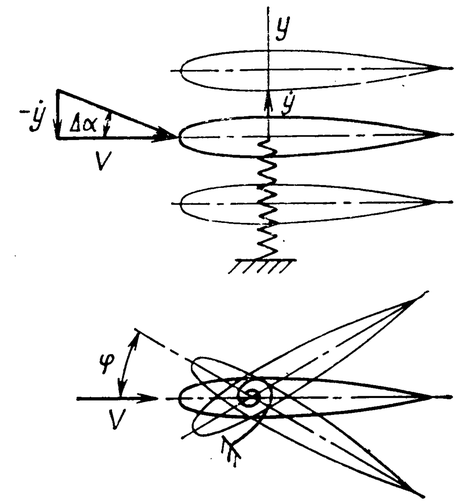


Рис. 7.1. Поступательные и вращательные колебания профиля

Следовательно, при малых перемещениях отсека возникает демпфирующая аэродинамическая сила. Так как в нашей схеме отсек совершает только поступательные перемещения, то работа аэродинамического момента M равна нулю. Таким образом, если отсек совершает только поступательные перемещения, то возможны лишь затухающие колебания.

К аналогичному выводу можно прийти, рассматривая только вращательное движение профиля — только повороты его относительно фокуса. Отметим, что эти выводы получены на основании аэродинамической теории обтекания при малых колебаниях профиля, и их нельзя распространять на все случаи колебаний с достаточно большой амплитудой (см. § 7.6).

Рассмотрим колебания при совместном поступательном и вращательном движении отсека. При вращательном движении отсека возникает подъемная сила. В данном разделе мы будем рассматривать лишь одну ее составляющую, имеющую вид

$$Y_1 = c_y^\alpha \varphi \frac{\rho V^2}{2} b.$$

Пусть вращательное движение происходит по закону

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t. \tag{7.3}$$

Сила Y_1 изменяется также по закону синуса:

$$Y = c_y^\alpha \frac{\rho V^2}{2} b\varphi_0 \sin \omega t = Y_{01} \sin \omega t.$$

Предположим, что под действием этой силы отсек будет совершать поступательные колебания с некоторым отставанием по фазе ε:

$$y = y_0 \sin(\omega t - \varepsilon) = y^{1s} \sin \omega t + y^{1c} \cos \omega t; \tag{7.4}$$
$$y^{1s} = y_0 \cos \varepsilon; \quad y^{1c} = -y_0 \sin \varepsilon.$$

Причину отставания рассмотрим позже. Работа силы Y определяется двумя слагаемыми:

$$A = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} Y_1 \dot{y} dt = \omega Y_{01} y^{1s} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos \omega t dt - \omega Y_{01} y^{1c} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 \omega t dt = A_1 + A_2.$$

Но интеграл в первом слагаемом, обозначенном A_1, равен нулю. Вычисляя второй интеграл, получаем $A=A_2=-\pi Y_{01}y^{1c}$. Знак A зависит от знака y^{1c}. Работа A положительна при $y^{1c}<0$ $(0<\varepsilon<180°)$. Это и будет один из каналов, по которому в систему может подводиться энергия. Так как при $\varepsilon=0$ работа $A=0$ и, следовательно, энергия в систему поступать не будет, то необходимым условием, при котором этот канал будет действовать, является наличие соответствующего сдвига фаз между подъемной силой Y_1 и перемещением профиля y. Сдвиг фаз является важным, хотя и недостаточным признаком автоколебательной системы [50].

Усложним рассматриваемую схему. Пусть отсек имеет ось вращения, проходящую через фокус профиля и закрепленную упруго, т. е. таким образом, что при его поступательных и вращательных перемещениях возникают восстанавливающие упругие силы и момент, пропорциональные этим перемещениям. Таким образом, теперь мы имеем дело с колебательной системой с двумя степенями свободы y и φ. В такой системе возможен необходимый для возникновения автоколебаний сдвиг фаз ε. Его наличие определяется существованием сил аэродинамического демпфирования, к числу которых относится, например, сила (7.2). Рассмотрим колебания с частотой ω, близкой к одной из собственных частот колебаний системы. При таких колебаниях перемещение y будет отставать по фазе от силы Y_1 на величину $\varepsilon\approx 90°$, что и означает наличие необходимого сдвига фаз.

Ускорение $\ddot{y}$ противоположно по фазе перемещению y: $\ddot{y}=-y_0\omega^2\sin(\omega t-\varepsilon)=-\omega^2 y$. На центр тяжести отсека будет действовать инерционная сила $F_{\text{и}}=-m\ddot{y}=m\omega^2 y$, совпадающая по фазе с перемещением y. Если центр тяжести отсека расположен (по хорде) за его осью вращения, то создаваемый этой силой момент будет противоположен ей по фазе. Следовательно, момент будет противоположен по фазе перемещению y, т. е., иными словами, будет опережать перемещение y на полпериода колебаний. Момент относительно оси вращения отсека, в свою очередь, вызовет его вращательные колебания. Вследствие наличия демпфирования они будут происходить с некоторым запаздыванием по фазе. Это означает, что закон изменения угла φ по времени будет иметь вид

$$\varphi=\varphi_{01}\cos\omega t+\varphi_{02}\sin\omega t.$$

Второе слагаемое совпадает с выражением (7.3). Таким образом, момент инерционных сил, проявляющихся при поступательных колебаниях, поддерживает вращательные колебания (7.3), образуется замкнутая связь, и возникают автоколебания.

Проведенный упрощенный анализ позволяет сделать заключение о том, что при определенных условиях могут существовать незатухающие совместные поступательные и вращательные колебания упруго закрепленного отсека, поддерживаемые энергией набегающего потока. Амплитуды аэродинамических сил, действующих на отсек, зависят от скорости потока, увеличиваясь с ее ростом, поэтому колебания возникают при превышении некоторой определенной величины скорости, называемой критической. Определяющее значение имеет также положение центра тяжести отсека. Колебания такого типа называются *флаттером*. Они возможны для многих конструкций, в том числе и авиационных — лопастей несущего винта, крыльев, оперения, лопаток турбин и компрессоров и т. д. Для каждой конструкции проводятся теоретические и экспериментальные исследования с целью выявления параметров, определяющих возникновение флаттера. Правильный выбор этих параметров при проектировании позволит исключить появление флаттера при эксплуатации авиационной техники. Для вертолетов одним из наиболее опасных видов флаттера является маховой флаттер несущего винта [13, 15, 22].

§ 7.2. УРАВНЕНИЯ МАХОВОГО ФЛАТТЕРА АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ ЛОПАСТИ, ПРИКРЕПЛЕННОЙ К ВТУЛКЕ С ПОМОЩЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ШАРНИРА

В действительности имеет место маховой флаттер винта в целом. Однако (§ 7.5) при переходе от изолированной лопасти к винту в целом в большинстве практически важных случаев расчетные формулы и главные выводы качественно не меняются. Поэтому рассмотрим вначале флаттер изолированной лопасти. Лопасть будем считать абсолютно жесткой как на изгиб, так и на кручение. Как показывают расчеты и экспериментальные данные, это допущение вполне оправдано и не влияет существенно на результаты и выводы. Будем рассматривать маховое движение абсолютно жесткой лопасти относительно горизонтального шарнира и повороты ее относительно осевого шарнира, допускаемые упругостью системы управления. Поэтому составим два уравнения — уравнения моментов относительно осей горизонтального и осевого шарниров. Уравнение моментов относительно оси горизонтального шарнира имеет вид

$$M_{\text{г.ш}}=\int_0^R rTdr-\int_0^R y_{\text{ц.т}}dN-\int_0^R rdm\ddot{y}_{\text{ц.т}}=0. \tag{7.5}$$

В отличие от подхода, принятого в аэродинамике несущего винта, учтем, что центры тяжести сечений лопасти не лежат на оси лопасти и что они перемещаются при повороте лопасти в осевом шарнире. Найдем перемещение центра тяжести по оси Oy (рис. 7.2):

$$y_{\text{ц.т}}=\beta r-\varphi\sigma, \tag{7.6}$$

где σ — расстояние от центра тяжести отсека до оси осевого шарнира. Здесь первое слагаемое — перемещение центра тяжести сечения из-за поворота лопасти на угол β относительно ГШ, а второе слагаемое — перемещение центра тяжести сечения из-за поворота лопасти на угол φ относительно ОШ. Введем обозначения:

$$I_{\text{г.ш}}=\int_0^R mr^2dr;\quad I_{\text{ц.б}}=\int_0^R mr\sigma dr, \tag{7.7}$$

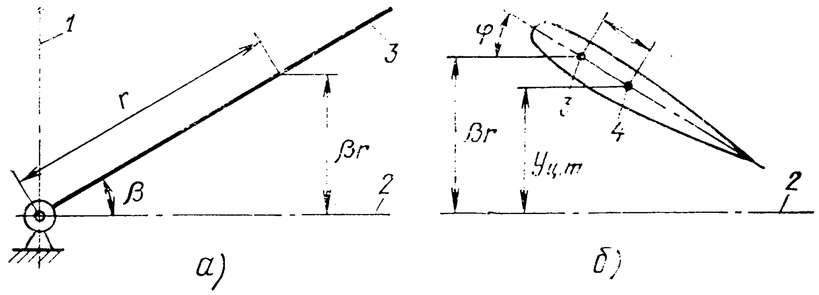


Рис. 7.2. Колебания лопасти относительно ГШ и ОШ:

1 — ось вращения винта; *2* — плоскость вращения винта; *3* — ось ОШ; *4* — центр тяжести сечения

$I_{г.ш}$ — момент инерции лопасти относительно ГШ; $I_{цб}$ — центробежный момент инерции лопасти.

Разделив уравнение (7.5) на $I_{г.ш}$ и подставив $y_{ц.т}$ из (7.6), приведем его с учетом обозначений (7.7) к виду

$$\ddot{\beta}+\omega^2\beta-\frac{I_{цб}}{I_{г.ш}}(\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi)=\frac{1}{I_{г.ш}}\int_0^R Trdr. \qquad (7.8)$$

Составим теперь уравнение моментов относительно оси осевого шарнира. Внешние силы создают момент, нагружающий систему управления и уравновешиваемый возникающими в ней упругими силами:

$$\int_0^R m\ddot{\beta}r\sigma dr-\int_0^R i^*\ddot{\varphi}dr+\int_0^R dN\beta\sigma-\int_0^R \mathfrak{M}_\varphi dr+\int_0^R \mathfrak{M}_а dr+M_{тр}=M_{упр}. \qquad (7.9)$$

Рассмотрим поочередно каждое слагаемое. Первый интеграл соответствует моменту инерционных сил, возникающих при перемещении сечения от махового движения лопасти относительно ГШ (рис. 7.3). При таком движении возникает ускорение $\ddot{\beta}r$, инерционная сила $mdr\ddot{\beta}r$ и момент $m\beta r\sigma dr$. Суммируя момент по всей лопасти и используя обозначения (7.7), получим

$$M_1=I_{цб}\ddot{\beta}. \qquad (7.10)$$

Второе слагаемое в уравнении (7.9) — момент инерционных сил, возникающих при поворотах лопасти относительно оси ОШ. Погонный момент инерции сечения

$$i^*=\int dm^*\rho^2.$$

Здесь dm^* — элементарная масса (см. рис. 7.3, *б*); ρ — расстояние от dm^* до оси ОШ.

Интегрирование выполняется по всем массам отсека единичной длины. Погонный момент инерционных сил при поворотах лопасти равен $i^*\ddot{\varphi}$ и, следовательно,

$$M_2=\int_0^R i^*\ddot{\varphi}dr=\ddot{\varphi}\int_0^R i^*dr=\ddot{\varphi}I_{о.ш}. \qquad (7.11)$$

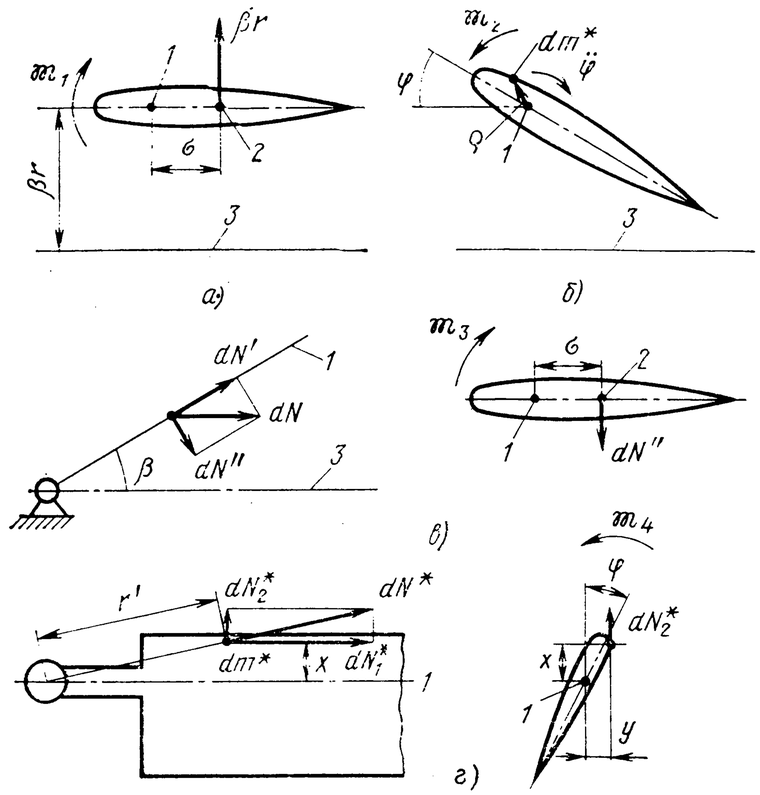


Рис. 7.3. Составляющие момента относительно оси ОШ:

1 — ось ОШ; *2* — центр тяжести сечения; *3* — плоскость вращения винта

Интеграл $\int_0^R i^*dr=I_{о.ш}$ — момент инерции лопасти относительно оси ОШ.

Третье слагаемое в уравнении (7.9) вызвано наличием центробежной силы и угла взмаха. Когда лопасть вследствие поворота относительно ГШ отклоняется из плоскости вращения на угол β, элементарная центробежная сила dN, параллельная плоскости вращения, не совпадает с осью лопасти. Ее можно разложить на две составляющие — вдоль оси лопасти — dN' и перпендикулярно к ней — dN'' (см. рис. 7.3, *в*). При малых углах взмаха составляющая $dN''=dN\sin\beta\approx dN\beta$. Соответствующий момент относительно оси ОШ

$$M_3=\int_0^R dN\beta\sigma=\int_0^R m\omega^2\beta r\sigma dr=\omega^2\beta I_{цб}. \qquad (7.12)$$

Четвертое слагаемое в уравнении (7.9) — момент, возникающий от действия центробежных сил при наличии угла поворота лопасти (см. рис. 7.3, *г*). Для определения этого момента рассмотрим элементарный отсек лопасти. На элемент массы dm^* действует центробежная сила величиной $dN^*=dm^*\omega^2r'$, где r' — расстояние от элемента массы до оси винта. Эту силу можно разложить на две

составляющие — вдоль оси лопасти (dN_1^*) и перпендикулярно к ней (dN_2^*). Величина силы dN_2^* будет $dN_2^* = dN^* \frac{x}{r'} = dm^* \omega^2 x$.

Эта составляющая создает элементарный момент относительно оси лопасти (см. рис. 7.3, *г*), величина которого равна: $d\mathfrak{M} = dN_2^* y = dm^* \omega^2 xy$. Распределенный момент равен

$$\mathfrak{M} = \int \omega^2 dm^* xy.$$

При малом угле φ можно записать:

$$\int dm^* xy = \left(\int dm^* u^2 - \int dm^* v^2\right) \varphi = (i_v - i_u)\varphi.$$

Здесь i_v и i_u — погонные моменты инерции относительно осей сечения. При малой толщине профиля $i_v - i_u = i^*$. Следовательно, суммируя моменты по лопасти, получим

$$M_4 = -\omega^2 \varphi \int_0^R i^* dr = -\omega^2 \varphi I_{\text{о.ш}}. \tag{7.13}$$

Пятое слагаемое в уравнении (7.9) — момент аэродинамических сил. Шестое — момент трения в осевом шарнире. К ним мы вернемся ниже.

Момент $M_{\text{упр}}$ в правой части уравнения (7.9) создается упругими силами, действующими в системе управления. Он может быть выражен в виде

$$M_{\text{упр}} = c_{\text{упр}} \gamma, \tag{7.14}$$

где $c_{\text{упр}}$ — жесткость системы управления; γ — угол поворота лопасти вследствие упругих деформаций системы управления.

Угол установки лопасти φ можно представить в следующем виде:

$$\varphi = \theta - \varkappa\beta + \gamma, \tag{7.15}$$

где θ — угол установки, задаваемый недеформированной системой управления; $\varkappa\beta$ — угол установки от действия регулятора взмаха; $\varkappa$ — коэффициент регулятора взмаха.

Определив из соотношения (7.15) угол γ и подставив его в формулу (7.14), получим

$$M_{\text{упр}} = c_{\text{упр}} (\varphi - \theta + \varkappa\beta). \tag{7.16}$$

Наконец, введем обозначение

$$c_{\text{упр}} / I_{\text{о.ш}} = p_{\text{кр}}^2. \tag{7.17}$$

Возвращаясь к формуле (4.7), можно установить, что величина $p_{\text{кр}}$ имеет физический смысл — это круговая частота собственных крутильных колебаний невращающейся абсолютно жесткой лопасти при упругой системе управления.

Разделив уравнение (7.9) на $I_{\text{о.ш}}$ и подставив в него выражения для моментов (7.10)—(7.13) и (7.16), с учетом соотношения (7.17) получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + (p_{\text{кр}}^2 + \omega^2)\varphi - \frac{I_{\text{цб}}}{I_{\text{о.ш}}}(\ddot{\beta} + \omega^2\beta) + \varkappa p_{\text{кр}}^2 \beta + \frac{M_{\text{тр}}}{I_{\text{о.ш}}} - \frac{1}{I_{\text{о.ш}}} \int_0^R \mathfrak{M}_{\text{а}} dr = p_{\text{кр}}^2 \theta. \tag{7.18}$$

Погонная аэродинамическая сила при малых колебаниях может быть приближенно записана в виде

$$T = \frac{1}{2} c_y^\alpha \rho b U^2 \left(\varphi - \frac{\dot{y}}{U}\right) + \frac{1}{2} c_y^\alpha \rho b^2 U \dot{\varphi} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b}\right). \tag{7.19}$$

Погонный момент аэродинамических сил

$$\mathfrak{M}_{\text{а}} = -\frac{\pi}{16} \rho b^3 U \dot{\varphi} - T\sigma_{\text{ц.д}}. \tag{7.20}$$

Первое слагаемое в формуле (7.19) было получено в § 5.1 и 5.2. Слагаемые в формулах (7.19) и (7.20), пропорциональные угловой скорости профиля, следуют из теории квазистационарного обтекания колеблющегося тонкого профиля потоком идеальной несжимаемой жидкости и обычно учитываются при исследованиях флаттера [22, 34, 42]. Величина $\sigma_{\text{ц.д}}$ — расстояние от центра давления до оси осевого шарнира. Используя понятие фокуса профиля, можно записать

$$T\sigma_{\text{ц.д}} = T\sigma_{\text{ф}} + \mathfrak{M}_{0\text{а}}. \tag{7.21}$$

Здесь $\mathfrak{M}_{0\,\text{а}}$ — момент аэродинамических сил относительно фокуса, не зависящий от угла атаки.

В данном разделе ограничимся режимом висения ($\mu = 0$). Подставляя выражения (7.19), (7.20) и (7.21) в уравнения (7.8) и (7.18) с учетом формул для U_x и U_y (5.10) и (5.11) при $\mu = 0$, получим систему уравнений для исследования флаттера на режиме висения:

$$\ddot{\beta} + d_{11}\omega\dot{\beta} + \omega^2\beta + c_{12}\ddot{\varphi} + d_{12}\omega\dot{\varphi} + b_{12}\omega^2\varphi = \omega^2\gamma_0 \int_0^1 \bar{b}\lambda\bar{r}^2 d\bar{r};$$

$$\ddot{\varphi} + d_{22}\omega\dot{\varphi} + (p_{\text{кр}}^2 + b_{22}\omega^2)\varphi + c_{21}\ddot{\beta} + d_{21}\omega\dot{\beta} + (\varkappa p_{\text{кр}}^2 + c_{21}\omega^2)\beta = p_{\text{кр}}^2\theta - \tag{7.22}$$

$$-\omega^2 \frac{I_{\text{г.ш}}}{I_{\text{о.ш}}} \gamma_0 \int_0^1 \bar{b}\lambda\bar{\sigma}_{\text{ф}}\bar{r} d\bar{r} - \frac{1}{I_{\text{о.ш}}} \int_0^R \mathfrak{M}_{0\text{а}} dr.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$c_{12} = -\frac{I_{\text{ц.б}}}{I_{\text{г.ш}}}; \quad c_{21} = \frac{I_{\text{ц.б}}}{I_{\text{о.ш}}}; \quad d_{11} = \frac{1}{2} c_y^\alpha \frac{\rho}{I_{\text{г.ш}}} \int_0^R b r^3 dr;$$

$$d_{12} = -\frac{1}{2} c_y^\alpha \frac{\rho}{I_{\text{г.ш}}} \int_0^R b^2 r^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b}\right) dr; \quad d_{21} = -\frac{1}{2} c_y^\alpha \frac{\rho}{I_{\text{о.ш}}} \int_0^R b r^2 \sigma_{\text{ф}} dr;$$

$$d_{22}=\frac{1}{I_{\text{о.ш}}}\left[\frac{\pi}{16}\rho\int_0^R b^3 r dr+\frac{1}{2}c_y^\alpha\rho\int_0^R b^2\sigma_\text{ф}\left(\frac{3}{4}-\frac{x_0}{b}\right)dr\right]+d_{\text{тр}};$$

$$b_{12}=-\frac{1}{2}c_y^\alpha\frac{\rho}{I_{\text{г.ш}}}\int_0^R br^3dr+c_{12};\quad b_{22}=1+\frac{1}{2}c_y^\alpha\frac{\rho}{I_{\text{о.ш}}}\int_0^R br^2\sigma_\text{ф}dr;$$

$$\gamma_0=\frac{c_y^\alpha\rho bR^4}{2I_{\text{г.ш}}}.$$

§ 7.3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФЛАТТЕРА ЛОПАСТИ

Решение системы уравнений (7.22) имеет вид

$$\beta=\beta_\text{в}+\beta_\text{ф};$$

$$\varphi=\varphi_\text{в}+\varphi_\text{ф}.$$

Здесь $\beta_\text{в}$ и $\varphi_\text{в}$ — частные решения. Они описывают движение абсолютно жесткой лопасти под действием аэродинамических сил, характеризуемых правыми частями уравнений (7.22), т. е. вынужденные колебания. Эти колебания нас не интересуют. Возмущенное движение лопасти характеризуют слагаемые $\beta_\text{ф}$ и $\varphi_\text{ф}$. Они определяются как общие решения системы однородных уравнений, получающейся из (7.22), если правые части обратить в нуль:

$$\begin{aligned}&\ddot\beta+d_{11}\omega\dot\beta+\omega^2\beta+c_{12}\ddot\varphi+d_{12}\omega\dot\varphi+b_{12}\omega^2\varphi=0;\\&\ddot\varphi+d_{22}\omega\dot\varphi+(p_{\text{кр}}^2+b_{22}\omega^2)\varphi+c_{21}\ddot\beta+d_{21}\omega\dot\beta+(\varkappa p_{\text{кр}}^2+c_{21}\omega^2)\beta=0.\end{aligned}\qquad(7.23)$$

Решение уравнений (7.23) — линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами — ищем в форме

$$\begin{aligned}&\beta_\text{ф}=\beta_0\mathbf{e}^{\lambda t};\\&\varphi_\text{ф}=\varphi_0\mathbf{e}^{\lambda t}.\end{aligned}\qquad(7.24)$$

Здесь β_0 и φ_0 — постоянные. Если выражения (7.24) подставить в уравнения (7.23), то получится система двух однородных алгебраических уравнений. Эти уравнения имеют нетривиальные (отличные от нуля) решения только при определенных значениях λ. Это значения, обращающие в нуль определитель системы. Составив его, получим характеристическое уравнение четвертой степени. Корни этого уравнения в общем случае будут комплексными: $\lambda_n=q_n+ip_n$. Общее решение имеет вид

$$\beta_\text{ф}=\beta_{01}\mathbf{e}^{\lambda_1 t}+\beta_{02}\mathbf{e}^{\lambda_2 t}+\beta_{03}\mathbf{e}^{\lambda_3 t}+\beta_{04}\mathbf{e}^{\lambda_4 t};$$

$$\varphi_\text{ф}=\varphi_{01}\mathbf{e}^{\lambda_1 t}+\varphi_{02}\mathbf{e}^{\lambda_2 t}+\varphi_{03}\mathbf{e}^{\lambda_3 t}+\varphi_{04}\mathbf{e}^{\lambda_4 t}.$$

Из теории алгебраических уравнений известно, что если один из корней комплексный $\lambda_1=q_1+ip_1$ и уравнение имеет действительные коэффициенты, то ему обязательно соответствует другой комплексный сопряженный корень $\lambda_2=q_1-ip_1$. Сумму двух слагаемых с сопряженными комплексными корнями, например λ_1 и λ_2, используя формулы Эйлера, можно преобразовать к виду

$$\beta_{\text{ф}1}=\mathbf{e}^{q_1 t}(\beta_{01}^*\cos p_1 t+\beta_{02}^*\sin p_1 t).$$

Здесь β_{01}^* и β_{02}^* — новые постоянные, являющиеся линейными комбинациями постоянных β_{01} и β_{02}. Аналогично —

$$\beta_{\text{ф}2}=\beta_{03}\mathbf{e}^{\lambda_3 t}+\beta_{04}^{\lambda_4 t}=\mathbf{e}^{q_2 t}(\beta_{03}^*\cos p_2 t+\beta_{04}^*\sin p_2 t).$$

И, следовательно, если все корни комплексные,

$$\beta_\text{ф}=\mathbf{e}^{q_1 t}(\beta_{01}^*\cos p_1 t+\beta_{02}^*\sin p_2 t)+\mathbf{e}^{q_2 t}(\beta_{03}^*\cos p_2 t+\beta_{04}^*\sin p_2 t).\qquad(7.25)$$

Так же может быть записано решение для φ:

$$\varphi_\text{ф}=\mathbf{e}^{q_1 t}(\varphi_{01}^*\cos p_1 t+\varphi_{02}^*\sin p_1 t)+\mathbf{e}^{q_2 t}(\varphi_{03}^*\cos p_2 t+\varphi_{04}^*\sin p_2 t).\qquad(7.26)$$

Как это видно из выражений (7.25) и (7.26), мнимая часть комплексного корня p определяет частоту колебаний, а действительная q — характер изменения колебаний по времени. При $q>0$ имеем расходящиеся колебания (рис. 7.4). При $q<0$ — затухающие. Значение $q=0$ соответствует граничному случаю — колебаниям с установившейся амплитудой. Поэтому о флаттере можно судить по знаку действительных частей корней — q_1 и q_2. Как показывают расчеты, корни характеристического уравнения существенно зависят от угловой скорости несущего винта ω. Пример такой зависимости показан на рис. 7.5. Первая пара λ_1 и λ_2 — комплексные корни. При угловой скорости $\omega<\omega_{\text{кр}1}$ действительная часть q_1 отрицательна. Флаттера нет. При достижении критической угловой скорости $\omega=\omega_{\text{кр}1}$ действительная часть обращается в нуль. Это значение ω соответствует границе флаттера. При угловой скорости больше критической $\omega_{\text{кр}1}<\omega<\omega_{\text{кр}2}$ флаттер возникает. При $\omega>\omega_{\text{кр}2}$ флаттер снова невозможен. Вторая пара корней при малых ω также комплексная, причем q_2 отрицательна и больше по абсолютной величине, чем q_1. Таким образом, этой паре корней соответствует затухающее колебательное движение. При некотором значении $\omega=\omega_3$ мнимая часть второй пары корней обращается в нуль. Взамен пары сопряженных комплексных корней $\lambda_{3,4}=q_2\pm ip_2$ получается два вещественных корня $\lambda_3=q_2^{(1)}$ $(q_2^{(1)}<0)$ и $\lambda_4=q_2^{(2)}$ $(q_2^{(2)}<0)$. Это значит в соответствии с формулами (7.25) и (7.26), что движение, соответствующее этим корням, при $\omega>\omega_3$ является апериодическим. При дальнейшем увеличении угловой скорости винта один из этих корней уменьшается по абсолютной величине и при $\omega>\omega_\text{д}$ (см. рис. 7.5) становится положительным. При $q>0$ с увеличением времени $\beta_\text{ф}$ и $\varphi_\text{ф}$ монотонно и неограниченно возрастают. Такое явление называется дивергенцией лопасти. Оно, очевидно, также недопустимо, как и флаттер. Обычно

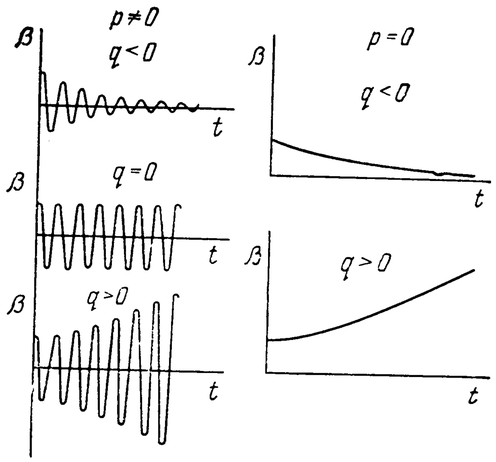


Рис. 7.4. Зависимость характера движения от корней характеристического уравнения

критическая скорость дивергенции больше, чем критическая скорость флаттера. Поэтому, обеспечивая безопасность по флаттеру, конструктор одновременно достигает и безопасности по дивергенции. Метод расчета критической скорости дивергенции приведен в [22].

Частота вращения несущего винта, при достижении которой возникает флаттер, называется *критической*:

$n_{кр}=\omega_{кр}/(2\pi)$.

Этой частотой можно характеризовать безопасность по флаттеру. Действительно, если критическая частота вращения винта $n_{кр}$ больше наибольшей частоты вращения винта n_{max}, возможной в эксплуатации, $n_{кр}>n_{max}$, то флаттера не будет. При $n_{кр}<n_{max}$ флаттер возникает.

Из изложенного следует, что взамен расчета корней характеристического уравнения можно поступить следующим образом. Подставим в характеристическое уравнение $\lambda=ip$ $(q=0)$ и приравняем нулю отдельно действительную и мнимую его части. Тогда получится система из двух уравнений, решая которую относительно угловой скорости винта ω получим формулу (см. [22]) для определения критической частоты вращения:

$$n_{кр}=\frac{\omega_{кр}}{2\pi}=\frac{p_{кр}}{2\pi}\sqrt{-L\pm\sqrt{L^2-M}}. \qquad (7.27)$$

В формуле (7.27) введены следующие обозначения:

$$2L=\frac{C_1(2C_2-A_2B_2)+A_1(A_1D_2-B_1C_2)}{C_1^2+A_1(A_1D_1-B_1C_1)};$$

$$M=\frac{C_2(C_2-A_1B_2)}{C_1^2+A_1(A_1D_1-B_1C_1)};$$

$$A_1=\frac{1}{1-i_0c_{21}^2}(d_{11}+d_{22}-c_{12}d_{21}+c_{21}d_{12});$$

$$B_1=\frac{1}{1-i_0c_{21}^2}(1+b_{22}+d_{11}d_{22}-b_{12}c_{21}-d_{12}d_{21}-c_{12}c_{21});$$

$$B_2=\frac{1}{1-i_0c_{21}^2}(1-\varkappa c_{12});$$

$$C_1=\frac{1}{1-i_0c_{21}^2}(d_{22}+d_{11}b_{22}-b_{12}d_{21}-c_{21}d_{12});$$

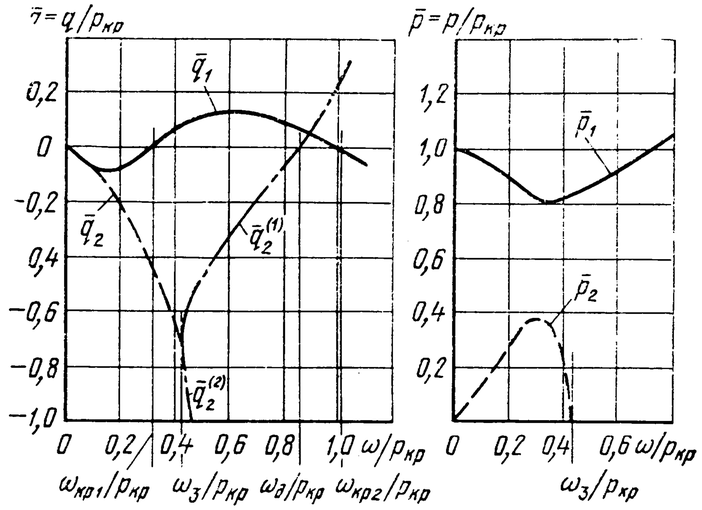


Рис. 7.5. Корни характеристического уравнения

$$C_2=\frac{1}{1-i_0c_{21}^2}(d_{11}-\varkappa d_{12});\quad D_1=\frac{1}{1-i_0c_{21}^2}(b_{22}-b_{12}c_{21});$$

$$D_2=\frac{1}{1-i_0c_{21}^2}(1-\varkappa b_{12});\quad i_0=\frac{I_{о.ш}}{I_{г.ш}}.$$

Эта формула и используется обычно в практических расчетах по флаттеру.

§ 7.4. ОБЕСПЕЧЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ ПО ФЛАТТЕРУ

Из подробных расчетов следует (см. [13 и 22]), что среди многих параметров, входящих в уравнения системы (7.23), главное влияние на критическую частоту вращения оказывают положение по хорде центров тяжести сечений и фокусов профилей, величина компенсатора взмаха и жесткость проводки управления. Положение центров тяжести сечений лопасти сказывается на величине $I_{цб}$ — центробежного момента инерции. Если относительная центровка

$\bar\sigma=\sigma/b$

постоянна по длине лопасти, то центробежный момент инерции

$$I_{цб}=\int_0^R m\sigma r\,dr=\bar\sigma\int_0^R mbr\,dr$$

пропорционален величине $\bar\sigma$. Следовательно, величиной $\bar\sigma$ можно характеризовать флаттерные характеристики такой лопасти. Так как у реальных лопастей относительные центровки сечений различаются (рис. 7.6), то удобно ввести понятие относительной эффективной центровки. Относительная эффективная центровка $\bar\sigma_{эф}$ рассматриваемой лопасти равна центровке такой лопасти с по-

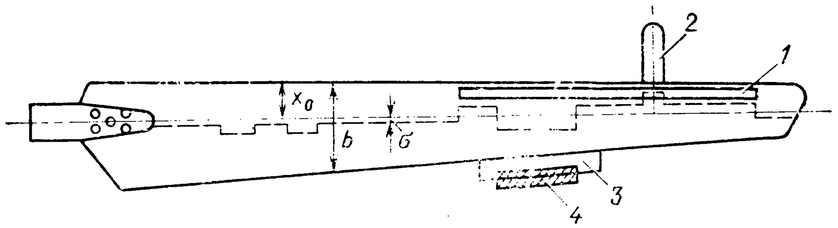


Рис. 7.6. Положения центров тяжести сечений. Размещение противофлаттерных и провоцирующего грузов:

1 и *2* — противофлаттерные грузы; *3* — закрылок; *4* — провоцирующий груз

стоянной по радиусу величиной $\bar{\sigma}$, для которой величина центробежного момента инерции будет такой же, как у рассматриваемой лопасти. На основании этого определения можно найти формулу для $\bar{\sigma}_{эф}$:

$$\bar{\sigma}_{эф}\int_0^R mbrdr=\int_0^R m\sigma rdr,$$

$$\text{откуда } \bar{\sigma}_{эф}=\frac{\int_0^R m\sigma rdr}{\int_0^R mbrdr}. \qquad (7.28)$$

Для лопастей, у которых ось осевого шарнира расположена на постоянном по радиусу относительном расстоянии от передней кромки $\bar{x}_0$, удобнее отсчитывать центровку от передней кромки:

$$\bar{x}_{эф}=x_0+\bar{\sigma}_{эф}. \qquad (7.29)$$

Так как расчеты показывают, что критическая частота вращения винта очень слабо зависит от положения по хорде оси осевого шарнира, то ту же характеристику $\bar{x}_{эф}$ практически можно применять и для лопастей, у которых $\bar{x}_0$ не постоянно по радиусу лопасти.

Влияние эффективной центровки на критическую частоту вращения можно проследить по типичному графику рис. 7.7, на котором кривая $n_{кр}=f(\bar{x}_{эф})$, рассчитанная по формуле (7.27), ограничивает зону флаттера. При малых значениях $\bar{x}_{эф}$ флаттер рассматриваемого типа невозможен при любом значении частоты вращения винта. При больших значениях эффективной центровки флаттер возникает, когда частоты вращения винта увеличиваются до значений $n_{кр1}$, определяемых нижней ветвью кривой $n_{кр}=f(\bar{x}_{эф})$. При дальнейшем увеличении частоты вращения до верхней ветви этой кривой ($n_{кр2}$) флаттер имеет место. При еще большей частоте вращения $n>n_{кр2}$ флаттер невозможен. Так как максимальная частота вращения винта ограничена, то практическое значение имеет обычно только нижняя ветвь кривой $n_{кр1}=f(\bar{x}_{эф})$. С увеличением $\bar{x}_{эф}$ критическое значение частоты вращения, при котором возника-

ет флаттер $n_{кр1}$, уменьшается. По графику такого типа можно выбрать допустимую эффективную центровку лопасти по заданному максимальному значению частоты вращения несущего винта. Выбор осуществляется с некоторым запасом (см. ниже).

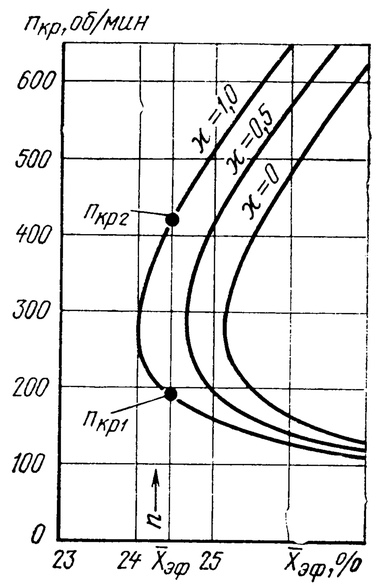


Рис. 7.7. Зависимость критической частоты вращения винта от эффективной центровки лопасти и величины компенсатора взмаха

Эффективная центровка на этапе проектирования определяется по формулам (7.28) и (7.29), в которые подставляются значения m и σ, определяемые расчетом по чертежам лопасти. Так как при этом могут возникнуть существенные ошибки, значение $\bar{x}_{эф}$ обычно проверяют на натурных лопастях. С этой целью лопасть разрезают на отдельные отсеки. Далее определяют положение центра тяжести каждого отсека σ_i и его массу $m_i\Delta r_i$ и вычисляют $\bar{x}_{эф}$ по формулам (7.28) и (7.29). Чтобы флаттер не возникал в полете, эффективная центровка должна быть не более 23—24% [22]. Такая центровка достигается размещением в носовой части профиля так называемых противофлаттерных грузов. Как это следует из формулы (7.28), величина эффективной центровки определяется главным образом положениями центров тяжести концевых сечений лопасти. Поэтому для обеспечения необходимой величины $\bar{x}_{эф}$ более рационально, с меньшей затратой веса размещать дополнительные грузы на внешней по радиусу, а не на комлевой части лопасти (см. рис. 7.6).

Рассмотрим теперь влияние положения фокусов. Смещение фокусов назад приводит к увеличению критической частоты вращения винта. Поэтому для обеспечения безопасности по флаттеру выгодно применять профили с задним по хорде положением фокуса, причем следует обратить внимание на его смещение при изменении числа М.

Влияние коэффициента компенсатора взмаха $\varkappa$ иллюстрируется графиком, изображенным на рис. 7.7. С увеличением $\varkappa$ критическая частота вращения уменьшается, флаттер становится возможным при меньших $\bar{x}_{эф}$. Как это следует из формулы (7.27), критическая частота вращения пропорциональна частоте крутильных колебаний лопастей $p_{кр}$. Таким образом, увеличение жесткости системы управления приводит к увеличению критической частоты вращения. Расчетные методы определения жесткости дают обычно сильно завышенные результаты. Поэтому они используются только для предварительных оценок, причем рассчитанные значения жесткости уменьшают в два-три раза. Для получения более точных результатов применяется экспериментальный метод, который состоит в определении частоты колебаний лопастей и системы управления на вертолете при возбуждении этих колебаний с по-

мощью специальных вибраторов, устанавливаемых на винте [22].

По окончании проектирования лопастей и системы управления производятся проверочные расчеты критической чатоты вращения. Она должна превышать максимально возможную в эксплуатации частоту вращения винта не менее чем на некоторую определенную величину, определяемую как «запас по частоте вращения». Необходимость такого запаса обосновывается следующими причинами. С увеличением скорости полета (см. § 7.6) критическая частота вращения винта снижается. Следовательно, определенный запас по частоте вращения на режиме висения обеспечивает отсутствие флаттера на режимах полета со скоростью. Эффективная центровка может смещаться назад при серийном производстве вследствие неконтролируемых технологических отклонений и в эксплуатации, например, при попадании влаги в отсеки. Наличие достаточного запаса по флаттеру обеспечит его отсутствие при таких отклонениях.

Оказывается удобным выражать запас по флаттеру в процентах относительной эффективной центровки. С помощью графика зависимости критической частоты вращения от эффективной центровки (см. рис. 7.7) определим $\bar{x}_{кр}$ — эффективную центровку, при которой флаттер возникает на максимально возможной частоте вращения винта в полете n_{max}. Действительная эффективная центровка лопасти должна быть не более $\bar{x}_{эф}=\bar{x}_{кр}-\Delta\bar{x}_{эф}$. Здесь $\Delta\bar{x}_{эф}$ — запас по центровке, выбираемый с учетом рассмотренных выше обстоятельств. Обычно принимается $\Delta x_{эф}=2...3\%$.

Наличие запасов по флаттеру должно быть проверено экспериментально на опытном экземпляре вертолета. При такой проверке используются так называемые «провоцирующие грузы». Они закрепляются на задней кромке каждой лопасти (см. рис. 7.6). Величина их выбирается так, чтобы сместить эффективную центровку назад на величину запаса $\Delta\bar{x}_{эф}$, т. е. на 2—3%. На вертолете с такими лопастями производятся раскрутки винта до наибольшего значения частоты вращения — n_{max}. Если при этом флаттер не возникает, то вертолет считается безопасным по флаттеру. Методика выполнения таких проверок рассматривается в гл. 16.

Для ограничения отклонений в серийном производстве, приводящих к смещению эффективной центровки назад, применяются соответствующие меры контроля. Выпущенные серийным заводом вертолеты подвергаются выборочной проверке на наличие запасов до флаттера. Проверка производится тем же способом, как на опытном экземпляре.

§ 7.5. ФЛАТТЕР НЕСУЩЕГО ВИНТА

Колебания всех лопастей винта относительно осей осевых шарниров оказываются связанными между собой вследствие того, что системы управления, удерживающие автомат перекоса, не являются абсолютно жесткими. При воздействии момента $M_{упр}$ от ка-

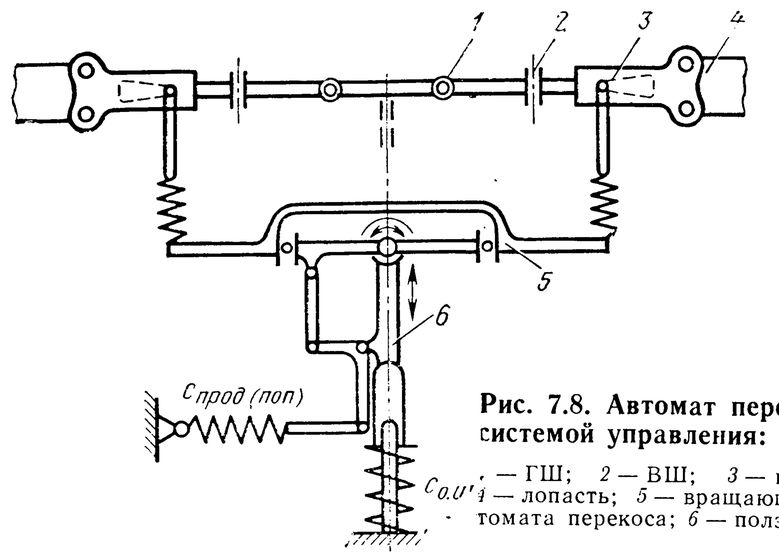


Рис. 7.8. Автомат перекоса с упругой системой управления:

1 — ГШ; 2 — ВШ; 3 — поводок лопасти; 4 — лопасть; 5 — вращающееся кольцо автомата перекоса; 6 — ползун общего шага

кой-либо одной лопасти происходят деформации не только участка системы управления, расположенного между лопастью и автоматом перекоса, но и участка системы управления между автоматом и бустерами или рычагами управления летчика. Поэтому автомат перекоса перемещается и наклоняется, что приводит к изменению углов установки других лопастей. Таким образом, следует рассматривать совместное движение всех лопастей, упруго прикрепленных к автомату перекоса, и самого автомата на упругом основании (рис. 7.8). Если число лопастей винта не менее трех, а жесткости продольного и поперечного управления автоматом перекоса одинаковы, то (см. [13 и 22]) колебания отдельных лопастей происходят по одинаковым законам, отличающимся лишь начальной фазой. Могут быть только определенные распределения начальных фаз колебаний лопастей, вытекающие из соотношения

$$\Delta t=\frac{2\pi}{p}\,\frac{m}{z}, \qquad (7.30)$$

где Δt — отставание по времени колебаний одной из лопастей относительно последующей; z — число лопастей винта; p — частота колебаний при флаттере (мнимая часть корня λ); m — определенное целое число ($m=0, 1, ..., z-1$).

Практически важны три значения $m=0$; 1 и $z-1$. При $m=0$ отставание $\Delta t=0$, т. е. фазы колебаний всех лопастей одинаковы. Имеет место так называемый синфазный флаттер, при котором все лопасти одновременно достигают крайних положений, проходят одновременно через положение равновесия и т. д. Так же одинаковы в каждый данный момент времени любые силы, действующие на соответствующий элемент каждой лопасти (см. рис. 2.2, *б*). В частности, одинаковы величины $M_{упр}$. Из правил сложения моментов, приходящих со всех лопастей винта на автомат перекоса (см. гл. 2), следует, что в этом случае нагружается только систе-

ма управления общим шагом. Автомат перекоса колеблется, перемещаясь вверх и вниз поступательно, но не наклоняясь.

При $m=1$ и $m=z-1$ возникает так называемый циклический флаттер. Каждая лопасть повторяет движение предыдущей с запаздыванием, определяемым соотношением (7.30). Автомат перекоса поступательных движений не совершает, а наклоняется. Нагружается система управления циклическим шагом (см. гл. 2).

Для обоих видов флаттера — циклического и синфазного — система уравнений движения лопастей и автомата перекоса приводится к двум уравнениям, совпадающим с уравнениями флаттера изолированной лопасти. Уточняется лишь понятие жесткости управления. При синфазном флаттере под жесткостью $c_{\text{ур}}$ следует понимать приведенную к одной лопасти жесткость системы управления общим шагом, при циклическом флаттере — приведенную к одной лопасти жесткость систем циклического управления. При определении этих жесткостей должен учитываться также и участок системы управления от лопасти до автомата перекоса. Следовательно, все выводы § 7.2—7.4, основанные на рассмотрении флаттера изолированной лопасти, сохраняются для флаттера винта в целом.

Значениям $m=2, \ldots, z-2$ соответствуют такие формы флаттера, при которых нагрузки замыкаются на тарелке автомата перекоса и участки систем управления между автоматом перекоса и бустерами не нагружаются. Так как для этих форм жесткость $c_{\text{упр}}$ определяется только участком между лопастями и автоматом перекоса, то ее величина намного больше, чем в случае синфазного или циклического флаттера. Следовательно, значительно выше и критическая частота вращения винта. Поэтому эти формы практического значения не имеют.

Для двухлопастных винтов, а также при значительно отличающихся жесткостях продольного и поперечного управления существуют особые методы расчета. Выводы качественного характера о влиянии центровки, жесткости систем управления и коэффициента регулятора взмаха, полученные в § 7.4, сохраняются и для этого случая.

§ 7.6. ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ В ОСЕВОМ ШАРНИРЕ

Возникающий в нагруженном центробежной силой осевом шарнире момент трения может быть большим по величине. Работа сил трения благоприятно влияет на флаттерные характеристики. Момент трения в осевом шарнире является демпфирующим. В § 7.1 рассматривалась демпфирующая сила (7.2). Ее величина линейно зависит от скорости $\dot{y}$ (рис. 7.9, *б*). Такие демпфирующие силы называются силами вязкого сопротивления. Их можно представить как

$$F=-H_F\dot{y} \text{ или } M=H_M\dot{\varphi}, \tag{7.31}$$

где H_F и H_M — постоянные коэффициенты; $\dot{y}$ и $\dot{\varphi}$ — скорость или угловая скорость.

В отличие от таких сил (моментов) силы трения в осевом шарнире, как показывают экспериментальные данные, близки по своему характеру к силам сухого (Кулонова) трения. Это значит, что абсолютная величина момента трения остается при поворотах лопасти в осевом шарнире практически постоянной и про-

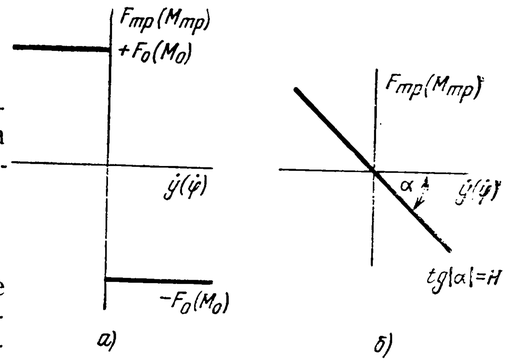


Рис. 7.9. Зависимость силы (момента) трения от скорости:

а — сухое трение; *б* — вязкое трение

исходит (рис. 7.9, *а*) только изменение знака этого момента, направленного всегда против угловой скорости вращения в шарнире:

$$M=-M_0 \operatorname{sign}\dot{\varphi}.$$

Эта зависимость нелинейная. Введение ее в уравнения флаттера делает их существенно нелинейными, что вызывает значительные математические трудности при решении. Применяется инженерный метод, основанный (см. [22]) на численном интегрировании системы уравнений флаттера. Наличие флаттера или его отсутствие на данном режиме устанавливается по виду полученных в результате расчета зависимостей угла взмаха β и угла установки φ от времени.

Упрощенный метод основан на линеаризации — замене нелинейной зависимости, изображенной на рис. 7.9, *а* линейной, типа вязкого трения. Линеаризация позволяет сохранить вид дифференциальных уравнений (7.22) и, следовательно, метод расчета и выводы, изложенные выше. Заметим, что в общем случае, применяя метод линеаризации, следует иметь в виду возможность утраты при этом каких-либо важных особенностей, характерных только для нелинейной системы.

При линеаризации необходимо определить величину $H_{\text{экв}}$ — эквивалентного значения коэффициента H в выражении (7.31), заменяющем нелинейный закон. Один из способов состоит в приравнивании работ моментов сухого трения и вязкого сопротивления при заданном законе движения. Примем, что движение происходит по закону $\varphi=\varphi_0\cos pt$. Вычислим работу $A_{\text{сух}}$ момента сухого трения за период $T=2\pi/p$. Угловая скорость $\dot{\varphi}=-\varphi_0 p\sin pt$ на интервале $0<t<T/2$ отрицательна и, следовательно, $M_{\text{тр}}=M_0$, а на интервале $T/2<t<T$ положительна и $M_{\text{тр}}=-M_0$. Поэтому

$$A_{\text{сух}}\int_0^T M(\dot{\varphi})\dot{\varphi}dt=M_0\int_0^{T/2}\dot{\varphi}dt-M_0\int_{T/2}^{T}\dot{\varphi}dt=-p\varphi_0M_0\int_0^{T/2}\sin ptdt+$$

$$+p\varphi_0M_0\int_{T/2}^{T}\sin ptdt=-4\varphi_0M_0. \tag{7.32}$$

При линейной зависимости (7.31) демпфирующего момента от скорости (вязкое трение) работа за цикл

$$A_{\text{вязк}}=\int_0^T M(\dot{\varphi})\dot{\varphi}dt=-H_{\text{экв}}\varphi_0^2p^2\int_0^T\sin^2 ptdt=-\pi H_{\text{экв}}\varphi_0^2p. \tag{7.33}$$

Приравнивая выражения работ (7.32) и (7.33), получим уравнение для определения эквивалентного значения $H_{\text{экв}}$:

$$H_{\text{экв}}=\frac{4}{\pi}\frac{M_0}{\varphi_0 p}. \tag{7.34}$$

Обратим внимание, что $H_{\text{экв}}$ зависит от φ_0 — амплитуды колебаний, а при вязком сопротивлении, т. е. демпфирующем моменте, определяемом формулой (7.31), коэффициент H — постоянный. Это характерная черта метода линеаризации. Она отражает важную особенность самого явления флаттера при наличии нелинейного демпфирования — появление так называемого порога возбуждения. При малых φ_0 эквивалентный коэффициент трения $H_{\text{экв}}$, как это следует из формулы (7.34), может быть очень большим. Ему соответствует большое значение критической частоты вращения винта — $n_{\text{кр}}$. Пусть при данной частоте враще-

ния n и начальном возмущении, характеризуемом величиной φ_0, флаттер не возникает ($n_{кр}>n$). При большем φ_0 коэффициент $H_{эф}$ в соответствии с (7.34) меньше, следовательно, уменьшается и величина $n_{кр}$. Может оказаться, что $n_{кр}<n$ и флаттер возникает. Таким образом существует такое $\varphi_0=\varphi_{кр}$, что при $\varphi_0<\varphi_{кр}$ флаттера нет, а при $\varphi_0>\varphi_{кр}$ он возникает. Это значение $\varphi_{кр}$ и называется *порогом возбуждения*.

Величина работы момента трения, направленной на демпфирование флаттера, зависит от принудительного движения лопасти в осевом шарнире. Рассмотрим для простоты винт без регулятора взмаха. Наклон автомата перекоса вызывает повороты лопасти в осевом шарнире, описываемые периодическим законом:

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos \omega t + \theta_2 \sin \omega t.$$

Это движение называется принудительным. Оно не связано с флаттером. При флаттере суммарная угловая скорость поворота лопасти в осевом шарнире определяется суммой $\omega_{о.ш}=\dot{\theta}+\dot{\gamma}$. Работу момента трения можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$A = \int_0^T M_{тр}\omega_{о.ш}dt = A_{пр} + A_{ф} = \int_0^T M_{тр}\dot{\theta}dt + \int_0^T M_{тр}\dot{\gamma}dt.$$

Первое слагаемое характеризует работу момента трения на перемещениях от принудительного движения и для рассматриваемой задачи о флаттере интереса не представляет. Второе слагаемое характеризует роль момента трения в колебаниях при флаттере. Момент трения всегда направлен против суммарной угловой скорости поворота в осевом шарнире $\omega_{о.ш}$. При положительной угловой скорости $\omega_{о.ш}>0$ момент $M_{тр}<0$. Поэтому суммарная элементарная работа A момента трения всегда отрицательна: $dA=M_{тр}\omega_{о.ш}dt<0$. При отсутствии принудительного движения $\omega_{о.ш}=\dot{\gamma}$, следовательно, знак $M_{тр}$ противоположен знаку $\dot{\gamma}$, и работа момента трения при флаттерных колебаниях при неотклоненном автомате перекоса всегда отрицательна:

$$dA_{ф} = dA = M_{тр}\dot{\gamma}dt < 0.$$

При наклоненном автомате перекоса имеет место более сложная картина. Пусть, например, на некотором интервале времени скорость колебаний флаттера $\dot{\gamma}>0$, а автомат отклонен так, что скорость принудительного движения $\dot{\theta}<0$ и по абсолютной величине превосходит $\dot{\gamma}$, т. е. $|\dot{\theta}|>\dot{\gamma}$. При таких условиях суммарная угловая скорость $\omega_{о.ш}=\dot{\gamma}+\dot{\theta}$ — отрицательна, а так как момент трения всегда имеет знак, противоположный знаку $\omega_{о.ш}$, то момент трения $M_{тр}$ при этом положительный: $M_{тр}>0$. Работа момента трения на перемещениях от колебаний флаттера в рассматриваемом интервале времени, следовательно (при $\dot{\gamma}>0$ и $M_{тр}>0$) будет положительной. Наличие таких интервалов времени, на которых работа момента трения на перемещениях от флаттера положительна, приводит к тому, что за период колебаний работа $A_{фл}$ оказывается по абсолютной величине меньше, чем при отсутствии принудительного движения. Принудительное движение в осевом шарнире приводит, таким образом, к уменьшению работы, направленной на демпфирование флаттера. Влияние принудительного движения хорошо наблюдается в экспериментах на натурных вертолетах. В ряде случаев флаттер может быть вызван не увеличением частоты вращения винта, а простым отклонением ручки управления, что приводит к появлению принудительного движения в осевых шарнирах, а следовательно, и к уменьшению демпфирования. Уменьшая принудительное движение, иногда можно прекратить флаттер без изменения частоты вращения винта.

§ 7.7. ДРУГИЕ ПРАКТИЧЕСКИ ВАЖНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ФЛАТТЕРЕ

Отметим основные имеющие практическое значение выводы более общих исследований флаттера, выполненных без введенных в предыдущих разделах ограничений и допущений.

Флаттер в полете со скоростью. В § 7.2—7.6 рассматривался режим работы винта на висении ($\mu=0$). В полете со скоростью ($\mu\neq0$) появляются новые факторы, существенно влияющие на развитие флаттера: периодические изменения скорости сечения лопасти, возникновение зон околозвукового обтекания на наступающей лопасти и др. Влияние этих факторов учитывается на основе уравнений (7.8) и (7.18), если входящие в них аэродинамическую силу T и момент $\mathfrak{M}$ определять по общей схеме § 5.2 [13, 22]. Один из способов решения — метод численного интегрирования, сходный с применявшимся в гл. 5 при расчете вынужденных колебаний (см. [22] гл. 4). Как показывают результаты теоретических и экспериментальных исследований, с ростом скорости полета происходит уменьшение критической частоты вращения винта. Приближенно можно считать, что увеличение скорости полета до 250—300 км/ч эквивалентно по своему влиянию на критическую частоту вращения смещению назад эффективной центровки на величину не менее 1,5—2%.

Развитие колебаний при флаттере. Задача о флаттере рассматривалась в § 7.1—7.6 в линейной постановке — все силы и моменты представлялись как линейные функции углов взмаха и поворота лопасти или их производных. Линеаризация определила вид решений (7.25) и (7.26) — закон неограниченного развития (при $\omega>\omega_{кр}$) колебаний при флаттере. Линейная постановка задачи является обычным общим приемом при исследованиях упругой динамической неустойчивости. Применительно к флаттеру она позволила найти критические параметры и, следовательно, сформулировать требования к конструкции, обеспечивающие отсутствие флаттера. Однако полученный при этом закон развития колебаний близок к действительному только на их начальном этапе. При достаточно больших амплитудах возрастает роль нелинейных факторов, ограничивающих дальнейший рост сил и моментов, и нараставшие вначале колебания становятся (если конструкция не разрушится) установившимися с ограниченной, хотя, может быть, и очень большой амплитудой. Образуется, как это принято называть в теории колебаний, предельный цикл. Особенности движения лопастей при этом нельзя изучить на основе линейных уравнений. Наличие предельного цикла имеет большое значение для экспериментальных исследований флаттера (см. гл. 16).

Влияние упругости лопасти. Выше использовались допущения о том, что лопасть несущего винта является абсолютно жесткой на изгиб и кручение. Кручение лопасти приближенно может быть учтено соответствующим снижением жесткости системы управления $c_{упр}$ на основе расчета крутильной жесткости лопасти. В бо-

лее точной постановке флаттер с учетом изгиба и кручения лопасти рассмотрен в [22]. Расчеты показывают, что для лопастей, закрепленных с помощью ГШ, учет изгиба не приводит к существенному изменению критического значения частоты вращения винта при обычном распределении погонной массы по длине лопасти, но может оказаться необходимым, если на ее конце расположен особо тяжелый груз.

Флаттер возможен и для винтов с жестким (без ГШ) креплением лопастей к втулке. В отличие от винтов с индивидуальными ГШ он характеризуется интенсивными изгибными и крутильными колебаниями лопастей.

О других типах флаттера. Наряду с рассмотренным могут существовать другие типы флаттера, отличающиеся характером движения лопастей или механизмом возникновения периодических поддерживающих колебания сил и моментов. Так, известен хордовый флаттер, в котором преобладают изгибные колебания лопасти в плоскости вращения.

С увеличением скорости полета V при заданном значении коэффициента тяги несущего винта t или при заданном значении V с увеличением t увеличиваются зоны (охватывающие концевые сечения отступающей лопасти), в которых углы атаки сечений α больше критических по срыву потока $\alpha_{кр}$. Это влечет за собой возникновение срывного флаттера. Рассмотрим существенную особенность энергетического обмена при работе профиля на закритических углах. Примем для упрощения статическую зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки (кривая *1* на рис. 5.3). В действительности следовало бы руководствоваться кривой *2* на рис. 5.3, но это усложняет понимание, не меняя выводов. Пусть $\alpha > \alpha_{кр}$, т. е. профиль работает на углах атаки, соответствующих участку кривой $c_y^{(\alpha)}$ с отрицательным наклоном (система с «падающей характеристикой»). Из формул (7.1) и (7.2) следует, что работа возникающей при поступательных колебаниях профиля по оси Oy дополнительной аэродинамической силы будет положительна в отличие от случая колебаний при малых α, разобранного в § 7.1. Таким образом, при работе на срывных режимах возникает канал для подвода энергии к колеблющемуся профилю при только поступательных колебаниях без вращательных.

Другой канал для поступления энергии связан с вращательными колебаниями. Пусть угол атаки при колебаниях профиля относительно фокуса изменяется по закону

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \sin \omega t.$$

Кривые изменения коэффициента момента профиля относительно фокуса (m_F) в зависимости от угла атаки показаны для двух различных значений α_0 (при одинаковых амплитудах $\Delta\alpha$) на рис. 7.10. Эффект нестационарности обтекания вызывает несовпадение значений m_F при увеличении ($\dot{\alpha} > 0$) и уменьшении ($\dot{\alpha} < 0$) угла атаки.

Работа момента аэродинамических сил за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ представляет собой интеграл

$$\Delta A = \frac{\rho V^2}{2} b^2 \Delta R \int_0^T m_F \dot{\alpha} dt.$$

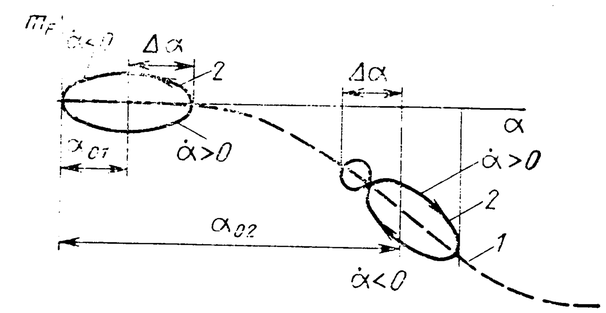


Рис. 7.10. Зависимость коэффициента момента профиля относительно фокуса от угла атаки:

1 — при медленном изменении угла атаки; *2* — при быстром увеличении и уменьшении угла атаки

На основании вида кривых, изображенных на рис. 7.10, можно установить, что при малых α работа $\Delta A < 0$. Если α достигает значений, превышающих $\alpha_{кр}$, то работа ΔA может быть положительной. Таким образом, существует возможность подвода энергии, а следовательно, и незатухающих колебаний — флаттера.

Конечно, для лопасти в целом явление усложняется. На отдельных участках как по азимуту, так и по радиусу могут действовать и демпфирующие и поддерживающие колебания силы и моменты в зависимости от углов атаки сечений. Колебания возбуждаются лишь в определенной зоне диска винта (на азимутах около 270°), где углы атаки могут быть больше критического. Срывной флаттер винта проявляется в основном как крутильные колебания лопасти с частотой, в 5—7 раз превышающей частоту вращения винта. О последствиях возникновения срывного флаттера см. гл. 9.

глава 8 РУЛЕВЫЕ ВИНТЫ

Нагружение лопастей рулевого винта существенно отличается от нагружения лопастей несущего винта. Это вызвано отличиями в конструкции и в условиях работы винтов. По особенностям конструкции, имеющим существенное значение для нагружения, следует различать рулевые винты нескольких типов. Часто применяются винты так называемой классической схемы. У такого винта каждая лопасть крепится к втулке с помощью двух шарниров — осевого шарнира (ОШ), позволяющего изменять угол установки лопастей, и шарнира, условно, по аналогии с несущим винтом, называемого горизонтальным (ГШ), позволяющего лопасти совершать повороты в плоскости, проходящей через ось винта, т. е. в плоскости взмаха. Шарнир, аналогичный вертикальному шарниру (ВШ) несущего винта, позволяющий лопасти поворачиваться в плоскости вращения винта, отсутствует. Прочности этих винтов посвящены § 8.1 и 8.2. Некоторое распространение получили винты с втулкой на кардановом подвесе. У такого винта каждая лопасть имеет только осевой шарнир. Втулка крепится к валу с помощью карданова подвеса, позволяющего ей наклоняться относительно оси вала винта в любом направлении. Основные особенности нагружения таких винтов рассмотрены в § 8.3.

§ 8.1. НАГРУЗКИ НА ЛОПАСТИ РУЛЕВОГО ВИНТА

По сравнению с несущим винтом отсутствие шарнира, позволяющего лопасти совершать угловые колебания в плоскости вращения, приводит к появлению на лопасти винта классической схемы больших по величине изгибающих моментов в плоскости вращения. Практика создания рулевых винтов показывает, что переменный изгибающий момент лопасти в плоскости вращения является основным фактором, определяющим ресурс лопасти и втулки рулевого винта. Напряженное состояние лопасти определяется также переменным изгибающим моментом в плоскости взмаха и центробежной силой, создающей статическую подгрузку.

Переменный изгибающий момент в плоскости вращения вызывается инерционными силами Кориолиса, возникающими в основном от махового движения лопасти в плоскости, проходящей через ось винта, т. е. относительно горизонтального шарнира, и в меньшей мере — аэродинамическими силами. Кориолисова сила (рис. 8.1) определяется формулой

$$d\vec{K} = -mdr2\vec{\omega}\times\vec{V},$$

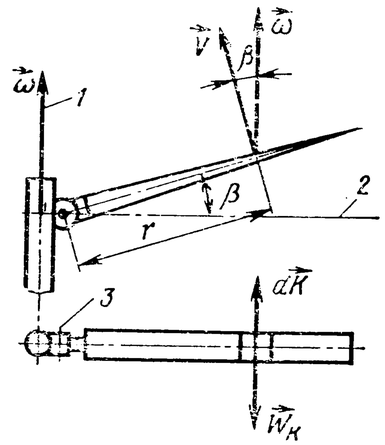


Рис. 8.1. Кориолисова сила на лопасти рулевого винта:

1 — ось вращения винта; *2* — плоскость вращения; *3* — ось ГШ

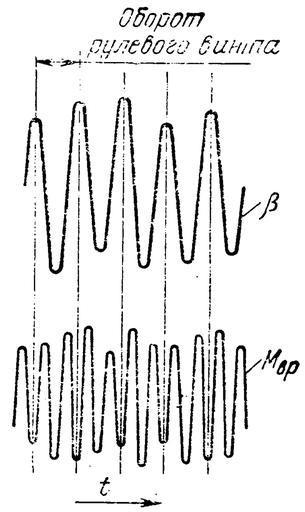


Рис. 8.2. Изменение по времени угла взмаха β и изгибающего момента в плоскости наибольшей жесткости в сечении лопасти рулевого винта $M_{в.р}$

где m — погонная масса; $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости винта; $\vec{V}$ — вектор относительной скорости — скорости колебаний сечений лопасти в плоскости взмаха.

При маховом движении абсолютно жесткой лопасти $V = r\dfrac{d\beta}{dt}$

Вектор $\vec{K}$ параллелен плоскости вращения винта. Величина этой силы при малых углах и абсолютно жесткой на изгиб лопасти:

$$dK \approx 2\omega\frac{d\beta}{dt}\beta rmdr. \qquad (8.1)$$

Закон изменения по времени угла взмаха β можно представить в форме тригонометрического ряда. Обычно амплитуда второй и более высоких гармоник махового движения значительно меньше амплитуды первой гармоники (рис. 8.2). Поэтому достаточно сохранить только члены, соответствующие постоянной составляющей a_0 и первой гармонике:

$$\beta \approx a_0 + a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t$$

или $\beta = a_0 + A_1\cos(\omega t + \varepsilon_1)$,

где $A_1 = \sqrt{a_1^2 + b^2}$ — амплитуда махового движения; ε_1 — начальная фаза махового движения.

Подставляя β в формулу (8.1), получим

$$dK = \left[-a_0A_1\sin(\omega t + \varepsilon_1) - \frac{1}{2}A_1^2\sin 2(\omega t + \varepsilon_1)\right]2\omega^2 mrdr.$$

Таким образом, кориолисова сила содержит в основном первую и вторую гармоники. Амплитуда гармоники кориолисовой силы пропорциональна квадрату амплитуды A_1 первой гармоники

махового движения:

$$dK^{II} = A_1^2 \omega^2 m r dr. \qquad (8.2)$$

Из изложенного следует, что наибольшая нагрузка от кориолисовых сил будет на режимах с наибольшим маховым движением лопасти. При развороте вертолета на режиме висения возникает маховое движение лопастей рулевого винта, амплитуда которого определяется формулами М. Л. Миля [22] и приближенно равна

$$A_1 \approx a_1 = \frac{8}{\gamma} \frac{\omega_y}{\omega_{р.в}},$$

где ω_y — угловая скорость разворота (вертолета); $\omega_{р.в}$ — угловая скорость рулевого винта.

При большой угловой скорости разворота амплитуда махового движения может быть больше, чем на других режимах полета. Так как величина амлитуды второй гармоники кориолисовой силы пропорциональна квадрату амплитуды A_1 (8.2), то на развороте могут возникнуть большие изгибающие моменты, а следовательно, и переменные нормальные напряжения в сечениях лопасти. Хотя продолжительность разворота относительно невелика, однако для большинства винтов повреждаемость, вносимая в конструкцию большими нагрузками, оказывается больше, чем на других режимах полета.

В полете с поступательной скоростью большое маховое движение и большие изгибающие моменты могут быть на режиме полета с малой скоростью (V=40...60 км/ч) вследствие больших по величине переменных составляющих индуктивных скоростей и при больших скоростях полета. При полете на одной и той же скорости амплитуда махового движения и изгибающие моменты будут больше при больших углах установки лопастей и при больших углах атаки рулевого винта (т. е. при больших углах скольжения вертолета). На установившихся режимах полета величины углов установки лопастей рулевого винта и углов скольжения вертолета определяются условиями балансировки. При выполнении в полете с поступательной скоростью маневра с резкой дачей педали может иметь место такое сочетание углов установки лопастей и угла атаки рулевого винта (угла скольжения вертолета), при котором маховое движение и изгибающие моменты будут значительно больше, чем на установившемся режиме полета. В целом при определении ресурса рулевого винта следует рассмотреть режимы: разворот на висении, крейсерский режим, составляющий большую долю общего срока службы винта; режимы полета на малой скорости и на максимальной скорости, доля которых в общем сроке службы может быть и меньше, чем для крейсерского режима, но нагрузки — больше; режим набора высоты; режимы полета с большим скольжением и, наконец, маневры с резкими дачами педалей (входы в виражи и скольжения и выходы из них), характеризуемые большими нагрузками.

§ 8.2. ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАСТЕЙ И СПОСОБЫ ИХ УМЕНЬШЕНИЯ

Переменный момент от кориолисовых и аэродинамических сил вызывает изгибные колебания лопастей и соответствующие переменные напряжения в лонжероне. При отсутствии шарнира, позволяющего лопасти совершать колебания в плоскости вращения (ВШ), изгибные колебания в двух плоскостях — наибольшей и наименьшей жесткости, при угле установки лопасти φ не равном нулю, оказываются связанными (см. гл. 4). Это означает, что одновременно происходит изгиб лопасти как в плоскости наибольшей, так и в плоскости наименьшей жесткости — поперечные колебания лопасти. Только при $\varphi=0$ можно говорить отдельно о колебаниях в плоскости взмаха и в плоскости вращения, происходящих независимо друг от друга. Расчеты показывают, что собственные частоты связанных изгибных (поперечных) колебаний зависят от угла установки лопастей. Примеры такой зависимости показаны на рис. 8.3. Одна из частот совместных колебаний — p_1 соответствует при $\varphi=0$, т. е. когда колебания в двух плоскостях происходят раздельно, низшему тону колебаний лопасти в плоскости вращения. Для винта с повышенной жесткостью при больших, а для винта с пониженной жесткостью при малых значениях угла установки φ частота p_1 близка к удвоенной частоте вращения рулевого винта $2n_{р.в}$, т. е. к частоте второй гармоники возбуждающих колебания сил. Это является важной особенностью рулевых винтов. Практически не удается спроектировать винт таким образом, чтобы существенно отдалить собственную частоту p_1 от частоты второй гармоники возмущающих сил во всем диапазоне изменения углов установки лопастей. Даже у лучших винтов при больших или малых значениях φ имеет место значительное динамическое усиление колебаний. Именно поэтому вторая гармоника кориолисовой силы и определяет в основном величину переменных напряжений в лонжероне. Следовательно, всегда необходимо принимать меры к снижению внешних нагрузок (в первую очередь кориолисовых сил). К числу таких мер относятся введение в инструкцию по технике пилотирования ограничений по угловой скорости разворота и темпу дачи педалей, создание визуальной или звуковой сигнализации приближения к опасному режиму и включение в систему путевого управления соответствующих устройств — ограничителей темпа дачи педалей или максимального угла установки лопастей.

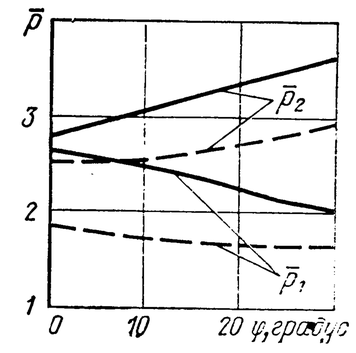


Рис. 8.3. Резонансные диаграммы рулевых винтов:

——— винт с повышенной жесткостью; — — — винт с пониженной жесткостью

Эффективным средством снижения нагрузок на лопасти при больших скоростях полета является установка на вертолет киля таким образом, чтобы создаваемая им сила уменьшала потребную по условиям

путевой балансировки тягу рулевого винта. Общий диапазон углов установки лопастей следует ограничить до пределов, минимально необходимых из условий балансировки и управляемости вертолета.

Полезным средством снижения кориолисовых сил является применение компенсатора взмаха. Амплитуда махового движения винта с компенсатором взмаха $A_{1\varkappa}$ меньше, чем у винта без него,

$$A_{1\varkappa} \approx \frac{A_{10}}{\sqrt{1+\varkappa^2}}.$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент компенсатора взмаха. Эффект компенсатора взмаха может быть понят с помощью уравнения махового движения. Для режима висения ($\mu=0$) и лопасти, у которой $I_{цб}=0$, из первого уравнения (7.22) с учетом (7.15), полагая $\gamma=0$ и $I_{цб}=0$, можно получить уравнение колебаний абсолютно жесткой лопасти:

$$\ddot{\beta} + \omega_{р.в}^2\left(1+\frac{\gamma_0}{4}\varkappa\right)\beta=0. \qquad (8.3)$$

Если $\varkappa=0$, то, как уже было установлено в § 3.6, частота нулевого тона $p_0=\omega_{р.в}$. Если $\varkappa>0$, то, как это следует из (8.3), собственная частота $p_0=\omega_{р.в}\sqrt{1+\frac{\gamma_0}{4}\varkappa}>\omega_{р.в}$. Первая гармоника аэродинамической нагрузки, вызывающая маховое движение, имеет частоту $\omega_{р.в}$. Таким образом, при $\varkappa=0$ имеет место резонанс возбуждающей маховое движение нагрузки с собственной частотой $p_0=\omega_{р.в}$ нулевого тона. При $\varkappa\neq0$ частоты нагрузки $\omega_{р.в}$ и собственных колебаний p_0 не равны. Поэтому при одинаковой внешней возбуждающей колебания нагрузке амплитуда махового движения при $\varkappa\neq0$ меньше, чем при $\varkappa=0$. Уменьшение A_1 приводит, в свою очередь, к уменьшению (пропорционально A_1^2) второй гармоники кориолисовой силы.

В заключение отметим, что в ограниченном объемом курсе не могли быть подробно рассмотрены многие факторы, которые хотя и являются менее значимыми, но в то же время заслуживают внимания при проектировании винта и оценке его прочности. Ограничимся лишь указанием на некоторые из них. Величина изгибающего момента в плоскости вращения определяется не только кориолисовыми силами махового движения, но также и аэродинамическими нагрузками на лопасти винта. Они в существенной мере определяются возмущениями потока, вносимыми несущим винтом. Также имеют значение кориолисовы силы, возникающие (дополнительно к рассмотренным) от изгибных деформаций лопасти в плоскости взмаха. Нагрузки и изгибающие моменты зависят от податливости крепления редуктора рулевого винта (изгибных и крутильных деформаций хвостовой балки) и трансмиссии (ее кручения). Частоты собственных изгибных колебаний определяются жесткостью не только лопасти, но и конструкции втулки. Наряду

с рассмотренным, возможны случаи совпадения частот других гармоник нагрузки с частотами собственных поперечных колебаний. При неудачном выборе конструктивных параметров винта возможно возникновение автоколебаний — так называемого хордового флаттера (см. гл. 7).

§ 8.3. ОСОБЕННОСТИ НАГРУЖЕНИЯ ВИНТА С ВТУЛКОЙ НА КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Особенности нагружения в плоскости взмаха аналогичны рассмотренным в § 6.3 для несущих винтов с такой же втулкой. Отметим только, что относительный диапазон изменения тяги в полете у рулевых винтов значительно шире, чем у несущих. Так, на режиме авторотации тяга близка к нулю, а при наборе высоты достигает больших значений. Еще больше меняется тяга при выполнении маневров с дачами педалей. Поэтому отклонения от условия (6.3), обеспечивающего равенство нулю постоянной составляющей изгибающего момента в комле лопасти, гораздо более значительны, чем для несущих винтов. Следовательно, на многих режимах и особенно при маневрах в комлевой части лопасти возникает большая по величине постоянная составляющая изгибающего момента в плоскости взмаха.

Характерной особенностью винтов с втулкой на кардановом подвесе, послужившей предпосылкой к их применению, является пониженная величина переменного изгибающего момента в плоскости вращения. Рассмотрим вначале (рис. 8.4) два вала, соединенных сочленением Кардана (шарнир Гука). Как известно из теоретической механики, при вращении одного из валов с постоянной угловой скоростью ω_2 другой вал будет вращаться с переменной угловой скоростью ω_1, лишь в среднем равной ω_2. Пусть один из валов *2* не обладает большой жесткостью на кручение, а на другом, жестком на кручение валу *4* установлен тяжелый маховик *5*. Вал *4* будет вращаться вследствие наличия маховика с практически постоянной угловой скоростью. Если привод *1* представляет собой механизм, способный выдерживать постоянную угловую скорость $\omega_{пр}$, то угловые скорости концов вала *2* будут разными, на конце, где установлен привод,— постоянная угловая скорость $\omega_{пр}$, а на другом конце около карданова сочленения *3* — переменная скорость ω_1. Если бы вал *2* был абсолютно жестким, то это являлось бы явным противоречием. Однако для упругого вала противоречия не возникает. Разница скоростей $\omega_{пр}$ и ω_1 обеспечивается упругими деформациями кручения вала *2*. В действительности вал *2* обладает некоторой жесткостью на кручение, поэтому при постоянной угловой скорости $\omega_{пр}$ угловая скорость ω_2 будет только приблизительно постоянной, однако ее колебания будут значительно меньше, чем в случае жесткого вала *2*. Меньше будут и угловые ускорения маховика, а следовательно, и инерционные силы, возникающие на нем.

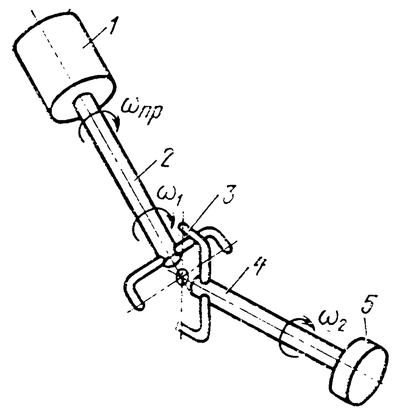


Рис. 8.4. Карданово сочленение двух валов:

1 — привод; *2* — ведущий вал; *3* — карданово сочленение; *4* — ведомый вал; *5* — маховик

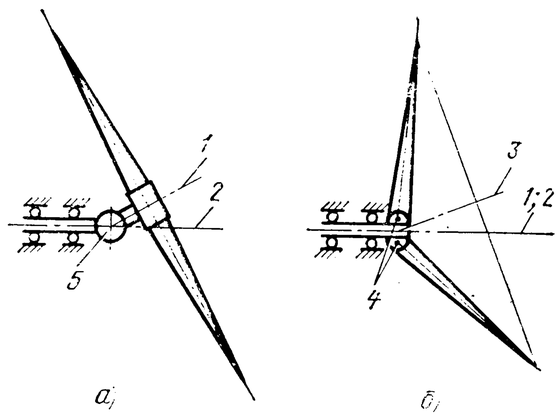


Рис. 8.5. Винт с втулкой на кардановом подвесе (*а*) и винт классической схемы (*б*):

1 — ось втулки; *2* — ось вала винта; *3* — ось конуса лопастей; *4* — ГШ; *5* — карданово сочленение

Эта схема может быть полностью применена к случаю рулевого винта с втулкой на кардановом подвесе. Действительно, привод, т. е. силовая установка вертолета, обладает очень большим приведенным моментом инерции, поэтому угловая скорость ближайшего к силовой установке конца трансмиссии $\omega_{пр}$ практически постоянна. Трансмиссия в силу своей относительно большой длины и относительно малых сечений валов обладает значительной податливостью на кручение. Кручение трансмиссии с малой жесткостью и обеспечивает почти постоянную угловую скорость втулки. Поэтому инерционные силы от угловых ускорений, вызванных изменениями угловой скорости втулки, малы. Следовательно, малы и изгибающие моменты от инерционных сил в плоскости вращения. Что же касается кориолисовых сил, вызываемых маховым движением, то наблюдатель (рис. 8.5, *а*), расположенный на оси втулки *1*, махового движения относительно этой оси не увидит, поэтому и не зарегистрирует кориолисовых сил.

Такой подход не противоречит тому, что было сказано выше о винте с шарнирами. Для рулевого винта с шарнирами (рис. 8.5, *б*) движение рассматриваемой точки на лопасти представлялось как переносное движение вращения винта вокруг оси вала *2* и относительное движение точки при поворотах лопасти относительного ГШ. Маховое движение отмечалось при этом относительно оси винта. Однако возможен и другой подход. Можно рассматривать движение лопасти с позиции наблюдателя, расположенного по оси конуса, описываемого лопастями *3*. Такой наблюдатель не отметит движения лопастей относительно оси конуса. Он не отметит, следовательно, и кориолисовых сил. Однако при более подробном рассмотрении можно убедиться, что такой наблюдатель заметит, что скорость точки на лопасти не остается постоянной. Следовательно, возникает соответствующая инерционная сила. Она равна кориолисовой силе, отмеченной наблюдателем, расположенным на оси вала винта *2*. Таким образом, оба наблюдателя в конечном итоге придут к одному и тому же выводу. Это и не удивительно. Ведь любое физическое явление имеет место независимо от выбранной нами для описания или наблюдения системы координат.

Случай винта с втулкой на кардановом подвесе также может быть рассмотрен с позиций наблюдателя, расположенного на оси вала винта *2*. Однако принятый в тексте метод рассмотрения нагружения представляется более наглядным.

Приведенные выше соображения о нагрузках на винте с втулкой на кардановом подвесе являются вполне точными для трансмиссии с бесконечно малой жесткостью на кручение и для лопастей, абсолютно жестких на изгиб в плоскости взмаха. В действительности это не так. Поэтому в плоскости вращения некоторые, не очень большие по величине инерционные силы все-таки возникают. Следовательно, необходимо избегать, как и для винта классической схемы, случаев резонанса.

глава 9 СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ВИНТАМИ

§ 9.1. НАГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ДЕТАЛИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, И ЗАДАЧИ РАСЧЕТА

По величине и характеру нагрузок систему управления несущим винтом целесообразно разбить на три основных участка (рис. 9.1). Первый из них составляют: рычаг поворота лопасти *2*, тяга *3* или тяги, а также качалки, соединяющие лопасть с автоматом перекоса, и вращающееся кольцо *4* автомата перекоса. Второй участок — невращающееся кольцо *5* автомата перекоса, тяги, рычаги и качалки *6*, соединяющие автомат перекоса с бустером *7*, и детали крепления бустеров *8*. Наконец, в третий участок входят тяги, качалки и тросовая проводка, соединяющие золотники бустеров с ручками управления циклическим или общим шагом, и сами ручки управления, а на двухвинтовых вертолетах — также проводка управления от педалей до золотников бустеров и сами педали.

Если в системе управления нет бустера, то границей второго и третьего участков является тот элемент системы управления, который воспринимает переменные нагрузки и передает их на элементы конструкции фюзеляжа в том месте, где он закреплен. Таким элементом может быть, например, инерционный демпфер. На соосных вертолетах имеются также тяги, соединяющие верхний и нижний автоматы перекоса, и соответствующие кронштейны и рычаги. Эти детали составляют особый участок. Особо надо рассматривать участок между бустерами и механизмом общего и дифференциального шага. Аналогичный подход является удобным и при расчете путевого управления одновинтового вертолета. К первому участку относятся рычаги поворота лопастей и крестовина управления общим шагом, ко второму — шток. Третий участок составляют педали и проводка от них до золотника бустера. Особо рассматриваются детали между бустером и механизмом перемещения штока.

В деталях первого и второго участков нагрузки вызываются шарнирными моментами лопастей. Так, в рычаге поворота возникает изгибающий момент, а в тяге, соединяющей его с автоматом перекоса, — осевая сила, пропорциональные шарнирному моменту. На вращающееся кольцо автомата перекоса действуют силы S_k от всех лопастей винта. Обычно оси тяг почти параллельны оси винта. Поэтому можно считать, что на вращающееся кольцо автомата перекоса (если, конечно, пренебречь его наклоном) дей-

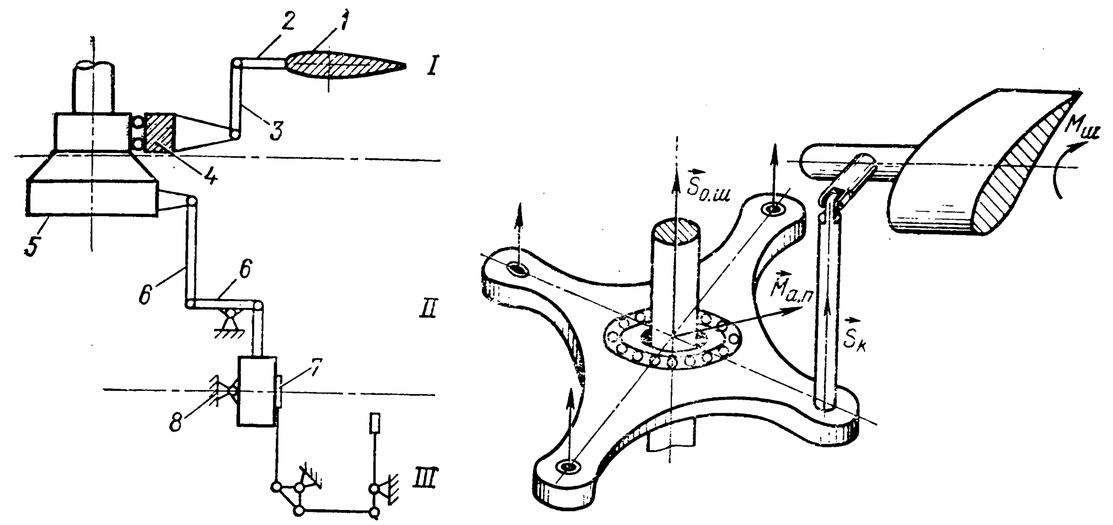


Рис. 9.1. Участки системы управления несущим винтом:

1 — лопасть; *2* — рычаг поворота лопасти; *3* — тяга управления шагом лопасти; *4* — вращающееся кольцо автомата перекоса; *5* — невращающееся кольцо автомата перекоса; *6* — тяги и качалки; *7* — бустер; *8* — крепление бустера; *I—III* — участки системы управления

Рис. 9.2. Силы и моменты на вращающемся кольце автомата перекоса

ствуют силы, перпендикулярные к его плоскости (рис. 9.2). Каждая из этих сил вызывает изгиб соответствующего рога кольца автомата перекоса, а все они вместе вызывают изгиб и кручение самого кольца.

При рассмотрении нагрузок на втором участке системы управления параллельные силы $\vec{S}_k$ могут быть заменены равнодействующей $\vec{S}_{о.ш}$, направленной по оси винта, и моментом $\vec{M}_{а.п}$, вектор которого лежит в плоскости кольца автомата перекоса. Суммарная сила $\vec{S}_{о.ш}$ стремится переместить автомат перекоса вверх или вниз, а момент — повернуть его относительно соответствующих осей. Сила $\vec{S}_{о.ш}$ нагружает детали системы управления общим шагом, а момент $\vec{M}_{а.п}$ — детали управления циклическим шагом лопастей. Бустеры передают приходящие на них силы на тот элемент конструкции фюзеляжа, к которому они крепятся.

Из изложенного ясно, что разница в нагружении деталей, входящих в первый и во второй участки системы управления, состоит в том, что первые нагружаются каждой лопастью в отдельности, а нагрузки во вторых определяются суммарными силой $\vec{S}_{о.ш}$ и моментом $\vec{M}_{а.п}$, являющимися результатом воздействия всех лопастей винта. На третий участок при применяемых обычно необратимых бустерах нагрузки от несущего винта не проходят. Нагружение третьего участка системы управления определяется силами, прилагаемыми летчиком к ручке управления, ручке общего шага или педалям.

Детали, соединяющие верхний и нижний автоматы перекоса соосного вертолета, нагружаются так же, как детали второго участка, суммарными силой $\vec{S}_c$ и моментом $\vec{M}_{а.п}$ от шарнирных моментов лопастей. Детали, входящие в часть системы управления между бустерами и механизмами общего и дифференциального шага на соосных вертолетах и бустером и механизмом управления штоком рулевого винта, нагружаются силами, создаваемыми бустерами.

Шарнирный момент является переменной по азимуту величиной, следовательно, первый и второй участки системы управления подвергаются действию усталостных нагрузок и необходимо поэтому обеспечить их усталостную прочность, большой ресурс по условиям выносливости. То же относится к деталям, соединяющим верхний и нижний автоматы перекоса.

Нагрузки, действующие на третьем участке, можно рассматривать как однократные. То же относится к нагрузкам на участках между бустерами и механизмами общего и дифференциального шагов (на соосных вертолетах) и между бустером и механизмом управления штоком рулевого винта (на одновинтовых вертолетах). О расчете деталей, входящих в эти участки, см. гл. 15.

§ 9.2. ШАРНИРНЫЙ МОМЕНТ ЛОПАСТИ

Величину шарнирного момента $M_ш$ для качественного анализа удобно представить в виде суммы трех слагаемых: шарнирного момента, действующего на лопасть, рассматриваемую как абсолютно жесткое тело ($M_{ш.ж}$), момента от изгибных деформаций лопасти ($M_{ш.и}$) и момента, вызываемого крутильными деформациями лопасти ($M_{ш.к}$).

Подставляя в формулу (7.9) выражения (7.10)—(7.13), получим

$$M_{ш.ж} = M_{упр} = -(\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi)\, I_{о.ш} + (\ddot{\beta}+\omega^2\beta)\, I_{цб} + \int_0^R \mathfrak{M}_a dr. \qquad (9.1)$$

Ограничимся некоторыми, важными для понимания явления, выводами качественного характера. Очевидно, что $M_{ш.ж}$ представляет собой на установившемся режиме полета периодическую функцию азимута — сумму гармоник с частотами, кратными числу оборотов винта. Анализ результатов расчетов и экспериментов показывает, что первая гармоника значительно больше других. Поэтому переменные усилия в деталях первого участка определяются в основном первой гармоникой шарнирного момента (см. рис. 9.4, *а*).

Если использовать известное представление для угла взмаха

$$\beta = a_0 + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \ldots,$$

то можно убедиться, что при подстановке β и $\ddot{\beta}$ во второе слагаемое формулы (9.1) в сумме, стоящей в скобках, первой гармоники не будет. Аналогичное заключение можно сделать и по отношению к сумме $(\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi)$. Поэтому величина первой гармоники шарнирного момента жесткой лопасти определяется первой гармоникой аэродинамического шарнирного момента, которая, в свою очередь, зависит (см. формулы (7.20) и (7.21)) от погонного момента аэродинамических сил относительно фокуса ($\mathfrak{M}_{0a}$), погонной тяги (T), являющейся функцией азимута и радиуса, а также расстояния от фокуса до оси осевого шарнира ($\sigma_ф$).

При заданном законе $T(\varphi)$ величина первой гармоники момента определяется величинами $\mathfrak{M}_{0a}$ и $\sigma_ф$. Эти величины зависят от формы профиля и ширины хорды. На многих лопастях устанавливают так называемые закрылки — небольшие пластинки на задней кромке лопасти. Отгибая эти закрылки, можно значительно изменить $\mathfrak{M}_a$. Однако величина постоянной составляющей, амплитуда и фаза первой гармоники шарнирного момента определяют потребные усилия бустеров, а также статическую подгрузку в элементах системы управления. Поэтому форма профиля и угол отгиба закрылков не могут быть выбраны произвольно, так как это может привести к значительному утяжелению системы управления (включая бустеры) и гидросистемы вертолета. Существуют и другие ограничения. Как момент относительно фокуса $\mathfrak{M}_{0a}$, так и величина $\sigma_ф$ увеличиваются при увеличении ширины лопасти. Следовательно, увеличение хорды по сравнению с обычно принятыми размерами может вызвать неприемлемое возрастание величины шарнирного момента. Поэтому необходимо руководствоваться установившимися рекомендациями по выбору профилей и хорд лопастей.

Рассматривая уравнения движения лопасти относительно осевого шарнира — уравнение (7.18) — можно убедиться в том, что в него входит частота собственных колебаний абсолютно жесткой лопасти на упругом управлении. Отсюда следует, что величина амплитуд второй и более высоких гармоник шарнирного момента $M_{ш.ж}$ зависит от упругих характеристик управления. Величины амплитуд этих гармоник определяются также и инерционными силами, возникающими при колебаниях лопастей на упругом управлении. При подходящих условиях (близость к резонансу) возможно значительное динамическое усиление моментов.

Рассмотрим теперь лопасть, изогнутую как в плоскости взмаха, так и в плоскости вращения (рис. 9.3). При изгибе лопасти в плоскости вращения силы, действующие в плоскости взмаха, вызывают появление шарнирного момента, величина которого определяется формулой

$$dM_ш^T = T^* dr x^*,$$

где T^* — погонная сила в плоскости взмаха; x^* — перемещение сечения в плоскости вращения вследствие изгиба лопасти, отсчитанное от оси ОШ.

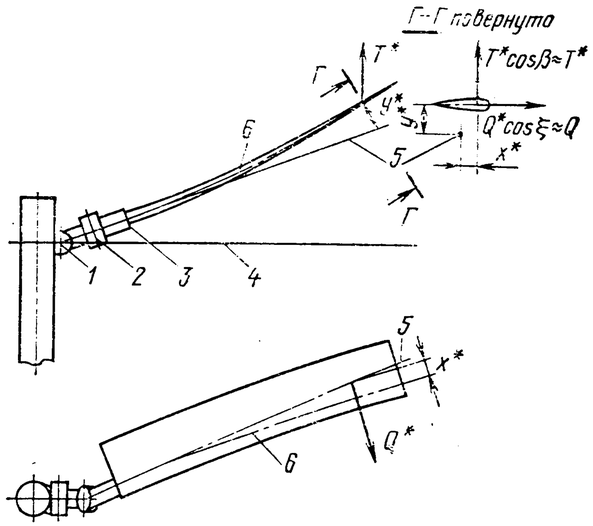


Рис. 9.3. Шарнирный момент от изгиба лопасти:

1 — ГШ; *2* — ВШ; *3* — ОШ; *4* — плоскость вращения; *5* — ось ОШ; *6* — упругая линия лопасти

Аналогичным образом силы, действующие в плоскости вращения, вызывают шарнирный момент:

$$dM_{ш}^{Q}=Q^{*}dry^{*},$$

где Q^{*} — погонная сила в плоскости вращения; y^{*} — перемещение сечения в плоскости взмаха вследствие изгиба лопасти, отсчитанное от оси ОШ.

Таким образом, при изгибе лопасти в двух плоскостях возникает шарнирный момент, равный:

$$M_{ш.и}=\int_{0}^{R}(T^{*}x^{*}+Q^{*}y^{*})\,dr.$$

Однако использование для расчетов этой формулы, дающей наглядное представление о моменте, возникающем от изгиба лопасти, практически нецелесообразно. Рационально обратиться к другому по форме выражению для исследуемого момента, имеющему то же физическое содержание. Из формулы (5.35), считая лопасть незакрученной ($r=0$, $p=M_x/(EI_x)$, $q=M_y/(EI_y)$) и $m_w=0$, получим

$$M_{ш.и}=\int_{0}^{R}M_xM_y\left(\frac{1}{EI_x}-\frac{1}{EI_y}\right)dr. \qquad (9.2)$$

Здесь EI_y и EI_x — жесткости лопасти на изгиб в плоскостях наибольшей и наименьшей жесткости; M_y и M_x — изгибающие моменты в тех же плоскостях.

Из формулы (9.2) следует, что если изгибная жесткость лопасти в двух плоскостях одинакова, ее изгиб в обеих плоскостях не влияет на величину шарнирного момента. В общем же случае дополнительный момент вследствие изгиба лопасти надо иметь в виду, особенно при оценке амплитуд второй и более высоких гармоник шарнирного момента. Третья составляющая шарнирного момента $M_{ш.к}$ может оказаться значительной для лопастей, имеющих необычно малую жесткость на кручение.

В целом обычно первая гармоника шарнирного момента значительно больше остальных (рис. 9.4, *а*) Иногда заметную величину имеет вторая гармоника. С ростом скорости полета амплитуды этих гармоник увеличиваются. На малых скоростях и при торможениях заметную величину имеют и более высокие гармоники (обычно третья — шестая). На двухвинтовых, особенно на вертолетах продольной схемы, переменная часть шарнирного момента на режимах полета с малой скоростью заметно больше, чем на изолированном винте вследствие влияния одного винта на другой.

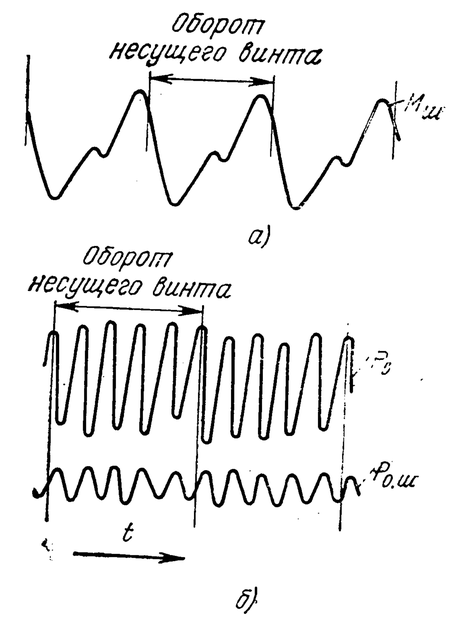


Рис. 9.4. Изменение по времени шарнирного момента $M_ш$(*а*) и усилий $P_в$ — в системе продольного управления и $P_{о.ш}$ — в системе управления общим шагом (*б*)

Большие шарнирные моменты возникают при маневрах с перегрузкой $n_y>1$ (горки, выходы из пикирования, виражи) из-за увеличения нагрузки на винт и при большой скорости полета. В последнем случае существенное влияние оказывают особенности околозвукового обтекания концевых сечений лопасти.

Особенно увеличиваются нагрузки в управлении при возникновении срывного флаттера (см. гл. 7). Это проявляется в полете на большой скорости на большой высоте, при повышенной температуре наружного воздуха (т. е. при малой плотности), с увеличенным весом и при маневрах (т. е. при большой тяге винта). Срывной флаттер обусловливает ограничения по режимам полета для современных вертолетов.

Для расчета величины шарнирного момента используются методы [21, 22], основанные на изучении совместных изгибно-крутильных колебаний лопастей. Пользуются также пересчетом результатов измерений в полете на лопастях, близких по своей конструкции, и обобщенными результатами измерений на различных лопастях.

Пересчет выполняется на основе теории подобия. Если в результате измерений определено некоторое значение шарнирного момента $M_ш$, то можно найти коэффициент шарнирного момента

$$m_ш=\frac{M_ш}{\frac{\rho(\omega R)^2}{2}R^3}.$$

На подобных режимах для подобных лопастей коэффициент $m_ш$ остается одинаковым. Поэтому шарнирный момент на подобной лопасти будет равен

$$M_{ш.р}=m_ш\frac{\rho(\omega_pR_p)^2}{2}R_p^3=M_ш\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\left(\frac{R_p}{R}\right)^5.$$

В этой формуле индексами р отмечены параметры, относящиеся к рассчитываемой лопасти.

Окончательное определение ресурса деталей системы управления, как и других агрегатов, выполняется по результатам измерений нагрузок в летных испытаниях и стендовых испытаний на выносливость.

§ 9.3. РАСЧЕТ ПЕРВОГО УЧАСТКА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Если величина шарнирного момента известна, то сила S_k в тяге, соединяющей автомат перекоса с рычагом поворота лопасти, изгибающие моменты в этом рычаге, а также в роге автомата перекоса определяются обычным образом. По их величинам по формулам сопротивления материалов находятся напряжения. Особенности определения напряжений в проушинах, предназначенных для установки подшипников, рассматриваются в § 9.5.

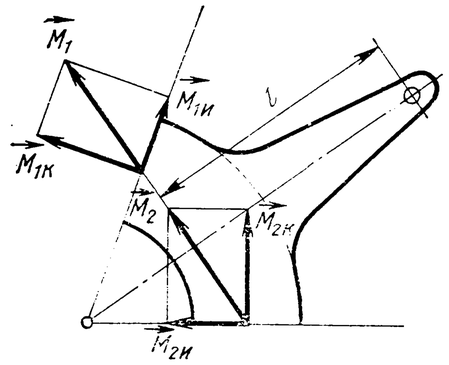
Другая более сложная задача — определение напряжений во вращающемся кольце автомата перекоса. Часто применяют следующую упрощенную расчетную схему. Рассматривают сектор кольца с рогом посредине (рис. 9.5). Реакции невращающегося кольца полагают для упрощения равными нулю. При этом предположении в радиальных сечениях, симметрично расположенных относительно оси рога, из условий равновесия сектора должны действовать моменты M_1 и M_2:

$$M_1 = M_2 = \frac{1}{2} S_k l,$$

где l — плечо, указанное на рис. 9.5.

Вектор момента $\vec{M}_1$ можно разложить на две составляющих: перпендикулярно к плоскости сечения — $\vec{M}_{1к}$ и параллельно ей — $\vec{M}_{1и}$. Момент $\vec{M}_{1к}$ — крутящий, момент $\vec{M}_{1и}$ — изгибающий. Вызываемые ими напряжения определяются по формулам сопротивления материалов.

Способ, дающий более точные результаты, состоит в том, что рассматривается каждая гармоника шарнирного момента в отдельности. Учитываются реакции невращающегося кольца автомата перекоса. Распределение сил реакции производится в зависимости от соотношения фаз рассматриваемой гармоники по отдельным лопастям. Постоянная часть шарнирных моментов всех лопастей приближенно уравновешивается равномерно распределенной по окружности обоймы подшипника (рис. 9.6, *в*) нагрузкой q_0. Для уравновешивания первой гармоники по окружности обоймы прикладывается распределенная нагрузка, величина которой изменяется в зависимости от центрального угла ψ (рис. 9.6, *а*) по закону $q = q_0 \sin\psi$. Пример уравновешивания второй гармоники для пятилопастного винта показан на рис. 9.6, *б*. Более высокие гармоники при расчете вращающегося кольца автомата перекоса можно не рассматривать. Дальнейший расчет производится как для кольцевой статически неопределимой рамы, которая нагружена силами



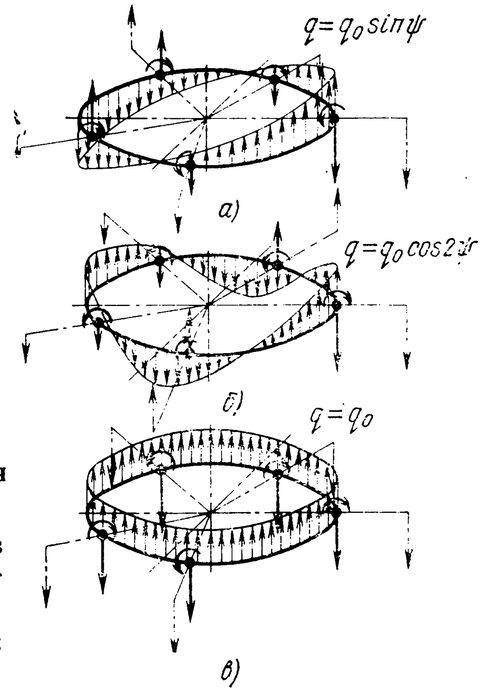


Рис. 9.5. Схема к расчету вращающегося кольца автомата перекоса

Рис. 9.6. Уравновешивание сил и моментов на вращающемся кольце автомата перекоса:

а — первая гармоника; *б* — вторая гармоника; *в* — постоянная составляющая

от лопастей, приложенными к рогам автомата перекоса, и уравновешивающей нагрузкой.

§ 9.4. РАСЧЕТ ВТОРОГО УЧАСТКА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Напряжения в невращающемся кольце автомата перекоса, усилия и напряжения в тягах и качалках на втором участке системы управления и силы на бустерах и их креплениях определяются, как уже указывалось выше, суммарным воздействием всех лопастей. Поэтому для их определения необходимо найти силу $\vec{S}_{о.ш}$ и момент $\vec{M}_{а.п}$. Для этого надо использовать правила суммирования, полученные в гл. 2.

Так как сила $\vec{S}_{о.ш}$ представляет собой сумму параллельных сил $\vec{S}_k$, то необходимо воспользоваться первым правилом суммирования. На основании этого правила сила $\vec{S}_{о.ш}$ состоит из постоянной составляющей и гармоник, кратных числу лопастей винта (см. рис. 9.4, *б*). Величина постоянной составляющей

$$S_{о.ш}^{(0)} = z S_k^{(0)},$$

где $S_k^{(0)}$ — постоянная часть силы, действующей на рог автомата перекоса от одной лопасти.

Амплитуды гармоник силы $S_{о.ш}$ определяются формулами

$$S_{о.ш}^{(i)} = z S_k^{(i)}, \quad i = z,\ 2z, \ldots .$$

где $S_{о.ш}^{(i)}$ — амплитуда гармоники суммарной силы; $S_k^{(i)}$ — амплиту-

да той же гармоники силы, действующей на рог автомата перекоса от одной лопасти.

Практическое значение имеет гармоника силы $S_{о.ш}$, соответствующая первой проходной гармонике шарнирного момента, т. е. гармонике с номером $i=z$. Более высокие гармоники имеют относительно малые значения.

Для определения момента $\vec{M}_{а.п}$ необходимо воспользоваться вторым правилом суммирования. Постоянная часть вектора момента $M_{а.п}^{(о)}$ на невращающемся кольце автомата перекоса определяется величиной амплитуды первой гармоники:

$$M_{а.п}^{(о)}=i^*\frac{z}{2}M_{ш}^{(1)},$$

где $M_{ш}^{(1)}$ — амплитуда первой гармоники шарнирного момента одной лопасти; i^* — передаточное число.

Переменную составляющую момента удобно представить в виде совокупности векторов постоянной длины, вращающихся в зависимости от номера проходной гармоники в сторону вращения винта или в противоположную сторону с частотой $f=mzn$, $m=1, 2, \ldots$ (см. гл. 2). Величина вектора определяется формулой:

$$M_{а.п}^{(i)}=\frac{z}{2}i^*M_{ш}^{(i\pm1)},\ i=z,\ 2z,\ldots$$

где $M_{ш}^{(i\pm1)}$ — амплитуда проходной гармоники шарнирного момента одной лопасти.

Обычно достаточно рассмотреть моменты, создаваемые гармониками шарнирного момента, имеющими номера $z-1$ и $z+1$. Более высокие проходные гармоники, как правило, практического значения не имеют (см. рис. 9.4, *б*).

Правила суммирования в гл. 2 были получены для абсолютно идентичных лопастей. В действительности, вследствие неконтролируемых в производстве отклонений характеристик лопастей, амплитуды непроходных гармоник шарнирного момента отдельных лопастей отличаются друг от друга по величине. Поэтому их суммы полностью в нуль не обращаются и в спектре амплитуд усилий в системе управления реальных винтов отмечаются кроме проходных также и непроходные гармоники.

Величинами силы $S_{о.ш}$ и момента $M_{а.п}$ определяются усилия в тягах, изгибающие моменты в качалках, силы в проушинах. Дальнейшие вычисления напряжений в тягах и качалках выполняются по формулам сопротивления материалов. Расчет проушин производится, как указано в § 9.5.

Некоторую сложность представляет расчет усилий в цепях управления нижнего автомата перекоса соосного вертолета. Вращающееся кольцо нагружается не только шарнирными моментами лопастей нижнего винта, но и силами, передающимися с верхнего автомата перекоса. Сила $S_{о.ш,н}$ и момент $M_{а.п,н}$ на невращающемся кольце складываются из сил $S_{о.ш}$ и моментов $M_{а.п}$ от лопастей

верхнего и нижнего винтов. Результат зависит от конкретной конструкции системы управления и фазировки несущих винтов. Суммарные сила и момент на невращающемся кольце нижнего автомата перекоса могут оказаться больше или меньше, чем определяемые одним винтом.

Усилия в тягах, соединяющих верхний и нижний автоматы перекоса соосного винта, определяются суммарным воздействием шарнирных моментов всех лопастей верхнего винта. Не останавливаясь на подробностях, зависящих от конкретной конструктивной схемы, отметим, что переменные составляющие усилий в этих тягах определяются, главным образом, первой гармоникой шарнирного момента.

Тяги, входящие в первый и второй участки системы управления, проверяются на отсутствие резонанса с проходными гармониками нагрузок. Для этого вычисляются частоты собственных изгибных колебаний тяг. Приближенный расчет может быть выполнен методом, основанным на применении функций Крылова и описанным в гл. 3, с последующим учетом влияния осевой силы по [2].

§ 9.5. ПРОЧНОСТЬ ПРОУШИН ПРИ ДЕЙСТВИИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗОК

Проушина рассматривается приближенно как кольцевая рама. Суммарная сила, передаваемая на проушину, представляется в виде распределенной радиальной нагрузки. Если суммарная сила направлена вдоль оси симметрии (рис. 9.7, *а*), то нагрузка на проушину приближенно считается распределенной по закону

$$q=\frac{2P}{\pi r}\cos\varphi. \tag{9.3}$$

Если суммарная сила направлена перпендикулярно к оси симметрии (рис. 9.7, *б*), то нагрузка

$$q=\frac{2P}{\pi r}\sin\varphi. \tag{9.4}$$

В формулах (9.3) и (9.4) обозначено: P — суммарная сила, действующая на проушину; r — средний радиус проушины; φ — центральный угол, отсчитываемый, как показано на рис. 9.7.

Нагрузки q вызывают в радиальных сечениях проушины изгибающий момент M, осевую N и перерезывающую силы. Перерезывающей силой можно пренебречь. Выражения для M и N удобно представить в форме:

$$M=f_M(\varphi)Pr;\ N=f_N(\varphi)P, \tag{9.5}$$

где $f_M(\varphi)$ и $f_N(\varphi)$ — безразмерные функции угла φ, зависящие от направления действия силы P. Значения этих функций вычислены путем расчета проушины, как статистически неопределимой рамы.

При действии переменной силы P величины полуразмахов переменной части и статическая подгрузка определяются на основе формул (9.5) выражениями, имеющими вид

$$\Delta M=\frac{cP_{max}-dP_{min}}{2}r;\ \Delta N=\frac{eP_{max}-fP_{min}}{2};$$

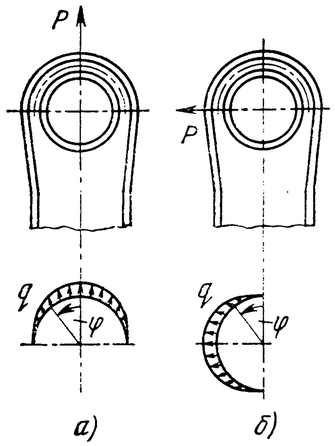


Рис. 9.7. Нагружение проушин:

а — сила вдоль оси симметрии проушины; *б* — сила перпендикулярна оси симметрии проушины

$$M_0 = \frac{cP_{max} + dP_{min}}{2} r; \quad N_0 = \frac{eP_{max} + fP_{min}}{2},$$

где c, d, e, f — значения функций $f_M(\varphi)$ и $f_N(\varphi)$ для сечений, в которых ΔM и соответственно ΔN максимальны. Если сила параллельна оси проушины (рис. 9,7, *а*), они равны $c=d=0{,}054$, $e=f=0{,}462$ (при $P_{max}>0$ и $P_{min}>0$) или $c=0{,}054$, $e=0{,}462$, $d=f=0$ (при $P_{max}>0$, а $P_{min}<0$) или, наконец, $c=d=e=f=0$ (при $P_{max}<0$). Если сила P направлена перпендикулярно к оси проушины (см. рис. 9.7, *б*), то $e=f=0{,}35$ и $c=d=0{,}084$ (при совпадающих по направлению P_{max} и P_{min}) при $c=0{,}084$, $d=0{,}066$ (при противоположно направленных P_{max} и P_{min}).

Найдя величины изгибающего момента и осевой силы, по формулам сопротивления материалов определяют нормальные напряжения изгиба и растяжения и суммарные напряжения, полагая при этом в запас прочности, что сечения, в которых действуют наибольшие изгибающие моменты и осевые силы, совпадают. Полученные путем расчета значения напряжений сопоставляются с допустимыми (по условиям обеспечения достаточного ресурса), определенными путем обобщения результатов усталостных испытаний различных проушин. Если полученные по расчету полуразмахи переменных напряжений $\Delta\sigma$ меньше допустимых (при одинаковых напряжениях статической подгрузки), то ресурс проушины будет достаточно большим. В противном случае следует увеличить размеры поперечного сечения проушины.

глава 10 УСТАЛОСТНАЯ ПРОЧНОСТЬ ВТУЛОК НЕСУЩИХ И РУЛЕВЫХ ВИНТОВ И ДРУГИХ АГРЕГАТОВ

§ 10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК НА ВТУЛКУ

Втулка воспринимает нагрузки от лопастей несущего винта. Расчетными случаями для деталей втулки являются обычно случаи I-л, III-л и II-з норм прочности (см. [27] и введение). В случаях I-л и III-л проверяется усталостная прочность, в случаях III-л и II-з — статическая. Для втулки рулевого винта к этим случаям надо добавить случай II-л повышенных усталостных нагрузок при развороте. Задачей расчета является, таким образом, определение напряжений в деталях втулки для указанных расчетных случаев и сопоставление их с допустимыми — в случаях I-л, II-л и III-л — по усталостной прочности, а в случаях III-л и II-з — по статической прочности (см. гл. 13 и 15).

Как известно, втулки могут иметь различные конструктивные схемы, в зависимости от чего методика расчета может изменяться. Однако основные приемы, как правило, сохраняются. Рассмотрим методику расчета для втулки, показанной на рис. 10.1. Эта втулка состоит из следующих основных конструктивных элементов: корпуса втулки *6* с проушинами ГШ, промежуточной скобы *4* с проушинами ГШ и ВШ, пальцев ВШ *1* и ГШ *5*, цапфы ОШ *2* с проушинами ВШ, корпуса ОШ с гребенкой крепления лопасти *3* и гидравлического демпфера *7*. К корпусу ОШ крепится рычаг поворота лопасти.

Переменные напряжения в деталях втулки в полете создаются передающимися с лопасти на втулку изгибающими моментами и

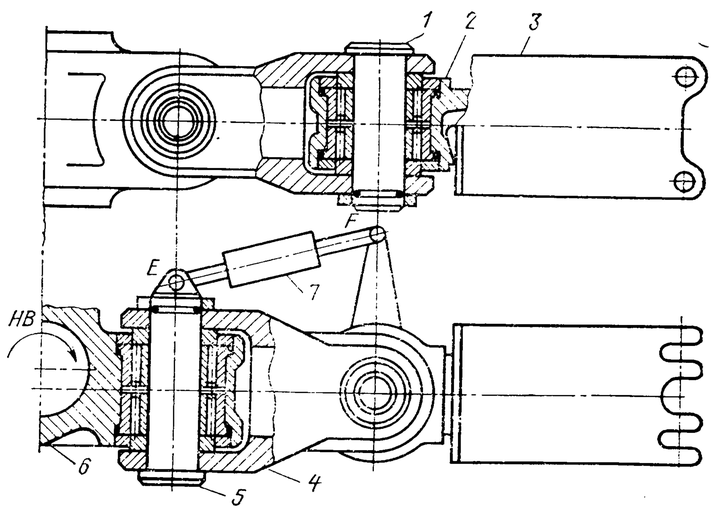


Рис. 10.1. Втулка несущего винта:

1 — палец ВШ; *2* — цапфа ОШ; *3* — корпус ОШ; *4* — промежуточная скоба; *5* — палец ГШ; *6* — корпус втулки; *7* — гидравлический демпфер ВШ

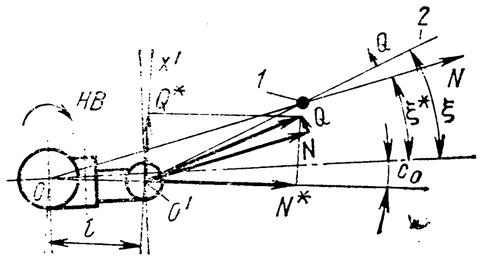


Рис. 10.2. Силы на втулке в плоскости вращения:

1 — центр тяжести лопасти; *2* — ось лопасти

перерезывающими силами в плоскости взмаха и в плоскости вращения, а также моментом кручения лопасти. Обычно при расчете втулки касательными напряжениями от перерезывающих сил и момента кручения пренебрегают. Величины изгибающих моментов могут быть определены из расчета вынужденных колебаний лопасти (гл. 5 и 6) или по результатам измерений в полете. Наибольшие величины этих моментов в комлевой части лопасти и в деталях втулки отмечаются обычно при полете на малой скорости и особенно на режиме торможения. Наибольшую повреждаемость могут внести как эти режимы, так и крейсерский режим. Эти режимы, дополненные еще режимом полета на максимальной скорости, обычно и рассматриваются при расчете втулки и определении ее ресурса по условиям выносливости. При прикидочных расчетах с некоторым запасом величина момента в плоскости вращения может быть принята равной максимальной величине момента демпфера вертикального шарнира.

Статическую подгрузку создают как перечисленные выше силы и моменты, так и центробежная сила. Обычно статической подгрузкой от изгибающих моментов и силы тяги лопасти пренебрегают. Рассмотрим постоянные составляющие сил в плоскости вращения (рис. 10.2). На вертикальный шарнир действуют передающиеся от лопасти центробежная сила N и сила лобового сопротивления Q. Сила N направлена по прямой, соединяющей ось вращения винта с центром тяжести лопасти. Сила Q перпендикулярна оси лопасти. Для того чтобы найти величину и направление этих сил, надо обратиться к результатам аэродинамического расчета и расчета лопасти относительно ВШ. Однако с небольшой погрешностью можно поступить проще. Заменим силы N и Q силами N^* и Q^*, направленными соответственно по оси OO', соединяющей центр втулки O с осью ВШ O', и по перпендикулярной к ней оси $O'x'$:

$$N^* = N\cos(\xi^* + c_0) - Q\sin(\xi + c_0);$$

$$Q^* = N\sin(\xi^* + c_0) + Q\sin(\xi + c_0).$$

Здесь ξ, ξ^* и c_0 — малые углы, показанные на рис. 10.2. Так как сила N значительно больше Q, а углы $\xi^* + c_0$ и $\xi + c_0$ — малы, то

$$N^* \approx N. \qquad (10.1)$$

Крутящий момент на валу винта

$$M_{кр} = zQ^*l,$$

где z — число лопастей; $l = OO'$ — плечо силы Q^* относительно оси винта, отсюда

$$Q^* = \frac{M_{кр}}{zl}. \qquad (10.2)$$

Таким образом, определив из аэродинамического расчета величину $M_{кр}$ и зная центробежную силу N, по формулам (10.1) и (10.2) найдем значения сил N^* и Q^*, которые и будем использовать в дальнейших расчетах. В случае III-л силы N^* и Q^* определяются с учетом увеличения центробежной силы вследствие раскрутки винта и по значению крутящего момента на валу винта при выполнении маневра (см. [27] и введение).

В случае II-з на втулку действует изгибающий момент в плоскости взмаха $M_{взм}$, возникающий при падении лопасти на ограничитель свеса. Величины этого момента в различных сечениях по длине рукава втулки могут быть найдены путем расчета, описанного в гл. 3.

§ 10.2. СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ В ДЕТАЛЯХ ВТУЛКИ

Рассмотрим вначале промежуточную скобу (рис. 10.3). В случаях I-л и III-л на ее внешний по радиусу конец действуют переменные изгибающие моменты в плоскостях взмаха и вращения и силы N^* и Q^*. В случае II-з — момент в плоскости взмаха. Эти силы и моменты вызывают соответствующие реакции в проушинах ГШ. Величины этих реакций при действии сил N^* и Q^* нетрудно определить. Составляя уравнения моментов относительно точек B и A, получим

$$P_A = \frac{N^*\cos c_0 + Q^*\sin c_0}{2} + \frac{N^*\sin c_0 - Q^*\cos c_0}{h_{г.ш}} l_ш;$$

$$P_B = \frac{N^*\cos c_0 + Q^*\sin c_0}{2} - \frac{N^*\sin c_0 - Q^*\cos c_0}{h_{г.ш}} l_ш.$$

Кроме этих постоянных по величине сил на проушины действуют переменные силы ΔP_A и ΔP_B от изгибающего момента в плоскости вращения лопасти. Для рассматриваемой втулки переменный момент в плоскости вращения $\Delta M_{вр}$ уравновешивается силой ΔS, действующей вдоль оси гидродемпфера EF и параллельной ей силой, проходящей через ось ВШ O' (см. рис. 10.3). Эти силы образуют пару:

$$\Delta S l_д = \Delta M_{вр},$$

где $l_д$ — плечо, показанное на рис. 10.3.

Отсюда $\Delta S = \Delta M_{вр}/l_д$.

Силы ΔS направлены к оси скобы под углом γ (см. рис. 10.3). Составляющие силы ΔS по оси скобы и перпендикулярно к ней: $\Delta S_r = \Delta S\cos\gamma$, $\Delta S_x = \Delta S\sin\gamma$.

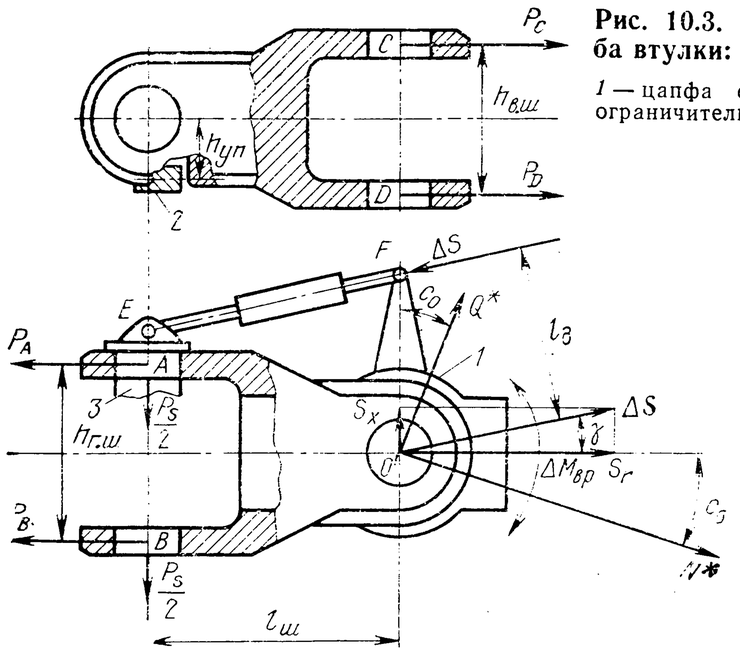


Рис. 10.3. Промежуточная скоба втулки:

1 — цапфа осевого шарнира; *2* — ограничитель свеса; *3* — палец ГШ

В проушинах ГШ от этих сил возникают силы

$$\Delta P_A = \frac{\Delta S_r}{2} - \frac{\Delta S_x l_ш}{h_{г.ш}}; \quad \Delta P_B = \frac{\Delta S_r}{2} + \frac{\Delta S_x l_ш}{h_{г.ш}}.$$

Перпендикулярно к оси скобы на проушины действует сила $\Delta P_S = \Delta S_x$.

В случае II-з момент в плоскости взмаха $M_{взм}$ уравновешивается парой сил $P_{уп}$, одна из которых приложена к проушинам ГШ, а другая — в месте контакта промежуточной скобы и упора ограничителя свеса. Силу, действующую на одну проушину, можно поэтому определить по формуле

$$P_A = P_B = \frac{P_{уп}}{2} = \frac{1}{2}\frac{M_{взм}}{h_{уп}},$$

где $h_{уп}$ — расстояние упора до оси ГШ.

В проушинах вертикального шарнира составляющие реакции, параллельные оси скобы, определяются по следующим формулам:

от сил N^* и Q^*

$$P_C = P_D = \frac{N^* \cos c_0 + Q^* \sin c_0}{2};$$

от момента в плоскости вращения

$$\Delta P'_C = \Delta P_D = \frac{\Delta S_r}{2};$$

от момента в плоскости взмаха

$$\Delta P''_C = \Delta P''_D = \frac{\Delta M_{взм}}{h_{в.ш}},$$

где $h_{в.ш}$ — плечо, показанное на рис. 10.3.

По этой же формуле определяются силы в проушинах ВШ в случае II-з. Составляющими реакций, перпендикулярными к оси скобы, можно пренебречь.

По найденным таким образом реакциям оценивают прочность проушин. В случае I-л используется изложенный в § 9.5 метод оценки усталостной прочности, а в случаях III-л и II-з — метод оценки статической прочности (см. гл. 13 и 15).

Определяются также напряжения от изгиба и растяжения в сечениях корпуса промежуточной скобы, перпендикулярных оси ОШ. Распределение нормальных напряжений в сечениях, расположенных вблизи от концов промежуточной скобы, может отличаться от линейного, задаваемого формулами сопротивления материалов. Это вызвано тем, что по концам скобы приложены (от проушин) нагрузки, близкие к сосредоточенным. По той же причине возникают дополнительные касательные напряжения. Поэтому применение формул сопротивления материалов может привести к ошибкам. На практике пользуются экспериментальными поправками, полученными при испытаниях скоб аналогичной конфигурации.

Пальцы вертикального и горизонтального шарниров рассматриваются как балки, лежащие на опорах, которыми служат подшипники, установленные в проушинах корпуса втулки или в проушине цапфы осевого шарнира (см. рис. 10.1). К балкам приложены силы, определенные в предыдущем разделе. Определение реакций опор, изгибающих палец моментов и напряжений в сечениях пальца, ведется методами сопротивления материалов. В сечении, в котором нормальные напряжения являются наибольшими, определяются также касательные напряжения от постоянной и переменной составляющих перерезывающей силы, действующей в пальце. По величинам σ и τ подсчитываются эквивалентные напряжения:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Цапфа и корпус осевого шарнира считаются нагруженными в случаях I-л и III-л переменными изгибающими моментами в плоскостях взмаха и вращения и центробежной силой, а в случае II-з — моментом в плоскости взмаха. Проушина вертикального шарнира рассчитывается обычным образом. Проушины гребенки крепления лопасти на корпусе осевого шарнира рассчитываются так же, как встречные проушины узла крепления лопасти (см. § 6.2).

Изгибающий момент передается с корпуса осевого шарнира на цапфу реакциями подшипников (рис. 10.4, *а*). Поэтому эпюры изгибающих моментов по корпусу $M_к$ и по цапфе $M_ц$ имеют вид, показанный на рис. 10.4, *б*. Центробежная сила передается с корпуса на цапфу упорным подшипником. Поэтому эпюры осевых сил имеют вид, показанный на рис. 10.4, *в*. Напряжения в сечениях, перпендикулярных оси ОШ, определяются по формулам сопротивления материалов. Но при этом для сечений, расположенных вбли-

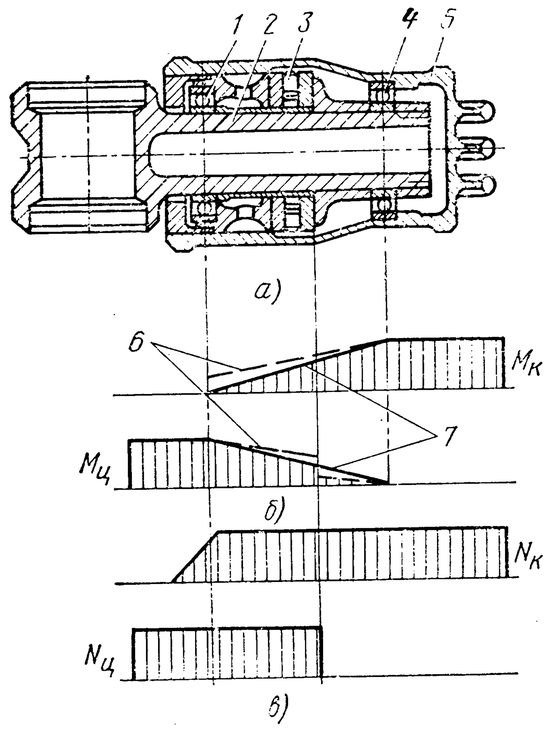


Рис. 10.4. Цапфа и корпус осевого шарнира:

а — схема конструкции; *б* — эпюры изгибающего момента с учетом *6* и без учета (7) доли момента, воспринимаемой упорным подшипником; *в* — эпюры осевой силы; *1* и *4* — радиальные подшипники; *2* — цапфа; *3* — упорный подшипник; *5* — корпус

зи гребенки, вводятся эмпирические поправки, учитывающие отклонение от линейного закона распределения напряжений в сечении, вызванные близостью мест приложения практически сосредоточенных нагрузок (см. выше — расчет промежуточной скобы).

Детали демпфера вертикального шарнира рассчитываются на действие найденной ранее силы S и сил давления в цилиндре гидродемпфера.

§ 10.3. УСТАЛОСТНАЯ ПРОЧНОСТЬ ДРУГИХ АГРЕГАТОВ

Подредукторная рама. Переменные напряжения в стержнях рамы и узлах их крепления вызываются переменными силой и моментом несущего винта (см. гл. 11). Наибольшую повреждаемость вносят режимы торможения, полета на малой скорости и крейсерский режим. Расчет напряжений выполняется методами сопротивления материалов по величинам сил в стержнях рамы. Метод нахождения этих сил изложен в § 15.3. Величины напряжений сравниваются с допустимыми, назначаемыми из условия обеспечения большого ресурса по материалам стендовых испытаний на выносливость рам прототипов. Величина ресурса устанавливается, как и для других агрегатов, по измеренным в полете величинам нагрузок и определенным при стендовых испытаниях характеристикам выносливости рамы. Расчеты по обеспечению прочности рамы при действии больших однократных нагрузок рассматриваются в гл. 15.

Трансмиссии. Расчет трансмиссий на кручение излагается в специальных курсах. Однако кроме своей основной функции — передачи крутящего момента — некоторые элементы трансмиссии воспринимают также другие компоненты силы и момента от винта. Так, вал несущего винта воспринимает кроме крутящего момента винта и другие составляющие силы и момента, действующие на втулку от лопастей. В сечении вала, перпендикулярном его оси, помимо касательных действуют и нормальные напряжения.

Переменная составляющая нормальных напряжений определяется в основном создаваемыми винтом постоянными силой $\vec{R}$ и моментом $\vec{M}_{вт}$ в плоскости вращения (рис. 10.5) винта. Сила и момент вызывают во вращающемся вале переменные напряжения изгиба, меняющиеся с частотой, равной частоте вращения винта. Величины силы и момента определяют из аэродинамического расчета вертолета. Напряжения в вале рассчитывают методами сопротивления материалов. На их величину существенно влияет центровка вертолета, при изменении которой изменяется направление суммарной силы $\vec{R}+\vec{T}$ относительно оси вала.

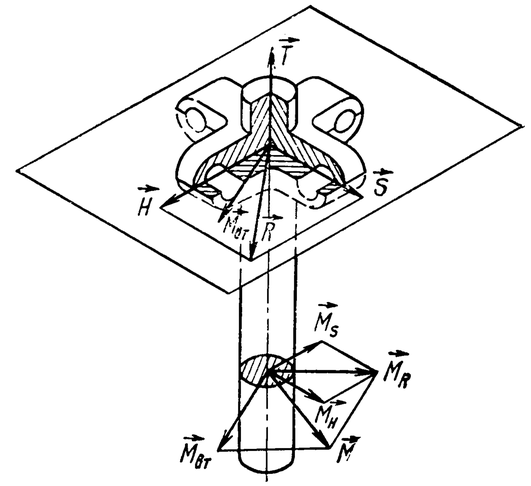


Рис. 10.5. Сила и момент на втулке и изгибающий момент вала несущего винта

Другие агрегаты. Переменные напряжения возникают и в других агрегатах. Так, переменные силы и моменты несущего винта вызывают колебания изгиба и кручения фюзеляжа и крыла (см. гл. 11). При этом в элементах конструкции фюзеляжа и крыла возникают переменные напряжения. Значительные по величине переменные напряжения возникают при рулежках вертолета по неровной площадке. Колебания фюзеляжа приводят к появлению переменных сил в узлах крепления масс, размещенных в фюзеляже. Переменные аэродинамические силы, вызывающие переменные напряжения в конструкции, действуют на стабилизатор и киль. Механизм возникновения этих сил и соответствующих колебаний рассмотрен в гл. 11.

Действие переменных напряжений в элементах конструкции этих агрегатов необходимо учитывать при их проектировании. Соответствующие требования рассматриваются в гл. 1 и в курсе конструирования агрегатов вертолета. Невыполнение этих требований приводит к преждевременному появлению усталостных трещин. Специальных расчетов обычно не делают. На построенном вертолете выполняют работы по экспериментальной проверке усталостной прочности. Производят измерения напряжений, действующих в элементах конструкции в полете, оценку величины этих напряжений с позиций усталостной прочности и, в случае необходимости, испытания на выносливость.

Глава 11 ВИБРАЦИИ ФЮЗЕЛЯЖА

Переменная по азимуту аэродинамическая нагрузка, действующая на лопасть несущего винта, а также и инерционные силы, возникающие при колебаниях лопасти, вызывают соответствующие динамические реакции на втулке винта. Силы и моменты, действующие на втулку от каждой лопасти, определенным образом складываются и передаются на фюзеляж вертолета, вызывая его колебания (вместе с винтом) в полете. Такой вид колебаний является типичным для всех вертолетов, так как колебания порождаются обычными силами, возникающими на несущем винте в обычных условиях его работы. Колебания этого вида будем в дальнейшем называть нормально-обусловленными.

Колебания фюзеляжа могут вызываться также и аэродинамическими силами, возникающими при воздействии возмущенного втулкой несущего винта или фюзеляжем потока воздуха на стабилизатор, киль или крыло вертолета. Этот вид колебаний будем называть колебаниями типа бафтинга. Причиной возникновения вибраций может быть турбулентность атмосферы.

Возможны также колебания фюзеляжа совместно с винтом (несущим или рулевым), а в отдельных случаях и системой управления, относящиеся к классу автоколебаний.

Отдельную группу составляют колебания, вызванные технологическими отклонениями: например, неодинаковыми массовыми или геометрическими характеристиками лопастей, входящих в один комплект. В отдельных случаях, при воздействии на вертолет внешних импульсов нагрузки, возникают собственные колебания фюзеляжа. Наконец, колебания вызывают переменные силы и моменты, создаваемые двигателями и трансмиссией при их работе.

При колебаниях фюзеляжа в элементах его конструкции возникают переменные по времени напряжения. Обычно при нормально-обусловленных, собственных и технологических колебаниях, а также колебаниях типа бафтинга величины переменных напряжений относительно невелики, и не приводят к немедленному разрушению фюзеляжа, но влияют на его ресурс. При автоколебаниях в отдельных случаях возможно быстрое (за несколько секунд) разрушение фюзеляжа. Поэтому главной задачей в части автоколебаний является устранение их причин или получение гарантий по их безопасности для прочности конструкции.

Для других же типов колебаний главной причиной, заставляющей конструктора работать над их снижением, является нежелательное воздействие вибраций на экипаж, пассажиров и оборудование вертолета (см. введение). Рассмотрим подробно нормально-

обусловленные колебания. Уровень нормально-обусловленных вибраций фюзеляжа зависит от величины переменных сил и моментов, действующих на фюзеляж от винта, и реакции фюзеляжа на действие этих нагрузок. Величина переменных сил и моментов определяется параметрами винта — аэродинамическими и частотными характеристиками и числом лопастей, а также частотой вращения винта. Из общей теории колебаний известно, что при действии на упругое тело периодической силы, реакция этого тела зависит от соотношения частоты возмущащей силы и собственных частот колебаний тела, в данном случае фюзеляжа. Собственные частоты фюзеляжа зависят от его жесткостных и массовых характеристик.

§ 11.1. ПЕРЕМЕННЫЕ СИЛЫ НА ВТУЛКЕ НЕСУЩЕГО ВИНТА

Силу, передающуюся на втулку от отдельной лопасти, удобно представить в виде трех компонентов (см. рис. 2.1): составляющей, направленной вдоль оси винта T_k, и составляющих, лежащих в плоскости вращения — N_k и P_k и направленных параллельно и перпендикулярно оси горизонтального шарнира. Силы T_k, приходящие с различных лопастей, по направлению совпадают, а силы N_k или P_k с каждой соседней лопасти повернуты друг относительно друга на угол $\Delta\psi = \frac{360°}{z}$. Таким же образом могут быть представлены и моменты, передающиеся с лопастей на втулку.

В соответствии с первым правилом суммирования сил и моментов на втулке (гл. 2) переменная часть суммарной силы T винта содержит гармоники, кратные числу лопастей:

$$i = mz, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Причем амплитуды этих гармоник суммарной силы на втулке $(T_{\text{вт}}^{(i)})$ определяются амплитудами тех же гармоник сил отдельных лопастей $T_k^{(i)}$:

$$T_{\text{вт}}^{(i)} = zT_k^{(i)}.$$

Вектор суммарной силы $T_{\text{вт}}$ направлен вдоль оси винта.

В плоскости вращения на основании второго правила суммирования проходными являются гармоники сил отдельных лопастей

$$i = mz \pm 1, \quad m = 1, 2 \ldots$$

В невращающейся системе координат, связанной с вертолетом, круговая частота соответствующей суммарной силы в плоскости вращения всегда равна ωmz. Удобно суммарную силу, создаваемую рассматриваемой проходной гармоникой сил отдельных лопастей, представлять как вращающийся вектор постоянной величины, имеющий угловую скорость (в системе координат, связанной с вертоле-

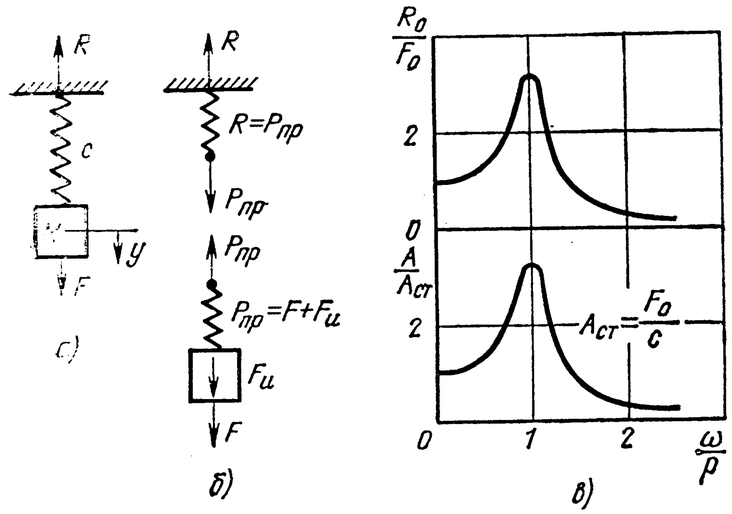


Рис. 11.1. Сила реакции в точке крепления колебательной системы:

а — схема системы; *б* — сила реакции в точке крепления; *в* — амплитуды колебаний и силы реакции; $F_и$ — сила инерции груза

том) ωmz. Величина этого вектора определяется формулой

$$R_{вт}^{(i)}=\frac{z}{2}R_k^{(i\pm1)}.$$

Здесь $R_{вт}^{(i)}$ — величина вектора суммарной силы на втулке; $R_k^{(i\pm1)}$ — амплитуда гармоники силы, создаваемой одной лопастью. Так как амплитуды гармоник сил и моментов, приходящих с лопастей, заметно уменьшаются с ростом номера гармоники, то обычно практическое значение имеют гармоники силы и момента с круговой частотой ωz (в невращающейся системе координат), а иногда еще и гармоники $2\omega z$, т. е. с частотами $f=zn$ и, соответственно, $f=2zn$ (n — частота вращения винта).

Амплитуды сил и моментов могут быть определены из расчета вынужденных изгибных колебаний лопасти в плоскостях взмаха и вращения (см. гл. 5) как реакции колеблющейся лопасти в опоре (ГШ или ВШ) или по результатам измерений на прототипах или по обобщенным экспериментальным данным. При этом надо учитывать явление динамического усиления сил реакций лопасти.

Рассмотрим вначале простой пример. Обратимся к одной из простейших колебательных систем — массе, укрепленной на пружине (рис. 11.1, *а*). Амплитуда колебаний массы M при действии на нее силы, меняющейся по закону $F=F_0\sin\omega t$ с постоянной амплитудой F_0, определяется, как известно из теоретической механики, по формуле

$$y_0=\frac{F}{M}\frac{1}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4h^2\omega^2}}, \qquad (11.1)$$

где p — собственная частота; h — коэффициент демпфирования. Рассмотрим реакцию R в точке крепления пружины (в опоре). Эта реакция равна силе $P_{пр}$, действующей в пружине (рис. 11.1, *б*). Величина амплитуды R_0 может быть найдена с помощью упругой характеристики пружины ($P_{пр}=cy$):

$$R_0=P_{пр0},=cy_0,$$

Подставляя амплитуду колебаний y_0 из формулы (11.1) и выполняя простые преобразования, получим

$$R_0=F_0\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{h}{p}\right)^2\left(\frac{\omega}{p}\right)^2}}$$

Значит, амплитуда реакции R_0 зависит от амплитуды внешней силы и от соотношения собственной частоты системы и частоты возбуждающей силы (рис. 11.1, *в*). Если частота внешней силы ω совпадает с частотой собственных колебаний p, то амплитуда силы реакции может быть в несколько раз больше, чем амплитуда возбуждающей силы F_0. Такое же явление имеет место и для реакций лопастей. Если в диапазоне рабочих чисел оборотов винта имеет место резонанс, то реакция может быть очень большой.

Так как вибрации фюзеляжа вызывают только проходные гармоники (в плоскости взмаха $i=mz$ и в плоскости вращения $i=mz\pm1$), то оценка усиления реакций должна быть выполнена по этим гармоникам. Например, для лопасти, имеющей резонансную диаграмму в плоскости взмаха, приведенную на рис. 4.1, *а*, отмечается резонанс четвертой гармоники с собственной частотой второго тона изгибных колебаний в плоскости взмаха. Если винт двух- или четырехлопастный, то этот резонанс приведет к большой суммарной силе на втулке, вызывающей колебания фюзеляжа. Для вертолета с винтом, имеющим другое число лопастей, наличие такого резонанса на величину переменной силы на втулке $T_{вт}$ и, следовательно, на уровень вибраций фюзеляжа не повлияет.

Обычно наибольшие по величине переменные силы на втулке, а следовательно, и наибольшие амплитуды нормально-обусловленных колебаний фюзеляжа отмечаются при полете на малой скорости и особенно при торможении из-за увеличения переменных аэродинамических нагрузок, вызванного большими переменными индуктивными скоростями на этих режимах (см. гл. 5). Большие переменные силы возникают также при большой скорости полета и на маневрах. Для вертолетов продольной схемы возбуждающие вибрации силы больше, чем для одновинтовых вертолетов с теми же винтами, вследствие взаимного влияния винтов, особенно на малых скоростях полета.

§ 11.2. СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ФЮЗЕЛЯЖА КАК УПРУГОЙ БАЛКИ

Рассмотрим вначале упрощенную задачу. Допустим, что фюзеляж представляет собой упругую на изгиб балку, нагруженную некоторой распределенной нагрузкой (рис. 11.2, *а*). Уравнение изгибных колебаний такой балки было получено в § 3.6 — формулы (3.29), (3.30). Поскольку на концах балки перерезывающая сила и изгибающий момент равны нулю, граничные условия будут:

при $x=0$ $M=EIy''=0$; $Q=(EIy'')'=0$;

при $x=L$ $M=EIy''=0$; $Q=(EIy'')'=0$.

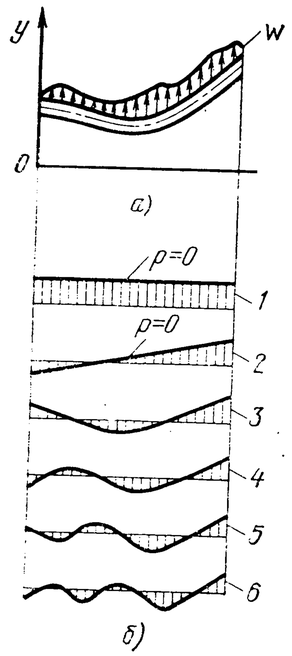


Рис. 11.2. Изгибные колебания балки—фюзеляжа:

а — балка с нагрузкой; *б* — формы собственных колебаний; *1*, *2* — первая и вторая нулевые формы; *3—6* — упругие формы

В случае свободных колебаний $T=0$. Соответствующее решение было получено в гл. 3. Было выяснено, что при свободных колебаниях консервативной системы имеет место наложение гармонических колебаний, происходящих каждое с некоторой собственной частотой p_j и соответствующей формой ξ_j. Частоты p_j образуют бесконечную последовательность. Были рассмотрены методы определения частот p_j и форм ξ_j и их свойства. Все изложенное в гл. 3 и 4 относится и к рассматриваемой задаче, так как в том и другом случае изучаются колебания балки при одних и тех же предположениях.

Некоторой частной особенностью данной задачи является наличие двух нулевых тонов, соответствующих один — поступательным перемещениям балки как абсолютно твердого тела в направлении оси Oy, а другой — поворотам балки как абсолютно твердого тела в плоскости xOy. Наличие двух нулевых тонов вытекает из вида граничных условий. В качестве примера на рис. 11.2, *б* приведены взятые из [23] характерные формы собственных колебаний фюзеляжа одновинтового вертолета как свободной балки. Наибольшие амплитуды колебаний имеет хвостовая часть фюзеляжа. По длине фюзеляжа располагаются узлы — точки, неподвижные при колебаниях данного тона.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания фюзеляжа в имеющем важное практическое значение случае, когда нагрузка меняется по гармоническому закону:

$$T(x,\ t)=q(x)\sin\omega t. \tag{11.2}$$

Здесь $q(x)$ — амплитуды нагрузки.

Решение уравнения (3.29) ищем в виде

$$y=\xi(x)\sin\omega t. \tag{11.3}$$

Подстановка (11.2) и (11.3) в уравнение (3.29) приводит его к виду

$$(EI\xi'')''-\omega^2 m\xi=q. \tag{11.4}$$

Решение уравнения (11.4) может быть найдено в виде разложения по формам собственных колебаний:

$$\xi(x)=\sum C_i\xi_i, \tag{11.5}$$

где C_i — коэффициенты, подлежащие определению.

Применяя метод Бубнова — Галеркина (см. § 3.6, 5.3), получим такое выражение:

$$\sum_i C_i\int_0^L (EI\xi_i'')''\xi_k dx-\omega^2\sum_i C_i\int_0^L m\xi_i\xi_k dx=\int_0^L q\xi_k dx. \tag{11.6}$$

На основании соотношений (3.45) и (3.46) выражение (11.6) можно преобразовать к виду

$$C_k p_k^2\int_0^L m\xi_k^2 dx-C_k\omega_0^2\int_0^L m\xi_k^2 dx=\int_0^L q\xi_k dx. \tag{11.7}$$

Определив из (11.7) C_k, на основании формул (11.3) и (11.5) получим решение:

$$y(x,t)=\left[\sum_k \frac{1}{p_k^2-\omega^2}\,\frac{A_k}{K_k}\,\xi_k(x)\right]\sin\omega t. \tag{11.8}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_k=\int_0^L q\xi_k dx,\quad K_k=\int_0^L m\xi_k^2 dx.$$

Из формулы (11.8) следуют важные выводы. Колебания фюзеляжа происходят с частотой ω — частотой возбуждающей нагрузки. Если частота возбуждающей нагрузки приближается к одной из собственных частот, то амплитуда колебаний неограниченно возрастает, соответствующее слагаемое в сумме (11.8) становится значительно больше всех других, так что последними можно пренебречь. Это означает, что форма вынужденных колебаний вблизи резонанса мало отличается от формы собственных колебаний соответствующего тона. Исключением является случай ортогональности формы нагрузки $q(x)$ и формы соответствующего тона собственных колебаний $\xi_k(x)$, т. е. случай, когда

$$A_k=\int_0^L q\xi_k dx=0.$$

В общем случае, как это следует из формулы (11.8), амплитуда колебаний данной точки ξ определяется выражением

$$\xi=\sum_k \frac{1}{p_k^2-\omega^2}\,\frac{A_k}{K_k}\,\xi_k(t). \tag{11.9}$$

Полученные выше результаты сохраняются для сосредоточенной возбуждающей силы. Действительно, пусть нагрузка q приложена к балке лишь на небольшом участке длины Δx (рис. 11.3, *а*). Тогда интеграл, обозначенный нами A_k, надо брать только на участке Δx, причем на основании теоремы о среднем значении он равен:

$$A_k=\int_0^L q\xi_k dx=\int_{\Delta x} q\xi_k dx=\xi_k(\zeta)\int_{\Delta x} q dx=\xi_k(\zeta)F_0,\quad \zeta\in\Delta x.$$

При $\Delta x\to 0$ получим

$$A_k=F_0\xi_k(x_0), \tag{11.10}$$

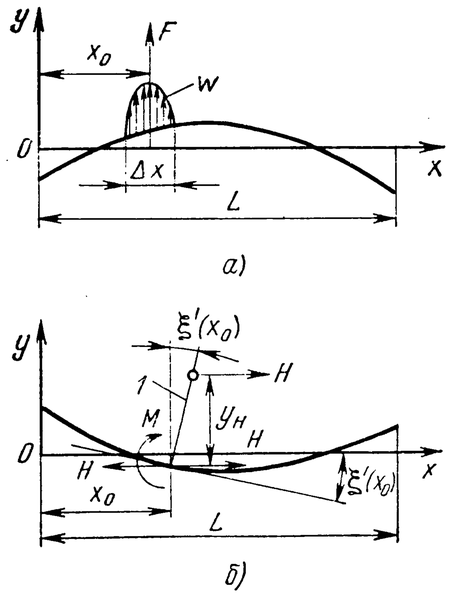


Рис. 11.3. Действие сосредоточенной силы:

а — вертикальная сила; *б* — сила в плоскости вращения; *1* — ось вала винта

где $\xi_k(x_0)$ — значение $\xi_k(x)$ в точке x_0 приложения силы F. Из формулы (11.10) следует, что сила с одинаковой амплитудой вызывает вибрации по данному тону большие, если она приложена в пучности, и малые, если она приложена вблизи узла. В частности, этой закономерностью объясняется одна из причин повышенных вибраций, характерных для вертолета продольной схемы. Обычно точки приложения сил от винтов на таком вертолете близки к пучностям. Вертикальные колебания фюзеляжа могут возбуждаться не только силой T, перпендикулярной к оси фюзеляжа, но и переменной продольной силой H. От этой силы возникает (рис. 11.3, *б*) приложенный к балке на плече y_H переменный момент $M=Hy_H$. Для расчета колебаний под действием момента M сохраняется формула (11.8), но величину A следует, как это нетрудно показать, вычислять по формуле

$$A_k=M_0\frac{\partial\xi_k}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}.$$

§ 11.3. МЕТОД ДОБАВОЧНОЙ МАССЫ. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ. УЧЕТ ДЕМПФИРОВАНИЯ

Присоединим к балке в точке приложения возбуждающей колебания силы T некоторую добавочную массу Δm. Полагая силу T равной нулю, выполним одним из известных уже методов (гл. 3) расчет свободных изгибных колебаний балки с добавочной массой Δm. В результате расчета будут получены собственные частоты p_j. Повторяя расчеты для других значений Δm, можно получить зависимость $p_j=f(\Delta m)$ [23]. Свободные колебания балки с добавочной массой можно, с другой стороны, рассматривать как вынужденные колебания исходной балки, вызываемые действием на нее возбуждающей силы — реакции R массы Δm в точке ее крепления. Если колебания этой точки, а, следовательно, и массы Δm происходят по закону $y=\xi(x_0)\sin pt$, то ускорение $\ddot{y}=-\xi(x_0)p^2\sin pt$, а следовательно, инерционная сила $F_n=\Delta m\xi(x_0)\cdot p^2\sin pt$. Поэтому амплитуда силы реакции $R_0=\Delta m\xi(x_0)p^2$. Следовательно, выполнив расчеты свободных колебаний балки с различными добавочными массами Δm, можно найти амплитуды вынужденных колебаний исходной балки при действии силы T с соответствующей частотой $\omega=p$, если полученные при расчете формы колебаний умножить на отношение амплитуд сил T_0/R_0. Этот способ расчета вынужденных колебаний по сравнению со способом, основанным на применении метода Галеркина (§ 11.2), позволяет получить более надежные результаты в случае неравномерного распределения жесткости и погонной массы по длине балки, однако не обладает присущей методу § 11.2 наглядностью. Метод может быть обобщен для более сложных случаев колебаний.

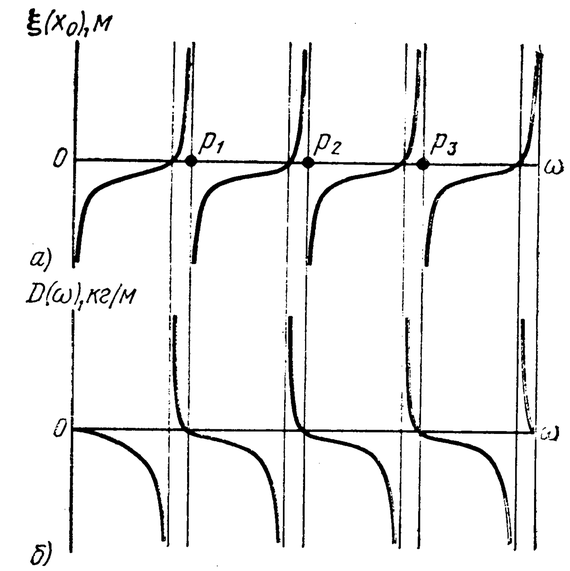


Рис. 11.4. Вынужденные колебания фюзеляжа:

а — амплитуда колебаний; *б* — динамическая жесткость

Очень полезным для решения ряда практически важных задач по колебаниям является понятие динамической жесткости. Динамической жесткостью балки в точке $x=x_0$ называется отношение амплитуды возбуждающей силы F_0 к амплитуде $\xi(x_0)$ вынужденных колебаний точки приложения силы:

$$D(\omega)=\frac{F_0}{\xi(x_0)}. \qquad (11.11)$$

Для определения динамической жесткости по этой формуле предварительно по (11.9) находится амплитуда $\xi(x_0)$. Как это следует из формулы (11.9), динамическая жесткость является функцией частоты ω. На рис. 11.4, *а* показан график изменения амплитуды колебаний $\xi(x_0)$ точки балки, в которой была приложена сила F, имеющая постоянную амплитуду, но различные частоты ω. График получен путем расчета по формуле (11.9). В точках $\omega=p_j$ кривая $\xi=f(\omega)$ имеет разрывы, соответствующие резонансу. Из формулы (11.11) следует, что динамическая жесткость в точках резонанса $\omega=p_j$ обращается в ноль, а при значениях ω, при которых амплитуда ξ равна нулю, — в бесконечность (рис. 11.4, *б*). С одним из примеров практического применения понятия динамической жесткости мы познакомимся в § 11.4.

Как и для всякой линейной колебательной системы, определение амплитуд вынужденных колебаний фюзеляжа без учета демпфирующих сил вполне допустимо вдали от резонансов и недопустимо вблизи или непосредственно при резонансе. Действительно, амплитуда колебаний при резонансе определяется исключительно демпфированием, а без демпфирования, как это было получено выше, становится неограниченной. Поэтому изложенный выше метод расчета вынужденных колебаний в этом случае должен быть до-

полнен так, чтобы учесть демпфирование фюзеляжа. Демпфирование колебаний фюзеляжа происходит в основном из-за трения между элементами конструкции (в местах стыков и соприкосновения их) при их относительных перемещениях при изгибе фюзеляжа. Обычно принимается, что внутренний момент, создаваемый силами демпфирования, пропорционален скорости изменения кривизны:

$$M=\eta\frac{\partial}{\partial t}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right), \qquad (11.12)$$

где η — коэффициент пропорциональности, определяемый по результатам частотных испытаний аналогичных конструкций. С учетом (11.12) уравнение вынужденных колебаний балки-фюзеляжа будет

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\eta\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T(x,\ t). \qquad (11.13)$$

Приближенно решение уравнения (11.13) ищется в виде

$$y=C_k\xi_k(x)\,e^{i\omega t}.$$

Здесь $\xi_k(t)$ — форма собственных колебаний при отсутствии демпфирования того тона, собственная частота которого близка к частоте возбуждающей нагрузки ω. Далее применяется метод Галеркина. Подробнее см. [23].

§ 11.4. МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ МОДЕЛЕЙ ФЮЗЕЛЯЖА

Определение собственных частот и расчет вынужденных колебаний фюзеляжа выполняется различными методами в зависимости от схемы вертолета и принятой с учетом потребной точности и потребного числа тонов модели фюзеляжа. Расчеты более сложных моделей, чем балочная, основываются на фундаментальных понятиях, принципах, представлениях и методах общей теории вынужденных колебаний (см., например, [3, 42 и 45]), в известной мере рассмотренных в простой задаче предыдущих параграфов. К их числу относятся: метод разложения по собственным формам при расчете вынужденных колебаний, метод добавочной массы, понятия резонанса и динамической жесткости, представление о роли демпфирования и целесообразности его учета при вынужденных колебаниях, гармоническом характере вынужденных колебаний при действии гармонической силы, об ортогональности форм колебаний и особенностях колебаний при ортогональности формы колебаний и формы нагрузки, о наличии так называемых нулевых тонов, о приближенном совпадении формы вынужденных колебаний с формой собственных колебаний при колебаниях вблизи резонанса и т. д.

Простейшая расчетная схема фюзеляжа одновинтового вертолета была рассмотрена в предыдущем параграфе. Расчет по такой схеме дает близкое к действительному значение частоты низшего упругого тона собственных колебаний p_1 и достаточно точные

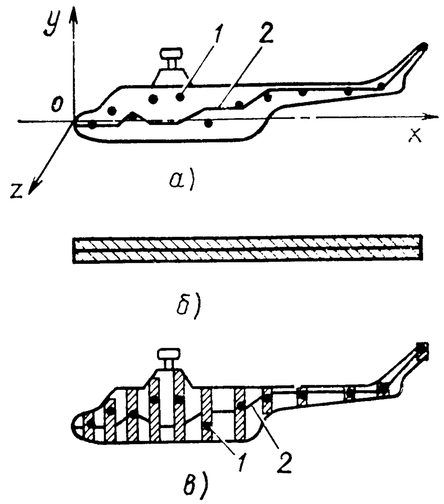


Рис. 11.5. Расчетные модели фюзеляжа:

а — фюзеляж; *б* — балочная модель; *в* — наиболее полная модель; *1* — центр тяжести отсека; *2* — ось жесткости фюзеляжа

данные по вынужденным колебаниям, если частота возмущающей силы меньше или не намного больше частоты p_1. Для более высоких частот результаты расчета не будут в полной мере отражать действительность. Основными причинами этого являются отклонения реального фюзеляжа от балочной модели (рис. 11.5, *б*). Действительно, ось жесткости фюзеляжа представляет собой (рис. 11.5, *а*), как правило, ломаную линию, а не прямую. Центры тяжести отсеков не лежат на оси жесткости, каждый отсек фюзеляжа представляет собой тело, у которого все измерения одного порядка. Поэтому при колебаниях в вертикальной плоскости помимо перемещений по оси y имеют существенное значение также перемещения по оси Ox и повороты отсеков вокруг оси Oz. Поперечные же колебания, вызываемые боковой силой S, представляют собой не чисто изгибные, а изгибно-крутильные колебания. При этом помимо перемещений по оси Oz имеют существенное значение повороты отсеков вокруг осей Ox и Oy. Это и приводит к необходимости уточнений.

Моделью, которая наилучшим образом имитирует фюзеляж, является модель (рис. 11.5, *в*), в которой ось жесткости задается некоторой ломаной линией и учитывается смещение центров тяжести грузов относительно оси жесткости в соответствии с действительным их расположением по высоте отсека. Расчет может быть выполнен методом остатков (методом начальных параметров), подробно описанным в [23].

Простейшей моделью вертолета поперечной схемы или вертолета с крылом является комбинация двух перекрещивающихся балок (рис. 11.6, *а*). Нетрудно доказать (см. [23]), что динамическая жесткость такой системы $D(\omega)$ равна сумме динамических жесткостей обеих балок $D_1(\omega)$ и $D_2(\omega)$, рассматриваемых изолированно (рис. 11.6, *б*) друг от друга:

$$D(\omega)=D_1(\omega)+D_2(\omega).$$

Как было установлено в § 11.3, при резонансе динамическая жесткость обращается в нуль. Таким образом, вычислив отдельно любым из известных методов динамические жесткости балок, составляющих рассматриваемую схему в зависимости от частоты ω и приравняв нулю жесткость системы $D(\omega)=0$, можно найти собственные частоты системы p_{jc}. Формы собственных колебаний системы будут состоять из форм вынужденных колебаний отдельных балок при $\omega=p_j$. Масштаб для этих форм выбирается из условия

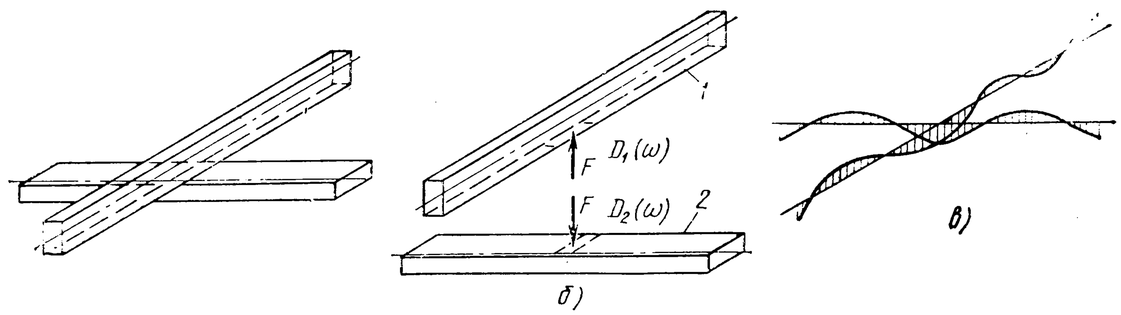


Рис. 11.6. Простейшая расчетная модель вертолета поперечной схемы:

а — модель; *б* — отдельные балки; *в* — пример одной из форм собственных колебаний; *1* — балка, имитирующая фюзеляж; *2* — балка, имитирующая крыло или ферму

равенства амплитуд колебаний в точке сопряжения балок (рис. 11.6, *в*). Более подробно эта задача рассмотрена в [23].

§ 11.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕРЫ ПО СНИЖЕНИЮ УРОВНЯ ВИБРАЦИЙ

Выбор параметров лопастей, обеспечивающий отстройку от резонансов изгибных колебаний лопастей для проходных гармоник (§ 11.1), и выбор параметров фюзеляжа, обеспечивающий отстройку от резонанса изгибных в вертикальной плоскости или изгибно-крутильных поперечных колебаний фюзеляжа (§ 11.2), оказывается иногда невозможным в полной мере по конструктивным соображениям или недостаточно эффективным. Это особенно характерно для скоростных вертолетов, а для вертолетов продольной схемы также и при малых скоростях полета. В таких случаях могут быть применены дополнительные меры, снижающие уровень вибраций: упругое крепление втулки к фюзеляжу, динамический гаситель колебаний, демпферы колебаний. Возможна также виброизоляция отдельных элементов конструкций.

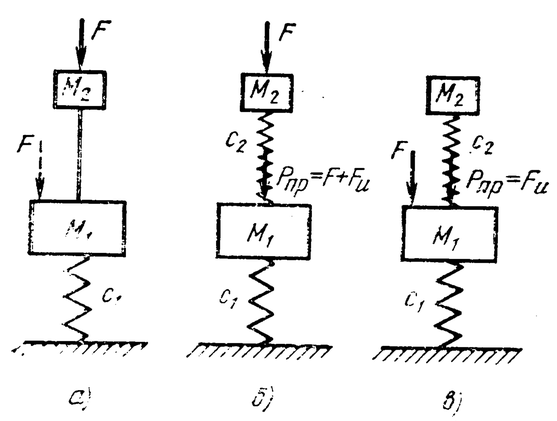


Рис. 11.7. Жесткое соединение масс (*а*), упругое крепление массы M_2(*б*) и динамический гаситель колебаний (*в*)

Рассмотрим вынужденные колебания под действием гармонической силы $F=F_0\sin\omega t$ системы, состоящей из двух масс (рис. 11.7), связанных жестко или с помощью пружины. Обычными методами теории колебаний можно определить амплитуды колебаний масс M_1 и M_2 при их упругом соединении (см., например, [30, 42]). Пусть нас интересуют колебания массы M_1. Оказывается, что выбором величины массы M_2 и жесткости пружины c_2 можно добиться уменьшенной амплитуды колебаний массы M_1 по сравнению с амплитудой колебаний массы M_1+M_2 при жестком соединении масс M_1 и M_2. Это возможно, когда возбуждающая сила F приложена к массе M_2 и когда она приложена к массе M_1. В первом случае уменьшение амплитуды y_{02} объясняется тем, что при подходящих значениях M_2 и c_2 амплитуда силы $P_{пр}$, передаваемой пружиной c_2 массе M_1, меньше, чем амплитуда силы F. Во втором случае меньшие колебания массы M_1 объясняются тем, что на нее кроме силы F действует реакция $P_{пр}$ пружины c_2, имеющая при соответствующем выборе M_2 и c_2 фазу, обратную фазе силы F. В системе без демпфирования амплитуда колебаний массы M_1 уменьшается до нуля, если M_2 и c_2 удовлетворяют условию:

$$p_{20}=\sqrt{\frac{c_2}{M_2}}=\omega. \qquad (11.14)$$

т. е. парциальная частота собственных колебаний массы M_2 (при неподвижной массе M_1) должна быть равна частоте возбуждающей силы F. Благоприятное действие второй массы при данных значениях M_1, M_2, c_1 и c_2 имеет место только в узком диапазоне значений частоты возбуждающей силы ω. Если частота силы F выйдет из этого диапазона, то произойдет не ослабление, а усиление колебаний массы M_1.

Для системы с многими степенями свободы добавление одной массы и одной пружины оказывает более сложное воздействие, но и в этом случае можно обеспечить уменьшение колебаний хотя бы одной из масс, входящих в систему. Снижение вибраций может быть достигнуто как по первому из рассмотренных вариантов (упругое крепление втулки), так и по второму (динамический гаситель колебаний). На практике нашли применение оба метода. Успешно применяются маятниковые динамические гасители колебаний, устанавливаемые на несущем винте. Маятник с осью, параллельной оси винта и расположенной на втулке, имеет при малых колебаниях собственную частоту

$$p=\omega_{н.в}\sqrt{\frac{l_ш S_ш}{I_ш}}=\omega_{н.в}\sqrt{\frac{l_ш l_c}{l_и^2}}, \qquad (11.15)$$

где $\omega_{н.в}$ — угловая скорость винта; $S_ш$ и $I_ш$ — статический момент и момент инерции относительно оси маятника; $l_ш$ — расстояние между осями маятника и винта; l_c и $l_и$ — радиусы центра тяжести и инерции маятника.

Эта формула выводится в гл. 12 [формулы (12.5) и (12.9)], в которой рассматриваются колебания в поле центробежных сил лопасти относительно ВШ — уравнение (12.8). Лопасть в этой задаче не отличается от физического маятника. Если размеры маятника выбраны так, чтобы $\sqrt{l_ш l_c/l_и^2}=i$, где i — целое число, то собственная частота на основании (11.15) равна $p=i\omega_{н.в}$. Следовательно, для возбуждающей силы, параллельной плоскости вращения, с частотой $i\omega_{н.в}$ будет удовлетворяться условие (11.14), т. е.

маятник будет парировать действие гармоники возбуждающей силы на втулке в плоскости вращения, имеющей частоту $i\omega_{н.в}$, причем благоприятное действие маятника будет иметь место независимо от величины $\omega_{н.в}$. К аналогичным выводам можно прийти и анализируя движение маятника с осью, параллельной плоскости вращения (в отношении гармоник сил, параллельных оси винта). Маятниковые гасители могут быть использованы для подавления проходных гармоник любого из шести компонентов силы и момента на втулке при соответствующем выборе их размеров и направления оси.

Демпферы колебаний, совершая отрицательную работу, приводят к снижению уровня вибраций за счет поглощения энергии, которая могла бы пойти на увеличение амплитуды колебаний. Поглощенная демпфером механическая энергия преобразуется в нем в тепловую. В таких демпферах используется сухое или вязкое трение. В ряде случаев успешно применялись демпферы ударного действия (подробее см. [2]).

Подбором упругих элементов в креплении можно обеспечить снижение уровня вибраций отдельных агрегатов, установленных на вертолете (виброизоляция). При этом рационально рассмотреть и такие схемы крепления, которые увеличивают число степеней свободы амортизируемого агрегата. Более подробно с методами снижения вибраций можно ознакомиться по [2, 30 и 45].

§ 11.6. ВИБРАЦИИ ДРУГИХ ТИПОВ

Втулка несущего винта и фюзеляж вносят в обтекающий их поток воздуха возмущения, приводящие к тому, что скорости движения частиц воздуха начинают пульсировать, меняясь по времени и от одной точки пространства к другой случайным образом. Вследствие этого случайным образом меняются нагрузки на несущие поверхности, находящиеся в спутной струе, например на стабилизатор или киль. Воздействие переменных нагрузок приводит к вибрациям как этих поверхностей, так и фюзеляжа, к которому они прикреплены, — бафтингу. При бафтинге процессы изменения нагрузок и вызываемые ими вибрации являются случайными процессами. Одной из важнейших характеристик случайного процесса является спектральная плотность $S(\omega)$ (см. гл. 17). Физический смысл ее состоит в том, что величина $S(\omega)d\omega$ характеризует долю энергии, приходящуюся на колебательную составляющую процесса, имеющую частоту в пределах ω и $\omega+d\omega$. Для линейной колебательной системы с одной степенью свободы, подвергающейся действию случайной нагрузки со спектральной плотностью $S_F(\omega)$, спектральная плотность процесса колебаний $S_y(\omega)$ определяется формулой (см., например, [5]):

$$S_y(\omega)=\Phi(\omega)\,S_F(\omega),$$

где $\Phi(\omega)=\dfrac{1}{(p^2-\omega^2)^2+(2h\omega)^2}$.

График функции $\Phi(\omega)$ показан на рис. 11.8. При небольшом демпфировании он имеет максимум приблизительно при $\omega=p$, т. е. при резонансе. Этот максимум тем больше, чем меньше демпфирование h. Вследствие такого характера функции $\Phi(\omega)$ в случайном процессе колебаний будут преобладать колебания, имеющие частоту, равную собственной.

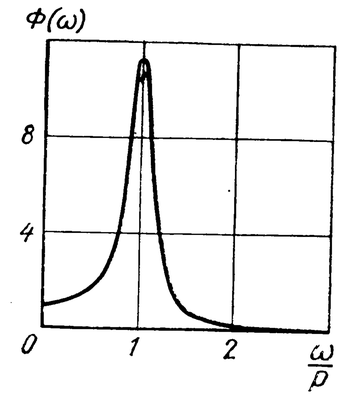


Рис. 11.8. Функция $\Phi(\omega)$, $\bar{n}=h/p=0{,}15$

Очевидно, что при достаточно широком спектре частот возмущающей нагрузки «отстроиться» от этих колебаний невозможно. Из спектра нагрузок всегда будет выбираться часть, соответствующая собственной частоте p. Поэтому единственное средство уменьшения этих вибраций — увеличение демпфирования или уменьшение возбуждения. Для системы с бесконечным числом степеней свободы, как фюзеляж, явление бафтинга описывается значительно более сложными соотношениями, но качественная сторона явления и выводы сохраняются.

Колебания, также представляющие собой случайный процесс, возникают при полете в неспокойной (турбулентной) атмосфере. Статистические параметры этого процесса определяются спектральной плотностью турбулентной атмосферы и рассмотренной выше функцией $\Phi(\omega)$.

При неблагоприятном сочетании параметров конструкции на вертолете могут возникать автоколебания различных типов, при которых имеют место совместные изгибные или изгибно-крутильные колебания фюзеляжа, колебания лопастей, а также системы управления. Приведем некоторые примеры. Один из видов таких автоколебаний — так называемый «земной резонанс в воздухе» — совместные колебания лопастей несущего или рулевого винта и его втулки в плоскости вращения. При этом колебания втулки обусловлены колебаниями фюзеляжа или крыла.

Другой пример — совместные изгибно-крутильные колебания фюзеляжа и колебания лопастей рулевого винта относительно горизонтальных шарниров. Изгибно-крутильные колебания фюзеляжа вызывают повороты оси рулевого винта, вследствие чего возникает пульсация тяги, создаваемой рулевым винтом. Пульсация тяги поддерживает при подходящем сочетании фаз изгибно-крутильные колебания фюзеляжа.

Примеры автоколебаний, связанных с системой управления, довольно многочисленны. При изгибе фюзеляжа возможны такие смещения опор качалок системы управления $\delta_к$, при которых при зажатой ручке управления золотник бустера смещается (рис. 11.9, *а*), вызывая соответствующее движение автомата перекоса, что приводит к появлению пульсаций сил, приходящих с винта на фюзеляж. При определенном соотношении фаз эти пульсации поддерживают колебания фюзеляжа. Другая причина действия бустеров при не-

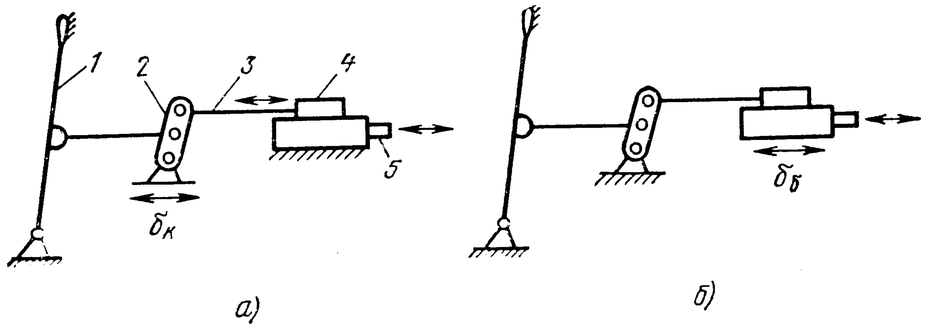


Рис. 11.9. К возникновению автоколебаний:

а — колебания вследствие перемещений точки крепления промежуточной качалки; *б* — колебания вследствие «просадки» бустера; *1* — ручка управления; *2* — промежуточная качалка; *3* — тяга к золотнику; *4* — золотник; *5* — шток бустера

подвижной ручке управления — их «просадка». Бустеры, установленные на упругих элементах конструкции фюзеляжа, под действием сил в системе управления могут несколько перемещаться ($\delta_б$) (рис. 11.9, *б*). Если золотник бустера при этом неподвижен, то в результате относительного смещения бустера и золотника могут возникнуть движения штока бустера, приводящие к пульсациям сил на винте и в системе управления.

Наконец, вибрации мест установки датчиков углов или угловых скоростей автопилота могут вызвать появление команд автопилота рулевому агрегату, которые приведут к колебаниям автомата перекоса. При подходящем сочетании фаз это может вызвать пульсации сил на винте, поддерживающие колебания фюзеляжа.

Для скоростных вертолетов возможно возникновение флаттера крыла и оперения. Так же, как и для несущего винта, флаттер крыла и оперения представляет собой автоколебания, вызванные взаимодействием аэродинамических и инерционных сил от поступательного и вращательного движений профиля и сил упругости. Главное средство борьбы, как и при флаттере лопастей, — обеспечение передней центровки. Подробно с методами расчета на флаттер крыла и оперения можно ознакомиться в [16].

глава 12 ЗЕМНОЙ РЕЗОНАНС

§ 12.1. КОЛЕБАНИЙ ВИНТА НА УПРУГОЗАКРЕПЛЕННОМ ОСНОВАНИИ

Земным резонансом называются самовозбуждающиеся колебания лопастей и втулки винта в плоскости его вращения, причем оба эти движения связаны между собой и поддерживают друг друга.

Рассмотрим вначале упрощенную модель. Пусть втулка несущего винта прикреплена к массе M_0, которая может перемещаться вдоль оси Ox (рис. 12.1, *а*), преодолевая при этом силы пружины с жесткостью c и линейного демпфера с коэффициентом k. Уравнение движения массы M_0 имеет вид

$$M_0\ddot{x}+k\dot{x}+cx=P_x. \qquad (12.1)$$

Здесь P_x — сила, действующая на втулку от лопастей винта. Выражение для силы P_x найдем с помощью теоремы о движении центра инерции механической системы. При изучении земного резонанса винта с вертикальными шарнирами можно лопасть считать абсолютно жесткой, а также не учитывать действующие на нее аэродинамические силы. Поэтому в соответствии с упомянутой теоремой сила $P_x=-zm_л\ddot{x}_c$. Произведение $zm_л$ — масса системы, т. е. всех лопастей, x_c — координата центра тяжести системы.

Координата центра тяжести лопасти (см. рис. 12.1, *б*)

$$x_{ck}=x+l_{в.ш}\cos\psi_k+\rho_c\cos(\psi_k+\xi_k),$$

где ρ_c — расстояние центра тяжести лопасти от оси ВШ.

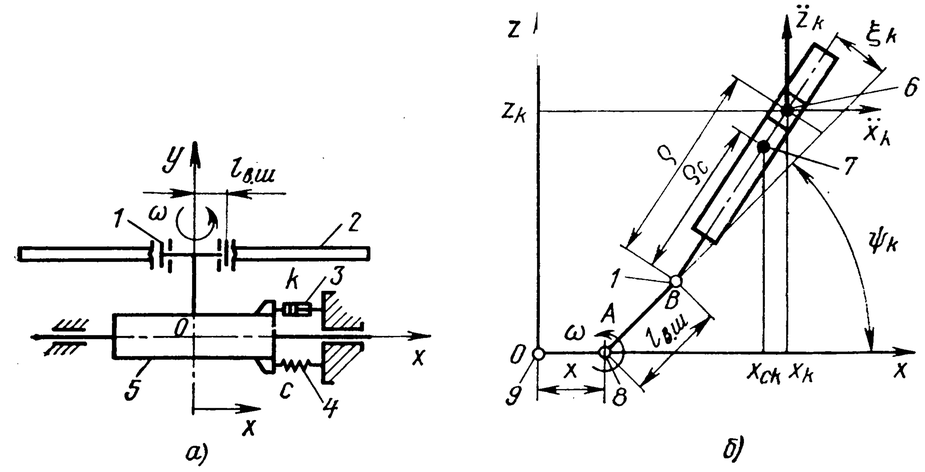


Рис. 12.1. Винт на упругозакрепленном основании:

а — вид сбоку; *б* — вид на лопасть и втулку сверху; *1* — ВШ; *2* — лопасть; *3* — демпфер; *4* — пружина; *5* — основание; *6* — центр тяжести отсека; *7* — центр тяжести лопасти; *8* — центр втулки; *9* — начало координат

Координата центра тяжести системы лопастей по оси Ox определяется обычной формулой

$$x_c=\frac{\sum\limits_k m_k x_{ck}}{\sum\limits_k m_k}=\frac{1}{z}\sum_k x_{ck}=x-\frac{\rho_c}{z}\sum_k \xi_k \sin\psi_k,$$

откуда

$$P_x=zm_л\ddot{x}+S_{в.ш}\sum_{k=1}^{z}\left[(\ddot{\xi}_к-\omega^2\xi_k\sin\psi_k)+2\omega\dot{\xi}_k\cos\psi_k\right],$$

где $S_{в.ш}$ — статический момент лопасти относительно ВШ:

$$S_{в.ш}=\rho_c m_л=\int\limits_\rho \rho dm.$$

С учетом этого выражение (12.1) принимает вид

$$\ddot{x}+2n_0\dot{x}+p_0^2x=\frac{S_{в.ш}}{M_z}\sum_{k=1}^{z}\left[(\ddot{\xi}_k-\omega^2\xi_k)\sin\psi_k+2\omega\dot{\xi}_k\cos\psi_k\right], \qquad (12.2)$$

где обозначено $M_0+zm_л=M$; $p_0^2=c/M$; $n_0=k/2M$.

Получим теперь уравнение движения лопасти. При этом также можно не учитывать аэродинамические силы. С таким допущением для абсолютно жестких лопастей уравнение моментов относительно оси ВШ будет иметь вид

$$\int\limits_\rho\left[\ddot{x}_k\rho\sin(\psi_k+\xi_k)-\ddot{z}\rho\cos(\psi_k+\xi_k)\right]dm=k_л\dot{\xi}_k, \qquad (12.3)$$

где dm — масса элемента лопасти; $k_л$ — коэффициент демпфирования демпфера ВШ; ρ — расстояние элемента лопасти по оси ВШ; ψ_k — азимут, отсчитываемый как показано на рис. 12.1, *б*; ξ_k — угол поворота лопасти относительно ВШ.

В левой части уравнения (12.3) записан момент инерционных сил, действующих на лопасть, а в правой — момент, создаваемый демпфером ВШ. Координаты x_k и z_k элемента лопасти могут быть выражены через перемещение центра втулки x, а также углы азимута ψ_k и поворота лопасти относительно ВШ — ξ_k. Уравнение (12.3) после подстановки $\ddot{x}_k$ и $\ddot{z}_k$, найденных дифференцированием этих выражений, принимает при малых углах ξ_k вид

$$I_{в.ш}\ddot{\xi}_к+k_л\dot{\xi}_k+l_{в.ш}S_{в.ш}\omega^2\xi_k=S_{в.ш}\ddot{x}\sin\psi_k.$$

Разделив его на $I_{в.ш}$ — момент инерции лопасти относительно оси ВШ, получим

$$\ddot{\xi}_k+2n_л\dot{\xi}_k+\nu_0^2\omega^2\xi_k=\frac{\nu_0^2}{l_{в.ш}}\ddot{x}\sin\psi_k, \qquad (12.4)$$

где $n_л$ — относительный коэффициент демпфирования демпфера в

ВШ, $n_л=k_л/2I_{в.ш}$; ν_0 — безразмерный параметр,

$$\nu_0=\sqrt{\frac{l_{в.ш}S_{в.ш}}{I_{в.ш}}}. \qquad (12.5)$$

Такое уравнение может быть записано для каждой лопасти, поэтому число уравнений (12.4) равно числу лопастей винта.

Дальнейшей задачей является решение системы уравнений (12.2) и (12.4). Эта система является системой однородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Оказывается полезным перейти к новым переменным

$$\eta=\sum_{k=1}^{z}\xi_k\sin\psi_k;\quad \zeta=\sum_{k=1}^{z}\xi_k\cos\psi_k.$$

После преобразований, связанных с введением этих переменных, система (12.2) и (12.4) приводится к системе из трех уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}&\ddot{x}+2n_0\dot{x}+p_0^2x-\frac{S_{в.ш}}{M}\ddot{\eta}=0;\\&\ddot{\eta}+2n_л\dot{\eta}-\omega^2(1-\nu_0^2)\eta-2\omega\dot{\zeta}-2n_л\omega\zeta-\frac{z}{2}\frac{S_{в.ш}}{I_{в.ш}}\ddot{x}=0;\\&\ddot{\zeta}+2n_л\dot{\zeta}-\omega^2(1-\nu_0^2)\zeta+2\omega\dot{\eta}+2n_л\omega\eta=0.\end{aligned} \qquad (12.6)$$

В данной задаче, как и в гл. 7, нас интересует характер движения. Если в соответствии с корнями характеристического уравнения системы (12.6) движение по времени затухает, то земной резонанс отсутствует. В противном случае имеет место земной резонанс.

§ 12.2. ПАРАМЕТРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЕ ЗЕМНОГО РЕЗОНАНСА

Удобно определять возможность или невозможность возникновения земного резонанса в зависимости от угловой скорости (частоты вращения) несущего винта. При подходящих значениях коэффициентов системы (12.6) существует минимальное значение угловой скорости винта, ниже которого земной резонанс не возникает, — $\omega_{гр1}$. При угловой скорости винта больше $\omega_{гр1}$ земной резонанс возможен. При дальнейшем увеличении угловой скорости (частоты вращения) винта выше некоторого определенного значения $\omega_{гр2}>\omega_{гр1}$ земной резонанс снова становится невозможным. Граничные значения $\omega_{гр1}$ и $\omega_{гр2}$ зависят от собственной частоты колебаний основания, от величины коэффициентов демпфирования n_0 и $n_л$ и от величины коэффициентов ν_0 (12.5) и ε:

$$\varepsilon=\frac{z}{2}\frac{S_{в.ш}}{I_{в.ш}M}. \qquad (12.7)$$

Если в (12.4) положить равными нулю правую часть уравнения и демпфирование $n_л$, то получим уравнение свободных колебаний

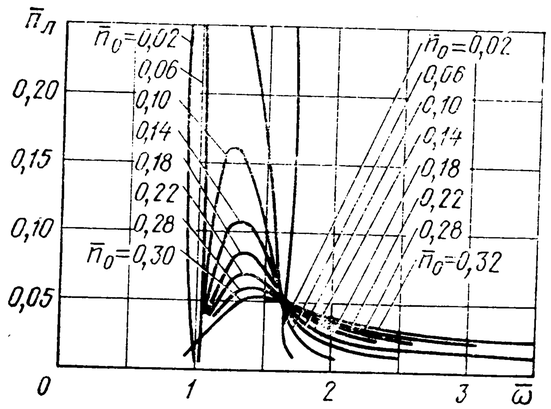


Рис. 12.2. График границ зоны неустойчивости

абсолютно жесткой лопасти относительно ВШ в поле центробежных сил:

$$\ddot{\xi}_к + \nu_0^2\omega^2\xi_k = 0. \qquad (12.8)$$

Из этого уравнения видно, что частота собственных колебаний лопасти

$$p_л = \nu_0\omega. \qquad (12.9)$$

Таким образом, коэффициент ν_0 определяет собственную частоту лопасти. Величины $S_{в.ш}$ и $I_{в.ш}$ запишем в виде

$$S_{в.ш} = m_л\rho_c; \; I_{в.ш} = m_л\rho_и^2. \qquad (12.10)$$

Подставляя выражения (12.10) в формулу (12.7), получим

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{zm_л}{M_0 + zm_л}\left(\frac{\rho_c}{\rho_и}\right)^2. \qquad (12.11)$$

Отношение $\rho_c/\rho_и$ для различных лопастей лежит в узких пределах ($\rho_c/\rho_и \approx 0{,}8...0{,}9$). Поэтому можно приближенно считать, что величина ε пропорциональна отношению общей массы лопастей к массе всей системы.

При заданных значениях ν_0 и ε влияние других параметров принято показывать на графиках, один из образцов которых приведен на рис. 12.2. При этом удобно пользоваться относительными величинами (по отношению к собственной частоте колебаний основания p_0):

$$\bar{\omega} = \omega/p_0; \; \bar{n}_0 = n_0/p_0; \; \bar{n}_л = n_л/p_0.$$

График (см. рис. 12.2) показывает, что граничные значения $\omega_{гр1}$ и $\omega_{гр2}$ зависят от величины безразмерных коэффициентов демпфирования основания ($\bar{n}_0$) и лопасти ($\bar{n}_л$). С увеличением $\bar{n}_л$ при заданном $\bar{n}_0$ зона неустойчивости сужается и при некотором $\bar{n}_л = \bar{n}_л^*$ стягивается в точку. При $\bar{n}_л > \bar{n}_л^*$ земной резонанс отсутствует при всех ω. Значение $\bar{n}_л^*$ называется *критическим*. Значение $\bar{\omega}^*$, к которому стягивается зона неустойчивости, также называется *критическим*. Для того чтобы земного резонанса не было, необходимо выбрать достаточно большие значения обоих коэффициентов — $\bar{n}_л$ и $\bar{n}_0$. Если значение одного из двух относительных коэффициентов демпфирования мало, то увеличение другого в практически допустимых пределах не приведет к желаемому результату.

По графикам типа, приведенного на рис. 12.2, можно проверить справедливость приближенных формул:

$$\bar{n}^*\bar{n}_0^* \approx \frac{\varepsilon(1-\nu_0)}{8\nu_0} \qquad (12.12)$$

и

$$\bar{\omega}^* \approx \frac{1}{1-\nu_0}. \qquad (12.13)$$

Первая из них дает минимально необходимое (без запаса) значение произведения $\bar{n}_л\bar{n}_0$ при угловой скорости винта, равной критической. Вторая дает приближенное значение критической скорости. Так как обычно $\nu_0 = 0{,}25...0{,}3$, то из формулы (12.13) следует, что $\omega^* = \bar{\omega}^* p_0$ соответствует частоте вращения винта, на 25—30% превышающей собственную частоту колебаний основания. Из рассмотрения графиков, подобных приведенному на рис. 12.2, и формулы (12.12) видно, что с увеличением коэффициента ε и уменьшением коэффициента ν_0 потребное демпфирование увеличивается. Следовательно, на основании формул (12.5) и (12.11) потребное демпфирование увеличивается при уменьшении выноса ВШ $l_{в.ш}$ и массы основания M_0 и увеличении массы лопастей $zm_л$.

При заданных значениях $\bar{n}_л$, $\bar{n}_0$, ε и ν_0 границы зоны неустойчивости определяются двумя определенными значениями относительной угловой скорости винта — $\omega_{гр1}$ и $\omega_{гр2}$. Граничные значения частоты оборотов винта, которые в конечном счете интересуют конструктора, при этом пропорциональны собственной частоте колебаний основания:

$$n_{гр1} = \bar{\omega}_{гр1}\frac{p_0}{2\pi}; \; n_{гр2} = \bar{\omega}_{гр2}\frac{p_0}{2\pi}.$$

Следовательно, с увеличением собственной частоты колебаний основания зона неустойчивости сдвигается в сторону больших частот вращения винта.

§ 12.3. ЗЕМНОЙ РЕЗОНАНС НА ВЕРТОЛЕТЕ

При земном резонансе вертолета, в отличие от упрощенной модели, фюзеляж, рассматриваемый как твердое тело, может совершать поступательные и вращательные колебания относительно всех трех осей. При этом жесткость и демпфирование определяются характеристиками пневматиков и амортизационных стоек шасси. Пневматики имеют упругие характеристики, близкие к линейным. Необходимо учитывать, что пневматики деформируются не только при действии вертикальной силы, но и при действии силы вдоль оси колеса. При подсчете жесткости шасси в целом обязательно учитываются и боковые смещения центра колеса, имеющие важное значение при расчете земного резонанса. Демпфирование пневматика невелико. Упругая характеристика амортизационной стойки является нелинейной, но при расчете линеаризуется.

При точном решении задачи следовало бы составить уравнения движения лопастей и фюзеляжа с учетом его линейных и угловых перемещений относительно всех трех осей. Оправдал себя приближенный метод, основанный на характерной особенности колебаний при земном резонансе, состоящей в том, что частота силы, действующей на основание при земном резонансе, близка к частоте собственных колебаний основания. Таким образом, рассматривая отдельно движение основания, можно считать, что оно совершает вынужденные колебания вблизи резонанса. Как известно (см.

гл. 11), при вынужденных колебаниях вблизи резонанса, форма вынужденных колебаний близка к форме собственных колебаний соответствующего тона. Поэтому производится расчет земного резонанса для каждого тона собственных колебаний фюзеляжа в отдельности. Считается, что фюзеляж колеблется по соответствующей форме собственных колебаний. Колебания фюзеляжа удобно представить как повороты его вокруг некоторой оси, называемой линией узлов. Для собственных колебаний без демпфирования положение линии узлов может быть всегда найдено из расчета форм собственных колебаний. При наличии демпфирования это представление является приближенным. В такой постановке уравнение колебаний фюзеляжа записывается как уравнение моментов относительно линии узлов. В уравнение входят моменты сил инерции фюзеляжа, упругих и демпфирующих сил шасси и момент, создаваемый относительно линии узлов силой P, действующей на втулку со стороны лопастей. Неизвестной функцией в уравнении является угол поворота фюзеляжа. Смещение втулки в плоскости вращения, входящее в уравнение движения лопасти, при малых колебаниях пропорционально этому углу. Таким образом, задача сводится к расчету рассмотренной выше простой модели. Это дает возможность, не решая систему уравнений заново, использовать графики типа, приведенного на рис. 12.2. Они приведены в [23]. Необходимо только вначале найти частоты собственных колебаний фюзеляжа и положение линии узлов для каждого тона. При этом, полагая фюзеляж абсолютно жестким телом, закрепленным на упругом основании (шасси), следует рассматривать его как систему с шестью степенями свободы: перемещениями и поворотами относительно трех осей. Если вертолет имеет плоскость симметрии, то его продольные и поперечные колебания можно рассматривать как независимые. При расчете поперечных колебаний учитываются три степени свободы: поперечное смещение z, угол крена γ и угол рыскания ψ, а при расчете продольных — тоже три: продольное смещение x, вертикальное смещение y и угол тангажа ϑ. Подробно методы расчета рассматриваются в [23].

Для вертолета одновинтовой схемы, как показывают более подробные исследования, расчетными являются поперечные колебания. При этом колебания рыскания можно не учитывать. Линии узлов для поперечных колебаний одновинтового вертолета приблизительно перпендикулярны к плоскости yOz. Точки их пересечения с этой плоскостью являются узлами. Движение фюзеляжа является плоским движением твердого тела.

Расчет собственных колебаний фюзеляжа при такой постановке дает возможность получить два значения собственной частоты p_{01} и p_{02} и две формы. При этом первая форма, соответствующая меньшей собственной частоте, имеет узел O_1, расположенный ниже колес (рис. 12.3), а вторая форма, соответствующая большой частоте, — узел O_2 в верхней части фюзеляжа. Обычно частота p_{01} значительно ниже, а частота p_{02} близка к максимальному значению частоты вращения винта на рабочих режимах.

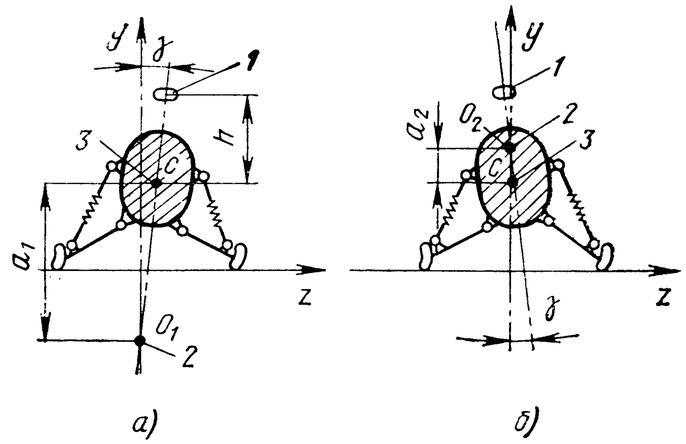


Рис. 12.3. Формы поперечных колебаний одновинтового вертолета:

а — меньшая собственная частота p_{01}; *б* — бо́льшая собственная частота p_{02}; *1* — центр втулки; *2* — узел; *3* — центр тяжести

В соответствии с изложенным выше общим методом уравнение вынужденных колебаний вертолета может быть записано в виде

$$I_{\text{пр}}\ddot{\gamma}+k_{\text{пр}}\dot{\gamma}+c_{\text{пр}}\gamma=P(h+a_j),\quad j=1,\ 2. \tag{12.14}$$

Здесь $I_{\text{пр}}$ — момент инерции относительно узла; $k_{\text{пр}}$ и $c_{\text{пр}}$ — приведенные коэффициенты демпфирования и жесткости.

Перемещение втулки в плоскости вращения пропорционально γ:

$$x=\gamma(h+a_j), \tag{12.15}$$

где h и a_j — расстояния от центра тяжести вертолета до втулки и до узла (см. рис. 12.3). Используя выражение (12.15) уравнение (12.14) можно привести к виду, аналогичному уравнению движения основания (12.1):

$$M_{j\,\text{экв}}\ddot{x}+k_{j\,\text{экв}}\dot{x}+c_{j\,\text{экв}}\dot{x}=P. \tag{12.16}$$

Параметры $M_{j\,\text{экв}}$, $k_{j\,\text{экв}}$, $c_{j\,\text{экв}}$ представляют собой массу, демпфирование и жесткость эквивалентного основания (см. [23]). Так как для поперечных колебаний существуют, как уже отмечалось выше, два тона, то возможны две зоны неустойчивости. Уравнения типа (12.16) рассматриваются дважды при двух значениях a_j и p_{0j} ($j=1, 2$).

§ 12.4. РАСЧЕТНЫЕ СЛУЧАИ И КОНСТРУКТИВНЫЕ МЕРЫ ПО ОБЕСПЕЧЕНИЮ БЕЗОПАСНОСТИ ОТ ЗЕМНОГО РЕЗОНАНСА

Расчетные случаи для земного резонанса рассмотрим на примере вертолета одновинтовой схемы. В соответствии с изложенным выше следует рассмотреть две возможные зоны неустойчивости. Первая зона, относящаяся к меньшему значению частоты собственных колебаний фюзеляжа, обычно соответствует относительно малым частотам вращения винта (порядка 30—50% от максимальной эксплуатационной частоты вращения винта). Безопасность от возникновения земного резонанса по форме низшего тона обеспе-

чивается выбором величин демпфирования шасси и лопасти, достаточных для того, чтобы гарантировать отсутствие неустойчивости (см. § 12.1). При этом следует помнить, что увеличение коэффициентов демпфирования приводит к нежелательным последствиям в отношении ресурса лопастей и прочности фюзеляжа. Действительно, увеличение демпфирования в вертикальном шарнире увеличивает изгибающий момент в комле лопасти в плоскости вращения. Увеличение демпфирования шасси без применения специальных устройств приводит к увеличению нагрузок при посадке вертолета. Поэтому не следует выбирать величины $n_л$ и n_0 больше необходимых по условиям безопасности от земного резонанса.

Вторая зона, относящаяся к большему значению частоты собственных колебаний, обычно соответствует частоте вращения винта, близкой к максимальной. При такой частоте вращения винт может создавать большую тягу. Как известно, амортизационная стойка работает, только если сжимающее усилие в стойке больше P_0 — суммы усилия предварительной затяжки и силы трения в уплотнениях амортизатора. Поэтому при увеличении тяги выше некоторой величины, при которой сила в стойке становится меньше P_0, стойка перестает работать. Ее надо рассматривать как жесткий стержень. Следовательно, при большой тяге винта коэффициент демпфирования основания n_0 определяется только демпфированием в пневматиках и поэтому относительно невелик. Как было установлено в § 12.2, земной резонанс отсутствует, если произведение $\bar{n}_л\bar{n}_0$ имеет достаточно большую величину. Однако при малом $\bar{n}_0$ получить необходимое значение $\bar{n}_л\bar{n}_0$ практически невозможно. Поэтому зону неустойчивости, соответствующую второму тону, устранить нельзя. Параметры вертолета необходимо выбирать так, чтобы рассматриваемая зона неустойчивости соответствовала бы значениям частоты вращения винта, превышающим максимально возможное при работе вертолета на земле: $n_{гр1} > n_{э\,max}$.

При пробеге вертолета вследствие качения пневматика по земле проявляется дополнительная степень свободы, влияние которой можно учесть [23], введя понятие эквивалентной боковой жесткости пневматика $c_z^э$. При скорости пробега $V_{пр}=0$ величина $c_z^э$ не отличается от фактической боковой жесткости пневматика, а с ростом скорости уменьшается. Это приводит к снижению частоты собственных колебаний фюзеляжа. Поэтому граничное значение частоты вращения винта $n_{гр1}(V_{пр})$ на пробеге снижается по сравнению с величиной $n_{гр1}(0)$ для вертолета, работающего на месте. Таким образом, одним из расчетных случаев, в дополнение к рассмотренным выше случаям работы вертолета на месте, является пробег при тяге винта, близкой по величине к весу вертолета. Расчет земного резонанса на пробеге по методике, разработанной Л. Н. Гродко, описан в [23].

При большой величине силы тяги несущего винта из-за вызванных какой-либо случайной причиной колебаний вертолета может происходить отрыв пневматиков от земли. При колебаниях с отрывом пневматиков вертолет надо рассматривать как нелинейную колебательную систему с люфтом. Наличие люфта качественно эквивалентно снижению средней за период колебаний жесткости шасси. Поэтому соответствующая собственная частота снижается. Граница зоны неустойчивости $n_{гр1}$, следовательно, также снижается. Поэтому при выборе параметров вертолета стремятся обеспечить граничное значение частоты вращения винта $n_{гр1}$ с запасом, обеспечивающим отсутствие земного резонанса при колебаниях с отрывом пневматиков.

При земном резонансе втулка винта колеблется в плоскости вращения. В рассмотренных выше случаях эти колебания втулки являлись следствием колебаний фюзеляжа как абсолютно жесткого тела на упругом шасси. Однако существуют и другие возможности. Перемещения втулки в плоскости вращения могут быть следствием упругих колебаний фюзеляжа. На вертолетах поперечной схемы втулки несущих винтов могут перемещаться в плоскости вращения при изгибных в вертикальной и горизонтальной плоскостях или крутильных колебаниях крыла или фермы. Вследствие изгиба и кручения фюзеляжа может совершать колебания в плоскости вращения втулка рулевого винта. Следовательно, если рулевой винт имеет шарниры, допускающие повороты лопастей в плоскости вращения, то также возможно возникновение колебаний типа «земной резонанс». Безопасность от земного резонанса такого типа проверяется расчетом, в котором вместо уравнения (12.1) рассматривается уравнение и соответствующие собственные формы упругих колебаний фюзеляжа, крыла или фермы [23].

Теория земного резонанса была изложена с некоторыми упрощениями. Так характеристика демпфера ВШ считалась линейной. Однако демпфер с линейной характеристикой нагружает в полете комлевую часть лопасти большими переменными изгибающими моментами, что, очевидно, является его существенным недостатком. Поэтому, как правило, применяют демпферы с нелинейной характеристикой — фрикционные и гидравлические (со ступенчатой характеристикой). Нелинейны также характеристики амортизационной стойки. Наличие в действительности нелинейных характеристик приводит к некоторым особенностям, которые нельзя выявить при рассмотрении линеаризированной задачи. К их числу относится в первую очередь наличие порога возбуждения (см. гл. 7). Величина порога возбуждения зависит от принудительного движения лопасти относительно ВШ [23].

Другое упрощение касалось движения втулки. Были рассмотрены колебания втулки только в направлении одной оси. В действительности втулка имеет две степени свободы, существенные для земного резонанса: перемещения в продольном и поперечном направлениях — по осям Ox и Oz. Полученными выше результатами для упругого основания с одной степенью свободы можно пользоваться, если частоты собственных продольных и поперечных колебаний фюзеляжа далеки друг от друга. При учете двух степеней свободы основания простые результаты получаются в частном случае изотропного основания, т. е. когда жесткость и демпфирование в

обоих направлениях (Ox и Oz) одинаковы. Для этого случая сохраняются основные качественные результаты теории земного резонанса с одной степенью свободы основания. Потребное демпфирование оказывается вдвое больше. Для вертолетов соосной схемы следует дополнительно учесть изгиб вала верхнего винта.

Рассмотренный в данной главе метод решения системы уравнений (12.2) и (12.4) с введением новых переменных η и ζ не дает возможности избавиться от периодических коэффициентов в уравнениях, составленных с учетом нелинейных характеристик демпферов ВШ и для двухлопастных винтов с анизотропным основанием. В этих случаях расчеты выполняются другими (например, численными) методами. Земной резонанс подробно рассмотрен в гл. 3 книги [23]. Для винта без ВШ возможен земной резонанс с изгибными колебаниями лопастей в плоскости вращения (при невысокой жесткости EI_y). Поэтому на втулках таких винтов устанавливают демпферы, аналогичные применяемым на винтах с ВШ.

глава 13 ПРОЧНОСТЬ ПРИ БОЛЬШИХ ОДНОКРАТНЫХ НАГРУЗКАХ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗОК

В следующих главах (гл. 14 и 15) рассматривается прочность агрегатов вертолета при действии больших нагрузок, возникающих в эксплуатации при выполнении маневров, в полете в неспокойной атмосфере (в болтанку) и при посадке. Особенностью нагружения вертолета является комплексный характер воздействия таких нагрузок на фюзеляж, крыло, шасси и подредукторную раму. Поэтому в данной главе излагается общая часть методики определения нагрузок (независимо от рассчитываемого агрегата). При этом с приемлемой точностью влиянием деформаций конструкции можно пренебречь. Существуют и более сложные методы, позволяющие учесть указанное влияние, что обычно приводит лишь к несущественным уточнениям расчетных нагрузок; эти методы в данном курсе не рассматриваются.

§ 13.1. НАГРУЗКИ ПРИ МАНЕВРЕ

Рассмотрим маневр вертолета в вертикальной плоскости. Уравнение проекций сил, действующих на вертолет, на ось Oy, перпендикулярную направлению скорости полета V (рис. 13.1, *а*), имеет вид

$$Y = G\cos\theta - F_{иy}, \qquad (13.1)$$

где Y — подъемная сила, создаваемая в основном несущими винтами и крылом вертолета; G — вес вертолета; $F_{иy}$ — инерционная сила

$$F_{иy} = -\frac{G}{g}\frac{V^2}{R}. \qquad (13.2)$$

Здесь R — радиус кривизны траектории.

Из уравнения (13.1) с учетом выражения (13.2) получим

$$\frac{Y}{G} = \cos\theta + \frac{1}{g}\frac{V^2}{R}. \qquad (13.3)$$

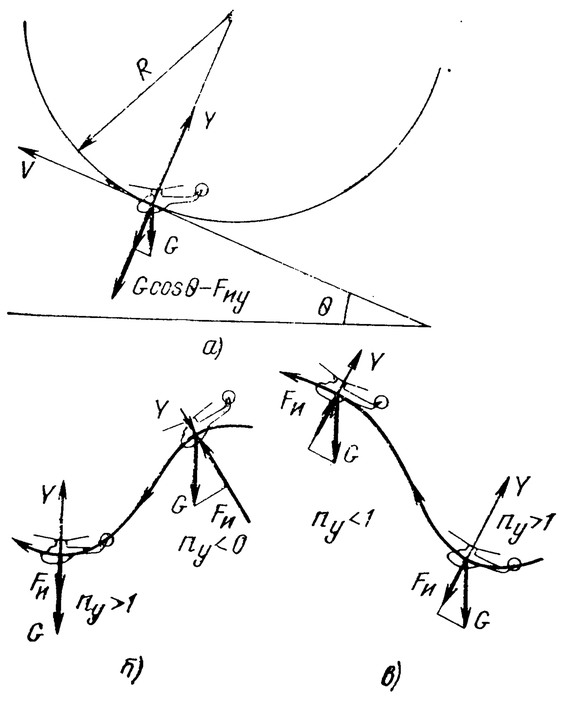


Рис. 13.1. Перегрузки при маневре:

а — общий случай; *б* — вход в планирование и выход из него; *в* — горка

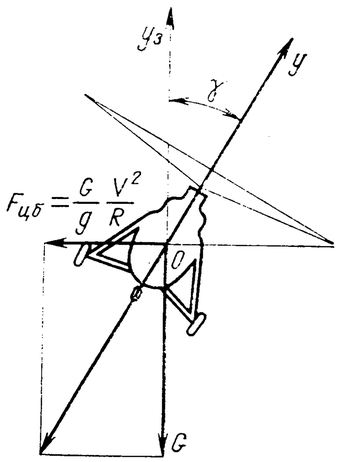


Рис. 13.2. Перегрузка при вираже

Отношение Y/G обычно принято называть вертикальной перегрузкой

$$n_y = Y/G. \qquad (13.4)$$

Понятие перегрузки может быть распространено и на другие режимы полета и другие маневры вертолета. В установившемся горизонтальном режиме полета $\theta=0$, $R\to\infty$, поэтому $Y=G$ и перегрузка по оси Oy $n_y=1$. При планировании $Y=G\cos\theta<G$, а $n_y=\cos\theta$, т. е. меньше единицы. При выходе из планирования, на первом этапе выполнения горки (рис. 13.1, *б* и *в*) $Y>G$ и $n_y<1$. При входе в планирование или на втором этапе выполнения горки (рис. 13.1, *б* и *в*) $Y<G$ и $n_y<1$. При энергичном выполнении этих маневров перегрузка по оси Oy может быть $n_y=0$ (невесомость) и отрицательной. На установившемся вираже (рис. 13.2) подъемная сила должна уравновешивать соответствующие компоненты веса и центробежной силы:

$$Y = G\cos\gamma + \frac{G}{g}\frac{V^2}{R}\sin\gamma.$$

Удобнее рассматривать уравнение проекций сил, действующих на вертолет, на вертикальную ось $Oy_з$

$$Y\cos\gamma = G,$$

откуда

$$Y = \frac{G}{\cos\gamma}; \quad n_y = \frac{1}{\cos\gamma};$$

$$Y > G; \quad n_y > 1. \qquad (13.5)$$

Аналогично можно рассматривать компоненты перегрузки по другим осям. Понятие перегрузки может быть обобщено. Можно рассматривать вектор перегрузки $\vec{n}$, представляющий собой отношение вектора поверхностных сил $\vec{P}$, включая и аэродинамические силы $\vec{R}_A$, к величине какой-либо нагрузки $G_б$, принятой за базовую:

$$\vec{n} = \frac{\vec{P}}{G_б}. \qquad (13.6)$$

Обычно $\vec{P}=\vec{R}_A+\Delta\vec{P}$, где $\Delta\vec{P}$ — другие поверхностные силы (например, реакции земли при посадке). За базовую нагрузку чаще всего принимается вес вертолета.

Величина перегрузки при маневре зависит от интенсивности маневра. Это следует, например, из соотношений (13.4) и (13.5). По-видимому, есть также ограничения, связанные с предельно возможной величиной подъемной силы, развиваемой несущими винтами и крылом вертолета. При расчете нагрузок на вертолет при маневре вертикальная перегрузка является исходной, заранее заданной величиной. Она задается нормами прочности. Для гражданских вертолетов [27] максимальная перегрузка $n_{y\,max}=3$, а минимальная $n_{y\,min}=-0{,}5$. Зная перегрузки по оси Oy, нетрудно определить величину подъемной силы, создаваемой несущими винтами и крылом: $Y=Gn_y$.

Распределение подъемной силы между винтами и крылом выполняется методами, излагаемыми в курсе аэродинамики вертолета. В расчетных случаях норм прочности задаются необходимые для этого исходные данные, характеризующие режим полета [27].

Уравнение сил, действующих на вертолет, может быть записано в виде

$$\vec{P} = M\vec{w}_{ц.т} - \vec{G}. \qquad (13.7)$$

Сила инерции $\vec{F}_и = -\vec{M}w_{ц.т}$, а вес $\vec{G}=M\vec{g}$. Поэтому из (13.7) получим с учетом (13.6):

$$\vec{w}_{ц.т} = \frac{G_б\vec{n} + M\vec{g}}{M} = \frac{G_б}{M}\vec{n} + \vec{g}.$$

Обычно $G_б=G=Mg$. При этом

$$\vec{w}_{ц.т} = g\vec{n} + \vec{g}. \qquad (13.8)$$

Таким образом, если задана перегрузка, то могут быть найдены компоненты ускорения центра тяжести, что дает возможность определить суммарную силу инерции вертолета в целом.

При определении силы инерции данного агрегата или элемента массы необходимо иметь в виду, что при маневре вертолет совершает и вращательное движение. Поэтому в произвольной точке, не совпадающей с центром тяжести вертолета, суммарное ускорение:

$$\vec{w} = \vec{w}_{ц.т} + \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times[\vec{\omega}+\vec{r}]. \qquad (13.9)$$

Первое слагаемое находится по формуле (13.8). Для определения слагаемых в уравнении (13.9), соответствующих вращательному движению, используется уравнение момента количества движения вертолета:

$$d\vec{L}/dt = \vec{M},$$

где $\vec{L}$ — главный момент количества движения; $\vec{M}$ — главный момент сил, действующих на вертолет.

Это уравнение в проекциях на главные оси, связанные с вертолетом, имеет вид

$$I_{x1}\dot{\omega}_{x1} + (I_{z1} - I_{y1})\omega_{y1}\omega_{z1} = M_{x1};$$

$$I_{y1}\dot{\omega}_{y1}+(I_{x1}-I_{z1})\,\omega_{z1}\omega_{x1}=M_{y1};\qquad(13.10)$$

$$I_{z1}\dot{\omega}_{z1}+(I_{y1}-I_{x1})\,\omega_{x1}\omega_{y1}=M_{z1},$$

где I_{x1}, I_{y1}, I_{z1} — главные моменты инерции вертолета; ω_{x1}, ω_{y1}, ω_{z1} — проекции угловой скорости вертолета на связанные оси координат; M_{x1}, M_{y1}, M_{z1} — проекции моментов поверхностных сил на связанные оси координат.

Из этих уравнений по известным поверхностным силам находятся составляющие угловых скоростей и ускорений, после чего в соответствии с формулой (13.9) определяется полное ускорение рассматриваемой массы, а по формуле

$$\Delta\vec{F}_{и}=-\Delta M\vec{w}\qquad(13.11)$$

— искомая сила инерции.

§ 13.2. НАГРУЗКИ ПРИ ПОЛЕТЕ В НЕСПОКОЙНОМ ВОЗДУХЕ

Возникновение больших нагрузок возможно и при полете в неспокойной атмосфере (в болтанку). Рассмотрим простой пример — воздействие восходящего потока на крыло, движущееся в постоянном направлении со скоростью V. Будем считать, что восходящий поток возник мгновенно, и его скорость во всех точках пространства одинакова и равна w. При таком условии угол атаки профиля изменится (рис. 13.3, *а*) на величину

$$\Delta\alpha=w/V\qquad(13.12)$$

(полагая w достаточно малой по сравнению со скоростью полета V).

Вследствие увеличения угла атаки подъемная сила крыла возрастет на величину

$$\Delta Y=c_y^{\alpha}\Delta\alpha\,\frac{\rho V^2}{2}\,S=\frac{c_y^{\alpha}S}{2}\,\rho Vw.\qquad(13.13)$$

Перегрузка по оси Oy

$$n_y=\frac{Y_0+\Delta Y}{G}=n_{y0}+\rho Vw\,\frac{c_y^{\alpha}S}{2G}.\qquad(13.14)$$

Если исходным режимом был горизонтальный установившийся полет, то $Y_0=G$ и, следовательно,

$$n_y=1+\rho Vw\,\frac{c_y^{\alpha}S}{2G}.\qquad(13.15)$$

Из формулы (13.15) следует, что при попадании в восходящий поток $n_y>1$ и $Y>G$. В нисходящем потоке $n_y<1$ и $Y<G$. В обоих случаях возникают ускорения и соответствующие инерционные силы. Величины перегрузок, подъемной силы и силы инерции вертолета зависят от величины w. При заданной величине w скорости порыва перегрузка больше при полете с большей скоростью. Следовательно, чтобы уменьшить перегрузки при полете в зоне болтанки, летчику целесообразно уменьшить скорость полета. Это обычно и рекомендуется инструкциями по технике пилотирования.

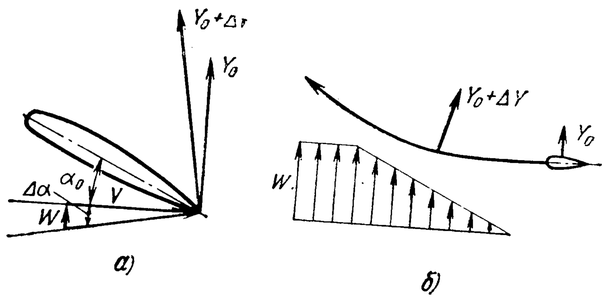


Рис. 13.3. Приращение угла атаки (*а*) и искривление траектории (*б*) при входе в восходящий поток

Полученные формулы являются приближенными даже для изолированного крыла. В действительности резко ограниченных, мгновенно возникающих потоков не существует, а крыло, лопасти винта и вертолет входят в поток постепенно. Поэтому для каждого сечения лопасти (крыла), в каждый момент времени значения w, а следовательно, и приращения углов атаки будут разными. Изменяется начальный режим, дополнительная подъемная сила ΔY вызывает искривление траектории и некоторое изменение угла атаки. Он меняется также от воздействия потока на фюзеляж и горизонтальное оперение и вследствие действий летчика, направленных на восстановление исходного режима полета. В формулах (13.13) и (13.14) не учтены также такие факторы, как изменение углов атаки от изменения индуктивных скоростей, влияние деформаций конструкции на величину аэродинамической нагрузки, а для несущего винта — движение его лопастей. Поэтому в расчетной практике для определения n_y используются обычно более сложные методы, рассматриваемые в специальных работах по этому вопросу (например [48]). В нормах прочности [27] даны определенные на основе статистических данных значения скорости w. Подъемная сила и инерционные силы определяются из соотношений (13.4) и (13.8)—(13.11).

§ 13.3. НАГРУЗКИ ПРИ ПОСАДКЕ. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

При посадке вертолет подходит к земле, имея некоторую вертикальную скорость V_y. В процессе обжатия пневматиков и амортизационных стоек шасси вертикальная скорость уменьшается до нуля. Торможение происходит за счет действия вертикальной составляющей силы тяги винта и сил реакции земли. Для того чтобы найти величины сил реакции земли, а также сил инерции, определяемых возникающими при посадке ускорениями, необходимо, таким образом, знать величину вертикальной скорости V_y в момент касания колесами земли и характеристики амортизации шасси.

При посадке с работающими двигателями величина V_y определяется прежде всего техникой пилотирования летчиком вертолета,

типом и условиями посадки. При нормальной посадке с висения вертикальная скорость V_y, как правило, не велика. При посадке с поступательной скоростью летчику труднее подвести вертолет к земле с малой величиной V_y. Величины V_y будут больше для летчика меньшей квалификации, при посадках в условиях плохой видимости и при порывистом ветре.

В случае отказа всех двигателей вертолет снижается с большой вертикальной скоростью. Перед посадкой летчик действует органами управления так, чтобы ее уменьшить. Если полет происходит с наличием значительной поступательной скорости, а местность позволяет совершить посадку с пробегом, летчик может несколько уменьшить вертикальную скорость, отклоняя ручки циклического управления на себя. При этом увеличивается угол атаки винта и его тяга, а V_y уменьшается. Если поступательная скорость не велика, то такие действия мало эффективны. Однако у летчика остается возможность несколько уменьшить V_y путем так называемого подрыва общего шага — резкого увеличения углов установки лопастей. При этом на некоторый небольшой промежуток времени (пока падение частоты вращения, вызванное увеличением момента сил спротивления винта, не превысит соответствующей величины) тяга возрастает и V_y уменьшается. Однако подрыв эффективен, если он выполнен точно на оптимальной высоте от земли (иначе вертикальная скорость не уменьшится в достаточной мере или, наоборот, снова возрастет после торможения). Поэтому при неизбежных в практике отклонениях посадки с неработающими двигателями характеризуются большей величиной вертикальной скорости.

Если на вертолете установлено более одного двигателя, то вероятность одновременного отказа всех двигателей очень мала. Поэтому для вертолетов с двумя и более двигателями рассматривается посадка с частичной подачей мощности (при отказе одного из них). При этом работающие двигатели могут быть кратковременно переведены на форсированный режим, что позволит в определенной мере компенсировать потерю мощности из-за отказа одного двигателя.

Нормами прочности [27] задаются два значения вертикальной скорости, определяемые с учетом указанных выше особенностей на основании многолетнего опыта эксплуатации и специальных испытаний. Одно из них — $V_y^э$, соответствует посадке с работающими двигателями. Обычно величина вертикальной скорости $V_y^э$ составляет 1,5—2 м/с. Другое, большее значение вертикальной скорости $V_y^{пр}$ соответствует посадке с отказавшим двигателем.

По величине вертикальной скорости можно найти кинетическую энергию, которую должна поглотить амортизация шасси:

$$\Delta T = \frac{M_{ред} V_y^2}{2}. \qquad (13.16)$$

В этой формуле $M_{ред}$ — редуцированная масса. Она отличается от массы вертолета. Линия действия вертикальной силы P_y, прило-

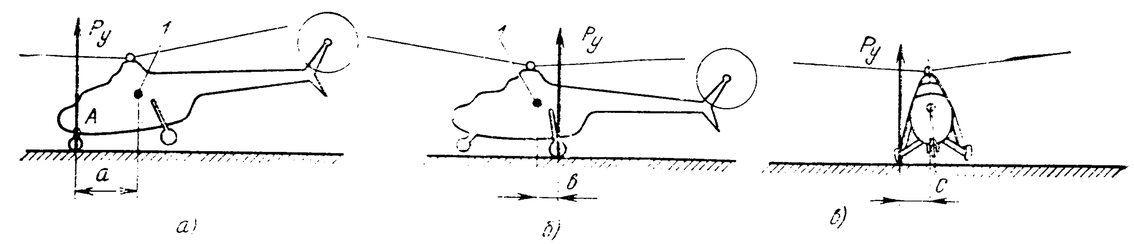


Рис. 13.4. Посадки вертолета с ударом передней (*а*) или задними опорами (*б*) рами (*б*) шасси и с креном (*в*):

1 — центр тяжести вертолета

женной к рассматриваемой опоре, обычно не проходит через центр тяжести вертолета (рис. 13.4). Поэтому после касания колесом земли возникает не только поступательное, но и вращательное движение вертолета. Рассмотрим, например, случай посадки с касанием земли вначале только передними опорами. Пусть до касания земли вертолет движется поступательно. Кинетическая энергия, соответствующая его вертикальной скорости,

$$T_1 = \frac{MV_y^2}{2}.$$

После касания передними колесами земли возникает сила P_y, создающая момент относительно центра тяжести вертолета $M_z = P_y a$, где a — расстояние от передней опоры до центра тяжести вертолета (см. рис. 13.4, *а*).

Под действием этого момента вертолет начинает вращаться вокруг оси Oz. Кинетическая энергия в момент времени, соответствующий полному обжатию амортизации передней опоры, когда дальнейшее опускание точки A, в которой к фюзеляжу крепится передняя опоры, прекратилось, равна:

$$T_2 = \frac{MV_{y\,ц.т,2}^2}{2} + \frac{I_z \omega_{z,2}^2}{2}.$$

Здесь $V_{y\,ц.т,2}$ и $\omega_{z,2}$ — скорость снижения центра тяжести и угловая скорость вертолета в рассматриваемый момент времени; I_z — момент инерции вертолета относительно оси Oz.

Кинетическая энергия, поглощенная при обжатии амортизации передней опоры, составляет

$$\Delta T = \frac{MV_y^2}{2} - \frac{MV_{y\,ц.т.2}}{2} - \frac{I_z \omega_{z,2}^2}{2}. \qquad (13.17)$$

Из условия равенства нулю скорости точки A находим

$$V_A = V_{y\,ц.т,2} + a\omega_{z,2} = 0;$$

$$V_{y\,ц.т,2} = -a\omega_{z,2}. \qquad (13.18)$$

Воспользуемся теперь уравнениями количества движения и момента количества движения:

$$MV_{y\,ц.т,2} - MV_y = \int_0^{t_2} P_y dt;$$

$$I\omega_{z,2} - I\omega_{z,1} = a\int_0^{t_2} P_y dt.$$

Исключая из этих уравнений интегралы $\int_0^{t_2} P_y dt = S$ импульса силы P_y, получим

$$MV_{y\,ц.т,2} - MV_y = \frac{I_z}{a}(\omega_{z,2} - \omega_{z,1}). \qquad (13.19)$$

До касания земли вертолет движется поступательно, поэтому $\omega_{z,1} = 0$.

Из соотношений (13.18) и (13.19) следует

$$\omega_{z,2} = -V_y \frac{a}{i_z^2 + a^2}, \qquad (13.20)$$

где $i_z = \sqrt{I_z/M}$ — радиус инерции.

С учетом выражения (13.20) формула (13.17) приводится к виду

$$\Delta T = \frac{MV_y^2}{2}\,\frac{1}{1+\frac{a^2}{i_z^2}} = \frac{M_{ред}V_y^2}{2}.$$

Величина $\dfrac{M}{1+\frac{a^2}{i_z^2}} = M_{ред}$

называется редуцированной массой. Для посадки на обе или одну из основных опор шасси, поступая аналогично, можно получить соответственно

$$M_{ред} = \frac{M}{1+\frac{b^2}{i_z^2}} \text{ или } M_{ред} = \frac{M}{1+\frac{b^2}{i_z^2}+\frac{c^2}{i_x^2}}.$$

Расстояния b и c показаны на рис. 13.4, *б* и *в*.

§ 13.4. НАГРУЗКИ ПРИ ПОСАДКЕ. СИЛЫ

Обратимся теперь к характеристике обжатия шасси — зависимости между усилием обжатия $P_{ам}$ и ходом S амортизации (рис. 13.5). Зная энергию, которую должна воспринять амортизация, с помощью таких характеристик, легко определить максимальное значение вертикальной силы. Очевидно, площадь, ограниченная кривой $P_{ам} = f(S)$, т. е. работа силы обжатия амортизации A, должна быть равна кинетической энергии ΔT, определенной по формуле (13.16).

Таким образом, максимальная величина силы обжатия определяется из условия $A = \Delta T$ по кривой $P_{ам} = f(S)$ и зависит, следовательно, не только от ΔT, но и от характеристики амортизации шасси. Если амортизационная стойка спроектирована так, что характеристика обжатия пологая (см. рис. 13.5), то максимальная величина силы обжатия будет меньше, чем при крутой характеристике. Однако потребный ход амортизации в первом случае будет больше, чем во втором (на рис. 13.5 $A_1 = A_2$). Метод построения характеристик обжатия амортизационной стойки изложен в [16].

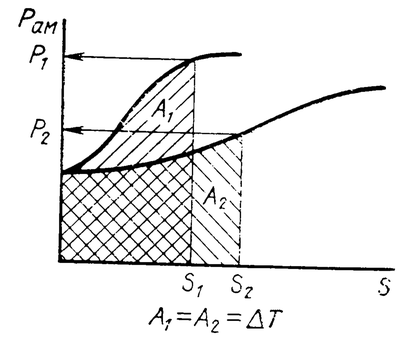


Рис. 13.5. Диаграммы обжатия амортизации шасси при различных жесткостях

При расчетах необходимо учесть, что часть энергии поглощается при обжатии колеса. Так как зависимость обжатия колеса от приложенной к нему силы близка к линейной, то работа пневматика колеса $A_{пн}$ может быть выражена приближенной формулой

$$A_{пн} = c_k P_k^2/2,$$

где c_k — жесткость пневматика колеса; P_k — вертикальная сила, действующая на колесо.

Сила, действующая по оси амортизационной стойки, т. е. сила обжатия, может быть выражена через силу реакции земли P_y (см. § 15.4). Сила $P_k = P_y$.

Из изложенного следует метод определения силы P_y при поверочном расчете. Она определяется по известной энергии удара ΔT и построенной характеристике обжатия $P_{ам} = f(S)$ с учетом работы пневматика колеса $A_{пн}$. Определяется также перегрузка

$$n_y = P_y/P_{ст},$$

где P_y — значение силы, найденное как указано выше; $P_{ст}$ — стояночная нагрузка на эту же опору шасси.

При проектировочном расчете поступают в обратном порядке. Задаются величиной n_y. Определяют максимальную величину силы

$$P_y = P_{ст} n_y. \qquad (13.21)$$

По величине P_y проектируют амортизационную стойку [16]. Для того чтобы большие нагрузки в посадочных случаях не привели бы к необходимости существенного утяжеления конструкции, величину n_y не следует выбирать более $n_y = 2 \ldots 2{,}5$. Такая величина n_y обычно допустима и по соображениям обеспечения прочности колеса. В каталогах обычно задается максимальная допустимая нагрузка на колесо данного типа. Она должна быть не меньше силы P_y, найденной по формуле (13.21).

При посадке с поступательной скоростью (случай II-п норм прочности) кроме силы P_y вследствие того, что колеса не раскручены, от трения о поверхность земли возникает сила P_x (рис. 13.6, *а*).

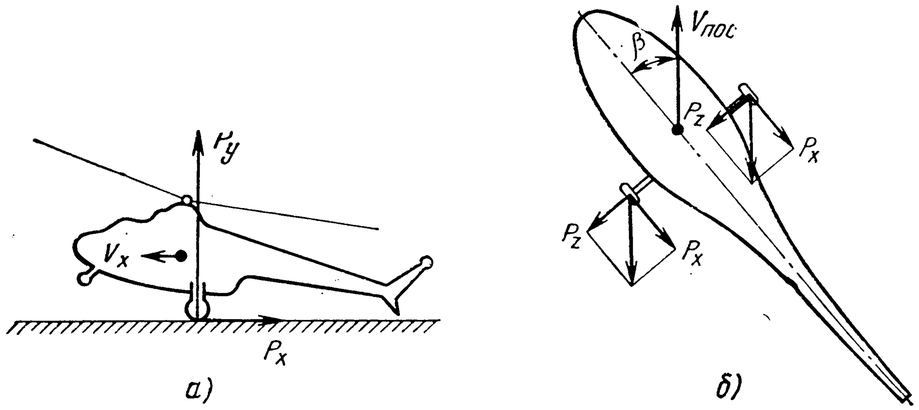


Рис. 13.6. Нагружение шасси при посадке с поступательной скоростью (*а*) и при посадке с углом скольжения $\beta_{ск}$ (*б*)

Закон измения силы P_x по времени определяется закономерностями раскрутки колеса и движения его втулки. На начальном этапе угловая скорость колеса $\omega_к$ мала. Поэтому окружная скорость колеса в точке касания земли $\omega_к R_к$ ($R_к$ — радиус колеса) меньше скорости втулки колеса $V_{вт}$, которая в начальный момент времени равна поступательной скорости вертолета. Суммарная скорость точки поверхности колеса относительно земли $V_к = V_{вт} - \omega_к R_к$ направлена, таким образом, вперед. Возникающая при этом сила трения, т. е. сила P_x, — соответственно назад. Под действием силы P_x происходит не только раскрутка колеса, но и деформация шасси, при которой втулка колеса смещается относительно фюзеляжа назад. С течением времени угловая скорость колеса $\omega_к$ увеличивается. В некоторый момент времени окружная скорость $\omega_к R_к$ становится равной $V_{вт}$, т. е. колесо раскрутилось и P_x обращается в нуль. В дальнейшем шасси совершает продольные колебания, при которых в узлах крепления возникают реакции, передающиеся на фюзеляж и направленные попеременно вперед и назад. Действие этих сил учитывается тем, что в расчетах сила P_x считается направленной не только назад, но и вперед.

Наибольшие значения силы P_x, когда она направлена вперед и назад, определяются путем специальных расчетов. Приближенно можно считать, что они примерно одинаковы по абсолютной величине и составляют $|P_{x\,max}| \approx |P_{x\,min}| \approx (0{,}5 \ldots 0{,}7)\, P_y$.

При посадке со скольжением (случай III-п норм прочности) вследствие трения колес о землю возникает боковая сила P_z (рис. 13.6, *б*). Величина этой силы задается в нормах прочности: $P_z^э = 0{,}5\, P_y^э$.

В соответствии с нормами прочности в каждом расчетном случае рассматривается действие определенной комбинации сил P_y, P_x и P_z при заданном распределении их по опорам шасси. В случаях I-п, III-п, IV-п и V-п величина сил определяется по $V_y^э$, а в случае II-п — по $V_y^{пр}$.

§ 13.5. РАСЧЕТНЫЕ НАГРУЗКИ

Нагрузки, задаваемые каждым расчетным случаем норм [27], называются эксплуатационными — $P^э$. При действии эксплуатационных нагрузок не должно быть разрушения конструкции. Нагрузка, при которой конструкция разрушается (несущая способность), называется разрушающей — $P_{разр}$. Она является свойством конкретной конструкции, определяемым выбором форм, размеров и материала ее элементов. Очевидно, что для правильно спроектированной конструкции должно выполняться условие

$$P_{разр} > P^э. \tag{13.22}$$

При проектировании агрегата и проверке его прочности пользуются так называемой расчетной нагрузкой $P^р$. Она определяется по формуле

$$P^р = P^э f. \tag{13.23}$$

Коэффициент f называется коэффициентом безопасности. Он вводится для того, чтобы учесть возможный разброс величины $P_{разр}$ отдельных однотипных агрегатов, вызванный допускаемыми отклонениями свойств материалов и полуфабрикатов и неконтролируемыми отклонениями в технологии изготовления. Величина коэффициента безопасности f выбирается так, чтобы условие (13.22) выполнялось для всех изготовленных экземпляров данного агрегата. Возможен и несколько другой подход к выбору величины f, основанный на анализе вероятности сочетания нагрузки определенной величины в полете и разрушающей нагрузки для данного экземпляра агрегата [49]. Коэффициент безопасности обеспечивает также отсутствие остаточных деформаций при нагрузке, равной эксплуатационной.

Величина коэффициента безопасности f задается нормами прочности [27] в пределах 1,5—2,5 в зависимости от расчетного случая и рассчитываемого агрегата.

После того, как конструкция спроектирована, рассчитана на прочность и изготовлена, производится экспериментальная проверка ее прочности (см. гл. 16). В результате этих испытаний определяются фактические величины разрушающей нагрузки $P^ф_{разр}$. Отношение $\eta = P^ф_{разр}/P^р$ называется коэффициентом запаса прочности. Коэффициент прочности характеризует надежность конструкции по прочности и затраты веса. Если $\eta < 1$, то конструкция должна быть усилена. Если коэффициент η значительно больше единицы, то это является показателем излишней затраты веса.

глава 14 ПРОЧНОСТЬ ФЮЗЕЛЯЖА ПРИ БОЛЬШИХ ОДНОКРАТНЫХ НАГРУЗКАХ

§ 14.1. НАГРУЗКИ

Для расчета фюзеляжа целесообразно построить эпюры перерезывающих сил, изгибающих и крутящего моментов как для балки, нагруженной поперечными нагрузками. Для построения эпюр выбирается система координат, одна из осей (Ox) которой направляется параллельно характерной продольной линии в фюзеляже, например его строительной горизонтали. Ось Oy располагается в плоскости симметрии фюзеляжа. Фюзеляж по оси Ox разбивается (обычно по шпангоутам) на 30—40 отсеков. Определяются силы, действующие на каждый отсек: инерционные, соответствующие массе отсека, реакции других агрегатов и сила тяжести. Сумма инерционных сил и сил тяжести определяется, как указано в § 13.1. При этом массу каждого отсека разносят поровну на его границы по оси Ox. Реакции несущего винта с главным редуктором и подредукторной рамой приложены в узлах крепления рамы к фюзеляжу и представляют собой каждая равнодействующую осевых сил в стержнях рамы (см. § 15.5), сходящихся в данный узел. Реакции шасси определяются при его расчете (см. § 15.4).

Реакции крыла равны перерезывающим силам, изгибающим и крутящему моментам, действующим в бортовых сечениях крыла, прилегающих к фюзеляжу. Они определяются при расчете нагрузок на крыло (см. § 15.1). Силы реакций агрегатов, размещенных внутри фюзеляжа (двигатели, грузы и пр.) вызываются инерционными силами и силами тяжести, действующими на соответствующий агрегат, которые определяются как указано в § 13.1. Построение эпюр выполняется по формулам, следующим из известных соотношений

$$Q=\int q\,dx,\quad M_{изг}=\int Q\,dx,\quad M_{кр}=\int m\,dx$$

при замене интегрирования суммированием:

$$Q_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta Q_i; \tag{14.1}$$

$$M_{изг\,k}=\sum_{n=1}^{k}Q_n\Delta x; \tag{14.2}$$

$$M_{кр\,k}=\sum_{i=1}^{k}\Delta Q_i h_i. \tag{14.3}$$

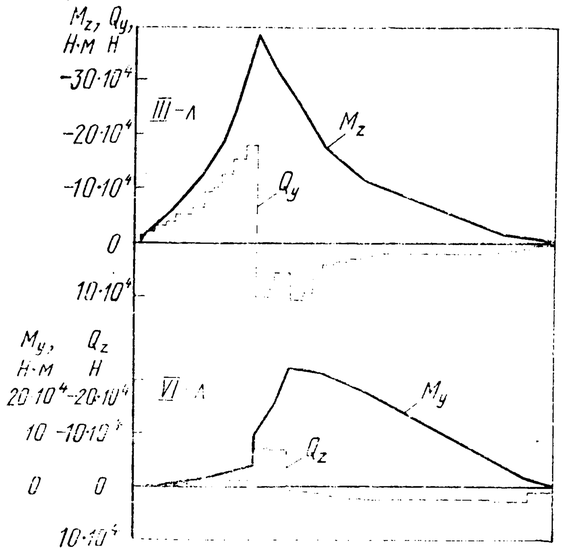


Рис. 14.1. Нагружение фюзеляжа одновинтового вертолета. Случай III-л и VI-л

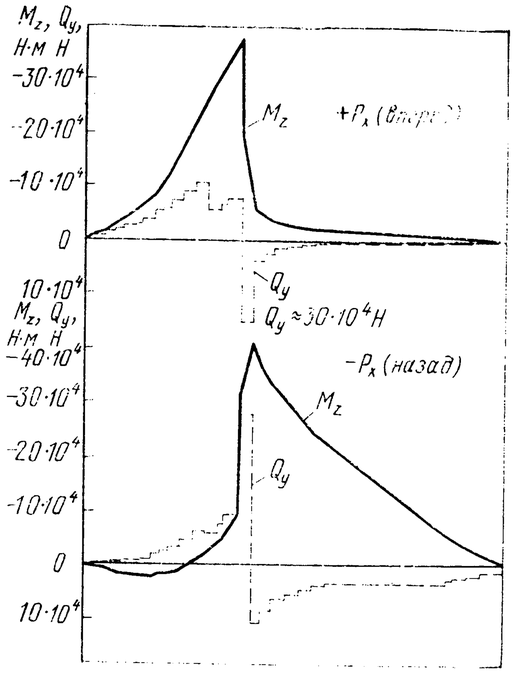


Рис. 14.2. Нагружение фюзеляжа одновинтового вертолета. Случай II-л, посадка на заднюю опору

Суммирование выполняется следуя к данному сечению с одного из концов фюзеляжа. Плечо h_i в формуле (14.3) отсчитывается от оси Ox. Эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов строятся раздельно для плоскостей xOy (Q_y и M_z) и xOz (Q_z и M_y) для каждого расчетного случая. На рис. 14.1—14.4 показаны типичные для фюзеляжа одновинтового вертолета эпюры, соответствующие различным случаям норм прочности. Даны только эпюры, характерные большими значениями M_y, M_z, Q_y, Q_z или $M_{кр}$.

В случае III-л возникает изгибающий момент в основном в вертикальной плоскости M_z. В случае VI-л возникает большой по величине изгибающий момент M_y в горизонтальной плоскости (в средней и хвостовой части фюзеляжа) и крутящий момент $M_{кр}$ в хвостовой части фюзеляжа, вызванные увеличением суммы силы тяги рулевого винта и боковой силы, создаваемой килем. При посадочных случаях особенности эпюр сил и моментов определяются последовательностью касания вертолетом земли. В случае II-п, при начальном касании земли основными опорами, возникают большие изгибающие моменты M_z и перерезывающие силы Q_y при силе P_x, направленной вперед, в средней и носовой, а при силе P_x, направленной назад, — в средней и хвостовой частях фюзеляжа. При касании передней опорой и силе P_x, направленной назад, — появляются большие M_z и Q_y в носовой части, а при силе P_x, направленной вперед, — значительный момент M_z в средней и хвостовой части, вызывающий изгиб фюзеляжа выпуклостью вниз. Случай III-п

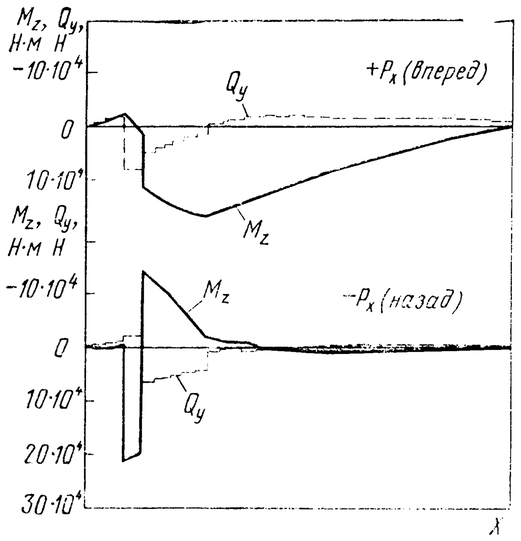


Рис. 14.3. Нагружение фюзеляжа одновинтового вертолета. Случай II-п, удар передней опорой после переваливания вертолета

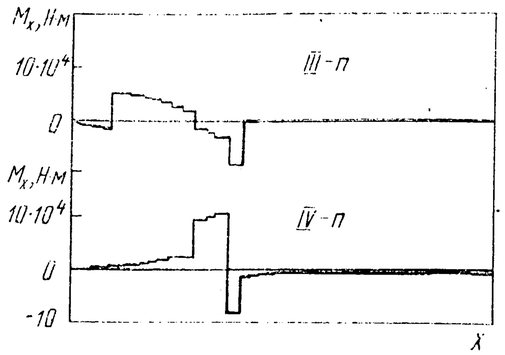


Рис. 14.4. Нагружение фюзеляжа одновинтового вертолета. Крутящий момент. Случай III-п и IV-п

характеризуется большим крутящим моментом в носовой части фюзеляжа. В случае IV-п возникает наибольший крутящий момент в средней части фюзеляжа. Сжимающие нормальные напряжения воспринимаются конструкцией хуже, чем растягивающие (см. § 14.6). Поэтому, анализируя эпюры изгибающих моментов, следует установить положение сжатых зон. При действии момента M_z в большинстве случаев сжатая зона охватывает нижнюю часть фюзеляжа. В случае II-п при касании передней опорой она расположена сверху. При действии момента M_y сжатая зона с наибольшими напряжениями расположена по тому борту фюзеляжа, в сторону которого направлена тяга рулевого винта.

Из изложенного следует, что для носовой части фюзеляжа определяющее значение имеют: случай II-п при касании передней опорой (по величине нормальных напряжений — сжатая зона в верхней части фюзеляжа), случай III-л (по величине нормальных напряжений при изгибе в вертикальной плоскости со сжатой зоной в нижней части) и случай III-п (по величине касательных напряжений). Для средней части фюзеляжа основным является случай III-л, а также случаи VI-л (изгиб в горизонтальной плоскости), II-п (изгиб в вертикальной плоскости) и IV-п (по величине касательных напряжений). Для хвостовой части определяющим является случай VI-л, а по величине M_z также и случай II-п.

Конечно, возможны (при отклонениях в конструкции фюзеляжа, а также в размещении сосредоточенных грузов и креплений шасси) и другие комбинации определяющих случаев. Поэтому всегда следует построить эпюры для всех расчетных случаев и на их основании выбрать для каждой части фюзеляжа определяющие случаи.

Для вертолетов соосной схемы имеет место в основном тот же комплекс определяющих расчетных случаев. Для вертолета продольной схемы определяющими могут быть также случаи I-п и V-п, а случай IV-п имеет меньшее значение. Особенно тяжелыми являются случаи III-л, I-п и V-п, если в середине фюзеляжа размещается большой сосредоточенный груз (рис. 14.5). Для фюзеляжа вертолета поперечной схемы определяющими являются в основном те же случаи, что и для одновинтового вертолета. Характерной особенностью вертолета поперечной схемы является значительно больший момент инерции I_x относительно продольной оси (вследствие большого выноса значительных масс по оси Oz). Поэтому в случае IV-п редуцированная масса (см. § 13.4) практически не меньше, а равна массе вертолета.

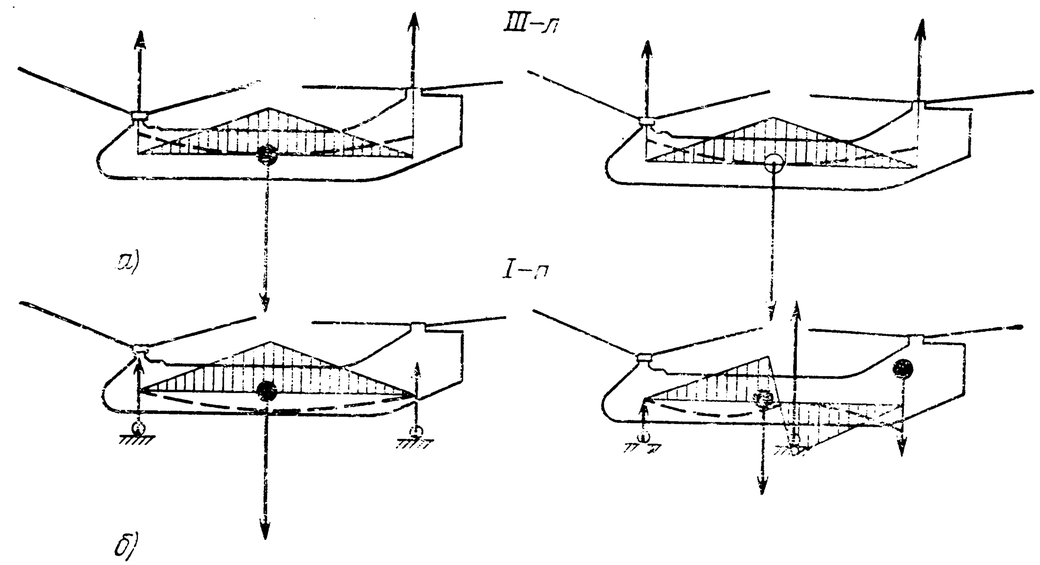


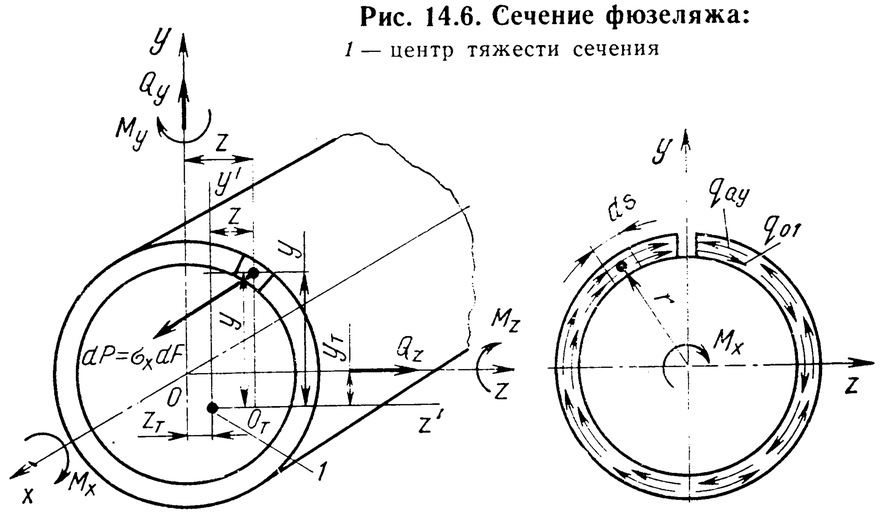
Рис. 14.5. Нагружение фюзеляжа вертолета продольной схемы в вертикальной плоскости:

а — в полете; *б* — при посадке

§ 14.2. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА РЕГУЛЯРНЫХ УЧАСТКАХ ФЮЗЕЛЯЖА

Участки по длине фюзеляжа без вырезов в продольном наборе, мест приложения большой сосредоточенной нагрузки (узлов) и резких перепадов жесткостей будем называть регулярными. Для них существуют хорошо разработанные и надежные методы определения напряжений в элементах продольного набора. Наличие перечисленных выше особенностей влечет за собой более или менее существенные изменения напряженного и деформированного состояний. Поэтому для определения напряжений на таких участках применяются другие методы (см. § 14.5). Для предварительного выбора количества и размеров стрингеров, толщин обшивки и других элементов при конструировании применяются упрощенные приближенные методы проектировочного расчета (см. § 14.4 и 14.5). Окончательная проверка выполняется с помощью более точных, но

Рис. 14.6. Сечение фюзеляжа:
1 — центр тяжести сечения



обычно и значительно более трудоемких методов поверочного расчета (см. § 14.2 и 14.3).

Рассмотрим сначала методы расчета для регулярного участка фюзеляжа. В курсе строительной механики авиаконструкций [35] изложен метод расчета оболочек типа авиаконструкций при действии изгибающих и крутящего моментов и перерезывающих сил. Для определения нормальных напряжений получена формула:

$$\sigma_x = k\left(\frac{M_y}{I_{тz}} z - \frac{M_z}{I_{тy}} y\right), \tag{14.4}$$

где $k = \dfrac{1}{1 - \dfrac{I_{тyz}}{I_{тz} I_{тy}}}$; $\tilde{y} = y - y_т - (z - z_т)\dfrac{I_{тyz}}{I_{тy}}$;

$$\tilde{z} = z - z_т - (y - y_т)\frac{I_{тyz}}{I_{тz}}; \quad y_т = \frac{S_z}{F}; \quad Z_т = \frac{S_y}{F};$$

$$I_{т\tilde{y}} = I_y - F z_т^2; \quad I_{тz} = I_z - F y_т^2; \quad I_{тyz} = I_{yz} - F y_т z_т.$$

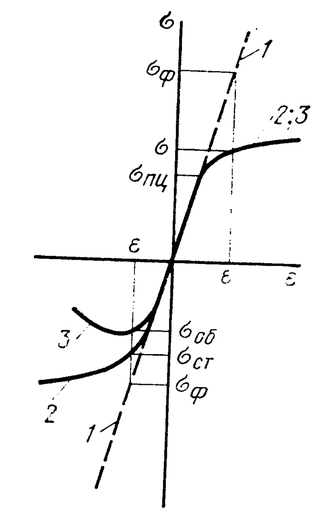
Величины S_y, S_z, I_y, I_z и I_{yz} представляют собой статические моменты и моменты инерции сечения фюзеляжа относительно осей Oy и Oz выбранной в § 14.1 системы координат (рис. 14.6), F — площадь сечения.

При больших по величине нагрузках в некоторых элементах — стрингерах и участках обшивки напряжения могут быть выше предела пропорциональности ($\sigma_{пц}$), а в других — выше критических по условиям потери устойчивости ($\sigma_{кр}$). Для этих элементов линейная зависимость напряжений от удлинений:

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{14.5}$$

принятая при выводе формулы (14.4), не выполняется (рис. 14.7). Поэтому при действии больших нагрузок непосредственно использовать формулу (14.4) нельзя. С другой стороны, превышение предела пропорциональности или критического напряжения потери

Рис. 14.7. Диаграммы растяжения — сжатия:
1 — линейная зависимость; *2* — стрингер; *3* — обшивка



устойчивости в отдельных элементах еще не означает разрушение конструкции в целом. Ее несущая способность, т. е. способность выдерживать увеличивающуюся нагрузку, может быть при этих условиях еще не исчерпана. Это вызывает необходимость обобщения метода определения напряжений, разработанного в строительной механике на случай больших нагрузок. Напомним, что при выводе формулы (14.4) наряду с законом (14.5) были использованы уравнения равновесия отсеченной части оболочки, которые имеют вид:

$$\sum X = 0, \ \oint_F \sigma_x dF = 0,$$

$$\sum M_y = 0, \ \oint_F \sigma_x z dF + M_y = 0; \tag{14.6}$$

$$\sum M_z = 0, \ \oint_F \sigma_x y dF - M_z = 0.$$

Была также применена гипотеза плоских сечений, в соответствии с которой относительные удлинения стрингеров и обшивки в продольном направлении ε_x распределены в сечении по линейному закону:

$$\varepsilon_x = Ay + Bz + C, \tag{14.7}$$

где A, B и C — неизвестные коэффициенты. Подстановка соотношений (14.5) и (14.7) в интегралы уравнений (14.6) привела их к виду

$$\oint_F \sigma_x dF = E(AS_z + BS_y + CF);$$

$$\oint_F \sigma_x y dF = E(AI_{yz} + BI_y + CS_y); \tag{14.8}$$

$$\oint_F \sigma_x z dF = E(AI_z + BI_{yz} + CS_z).$$

Поэтому система (14.6) была записана так:

$$AS_z + BS_y + CF = 0;$$

$$AI_{yz} + BI_y + CS_y = -M_y/E;$$

$$AI_z + BI_{yz} + CS_z = M_z/E.$$

Из этих соотношений были определены коэффициенты A, B и C. Подстановка их в соотношение (14.7) и далее соотношения (14.7) в выражение (14.5) дала формулу (14.4).

Для учета нелинейной зависимости $\sigma=f(\varepsilon)$ поступим следующим образом. Введем (см. рис. 14.7) фиктивную линейную зависимость

$$\sigma_ф=E\varepsilon. \tag{14.9}$$

При одной и той же величине ε найденные по линейному закону (14.9) напряжения $\sigma_ф$ будут отличаться от действительных σ (см. рис. 14.7).

Обозначим соотношение

$$\sigma/\sigma_ф=\varphi. \tag{14.10}$$

Коэффициент φ называется *редукционным коэффициентом*. Из формулы (14.10) следует:

$$\sigma=\varphi\sigma_ф. \tag{14.11}$$

Введем также так называемые редуцированные площади $F_{ред}$, определяемые соотношением

$$\varphi dF=dF_{ред}. \tag{14.12}$$

Из формул (14.11) и (14.12) следует равенство

$$\sigma_ф dF_{ред}=\sigma dF=dP. \tag{14.13}$$

Это означает, что при переходе от действительных значений нормальных напряжений и площадей элементов к редуцированным продольная сила в элементе оболочки dP (см. рис. 14.6) сохраняет свою величину. Также не изменяется и величина относительных удлинений ε. На основании равенства (14.13) произведения σdF в интегралах (14.8) можно заменить произведениями $\sigma_ф dF_{ред}$, в которых $\sigma_ф$ зависит от ε линейно (14.9). Следовательно, можно повторить всю последовательность выкладок, выполнявшихся для получения формулы (14.4). Это даст формулу, не отличающуюся по форме от (14.4), но в левой ее части будет фиктивное значение $\sigma_ф$, а в правую войдут величины F, S_y, S_z, $I_{т\,y}$, $I_{т\,z}$, $I_{т\,yz}$, вычисляемые не по действительным элементарным площадям dF, а по редуцированным по формуле (14.2). Итак, для определения фиктивных напряжений применима формула (14.4), в которой площадь F, статические моменты S_y, S_z и моменты инерции $I_{т\,y}$, $I_{т\,z}$, $I_{т\,yz}$ подсчитываются по редуцированным площадям элементов. Действительные величины напряжений в i-м элементе на основании формулы (14.10) определяются соотношением

$$\sigma_i=\sigma_{iф}\varphi_i.$$

Изложенное обобщается на случай продольных элементов, выполненных из различных материалов.

При практическом вычислении нормальных напряжений, редукционные коэффициенты φ заранее неизвестны. Для их определения можно воспользоваться методом последовательных приближений, который состоит в следующем. Для каждого элемента оболочки

задаются значениями $\varphi_i^{(1)}$ первого приближения и определяют для редуцированных величин $y_т^{(1)}$, $z_т^{(1)}$, $I_{ty}^{(1)}$, $I_{tz}^{(1)}$, $I_{tyz}^{(1)}$. Производят вычисления по формуле (14.4). В результате будут найдены значения $\sigma_{iф}^{(1)}$ — фиктивных напряжений в каждом элементе. С помощью формулы (14.9) определяют удлинения $\varepsilon_i^{(1)}$ в первом приближении. По найденным значениям $\varepsilon_i^{(1)}$ и диаграммам растяжения — сжатия $\sigma=f(\varepsilon)$ определяют действительные напряжения первого приближения, и по формуле (14.10) находят значения редукционных коэффициентов для второго приближения $\varphi_i^{(2)}$. Далее весь расчет начиная с определения положения центра тяжести и моментов инерции повторяется при новых значениях редуцированных площадей $F_{iред}^{(2)}=F_i\varphi_i^{(2)}$. В результате определяются в том же порядке, как и выше, значения $\sigma_{iф}^{(2)}$, $\varepsilon_i^{(2)}$, $\sigma_i^{(2)}$ и $\varphi_i^{(3)}$ и т. д. Расчет прекращается, когда разница величин φ_i или σ_i в двух полседовательных приближениях становится меньше заданной (обычно 3—5%).

§ 14.3. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. РАСЧЕТ ШПАНГОУТОВ

Для определения потока касательных напряжений в курсе строительной механики были получены формулы:

$$q=q_Q+q_{0i}; \tag{14.14}$$

$$q_Q=k\left(\frac{Q_y\bar{S}_y^{отс}}{I_{tz}}+\frac{Q_z\bar{S}_z^{отс}}{I_{ty}}\right). \tag{14.15}$$

Эти формулы справедливы и для рассматриваемого случая работы конструкции при больших нагрузках, когда нормальные напряжения в некоторых элементах превышают $\sigma_{пц}$ или $\sigma_{кр}$, если статические моменты отсеченной части сечения $\bar{S}_y^{отс}$ и $\bar{S}_z^{отс}$ вычислять по редуцированным площадям:

$$\bar{S}_y^{отс}=\int\limits_{s_{отс}}\tilde{z}\varphi\delta ds;\quad \bar{S}_z^{отс}=\int\limits_{s_{отс}}\tilde{y}\varphi\delta ds.$$

Сечения фюзеляжа представляют собой, как правило, односвязные контуры, поэтому уравнение моментов относительно оси Ox имеет вид (см. рис. 14.6)

$$\oint\limits_s q_Q r ds+q_{01}\oint r\bar{d}s+M_x=0. \tag{14.16}$$

Из формулы (14.15) можно найти q_Q, из формулы (14.16) — поток q_{01} и, наконец, из (14.14) — суммарный поток.

Для многозамкнутых контуров потоки q_{0i} определяются соответствующим методом строительной механики.

При действии крутящего момента поток касательных напряжений определяется по формуле Бредта, которая следует из формул

(14.15) и (14.16) при $Q_y = Q_z = 0$,

$$q = \frac{M_x}{2\omega},$$

где ω — площадь, ограниченная контуром поперечного сечения.

Расчет шпангоутов. Шпангоуты фюзеляжа по характеру нагружения разделяются на нормальные и силовые. Нормальные шпангоуты обеспечивают сохранение формы фюзеляжа. Они являются опорами для обшивки и стрингеров. На фюзеляж от других агрегатов передаются большие по величине сосредоточенные силы. Они приложены в узлах крепления соответствующего агрегата к фюзеляжу. Было бы грубой ошибкой размещать эти узлы на обшивке. Очевидно, что при действии нагрузок имели бы место большие деформации и просто вырыв куска обшивки вместе с узлом. Поэтому узлы должны быть размещены на шпангоутах. Такие шпангоуты называются *силовыми*. Их назначением является, таким образом, восприятие больших по величине сосредоточенных сил от других агрегатов и передача их в форме распределенной нагрузки на другие элементы конструкции вертолета.

Шпангоут рассчитывают как плоскую раму, нагруженную сосредоточенными силами. Силы уравновешиваются потоком касательных усилий, являющихся реакцией обшивки. Посредством этого потока шпангоут передает действующую внешнюю силу на обшивку, вызывая в ней касательные напряжения. Интенсивность потока касательных напряжений можно приближенно определять по формулам (14.4) — (14.16). В действительности потоки q несколько отличаются от найденных таким образом [16]. Отличие вызвано влиянием на распределение q изгибных деформаций шпангоута, которые в приближенном методе не учитываются. После того как поток q найден, шпангоут рассчитывают как статически неопределенную раму методами строительной механики. Строят эпюры изгибающего момента, осевой и перерезывающей сил по контуру шпангоута, а затем определяют нормальные (в поясах шпангоута) и касательные (в его стенке) напряжения.

Для кольцевых шпангоутов постоянного сечения при постоянной по окружности толщине обшивки фюзеляжа и симметричном расположении стрингеров существуют готовые эпюры изгибающих моментов [16].

§ 14.4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ УЧАСТКОВ

Для проектировочных расчетов существуют различные приближенные методы. Так, например, часто пользуются формулой (14.4), но вместо определения редукционных коэффициентов методом последовательных приближений производят расчет при значениях φ_i, выбранных заранее на основе опыта расчета аналогичных конструкций. Для элементов в сжатой зоне принимают: для стрингеров $\varphi = 0{,}7 \ldots 0{,}8$, для обшивки $\varphi = 0{,}3 \ldots 0{,}5$.

Несколько упрощает расчет приведение обшивки к стрингерам. При определении координат центра тяжести сечения, статических моментов и моментов инерции сечения полагают, что обшивка отсутствует, а для компенсации площади стрингеров $f_{стр}$ увеличивают:

$$f_{пр.стр} = f_{стр} + f_{пр} = f_{стр} + \varphi b \delta = f_{стр} + b_{пр}\delta. \qquad (14.17)$$

Здесь b — расстояние между стрингерами; δ — толщина обшивки.

Величины $b_{пр} = \varphi b$ и $f_{пр}$ называются шириной и площадью присоединенной обшивки. В растянутой зоне с учетом ослабления отверстиями под заклепки редукционный коэффициент $\varphi = 0{,}9 \ldots 0{,}95$. Для сжатой зоны приближенно полагают: $b_{пр} \approx (30 \ldots 40)\ \delta$.

Наконец, приближенно нормальные напряжения могут быть определены из следующих соображений. Пусть на фюзеляж действует только момент $M_z (M_y = 0)$, рассматриваемое сечение симметрично относительно оси Oz и напряжения во всех элементах меньше $\sigma_{пц}$ и $\sigma_{кр}$. Величина $\sigma_i dF_i$ представляет собой элементарную силу dP_i. Напряжения в элементе σ_i при линейном законе $\sigma = f(\varepsilon)$, как это следует из формулы (14.4), пропорциональны y_i. Таким образом, сила dP_i пропорциональна y_i. Момент этой силы относительно оси Oz (см. рис. 14.6) равен $dM_{zi} = dP_i y_i$, т. е. пропорционален y_i^2. Таким образом, одинаковые по площади и материалу продольные элементы, расположенные на различных расстояниях от оси сечения, если они работают в пределах линейного участка кривой $\sigma = f(\varepsilon)$, воспринимают долю изгибающего момента, пропорциональную квадрату этого расстояния. Поэтому элементами, расположенными вблизи оси, относительно которой действует момент, можно пренебречь, так как они воспринимают лишь небольшую его часть.

Например, для овального сечения, приближающегося к прямоугольному (рис. 14.8, *а*), момент M_z воспринимается в основном стрингерами и обшивкой верхнего и нижнего сводов. В сводах действуют продольные силы

$$P_{св} \approx M_z / H.$$

Напряжения в стрингерах этих сводов

$$\sigma \approx P_{св} / F_{св},$$

где $F_{св}$ — сумма площадей стрингеров, входящих в рассматриваемый свод с учетом площади присоединенной обшивки (14.17).

Для круглого сечения при прикидочных расчетах можно пользоваться теми же формулами, полагая $H \approx 0{,}9D$ и включая в площадь $F_{св}$ площади элементов, расположенных в верхнем и нижнем секторах сечения, показанных на рис. 14.8, *б*.

Один из методов приближенного определения касательных напряжений от перерезывающей силы основан на отбрасывании стрингеров в соответствующим изменением толщины обшивки:

$$\delta_{пр} = \varphi \delta_{об} + f_{стр}/b.$$

В растянутой зоне редукционный коэффициент $\varphi = 0{,}9 \ldots 1$; в сжатой, если $\sigma > \sigma_{кр}$, то $\varphi = 0{,}3 \ldots 0{,}5$, если $\sigma < \sigma_{кр}$, то $\varphi = 1$.

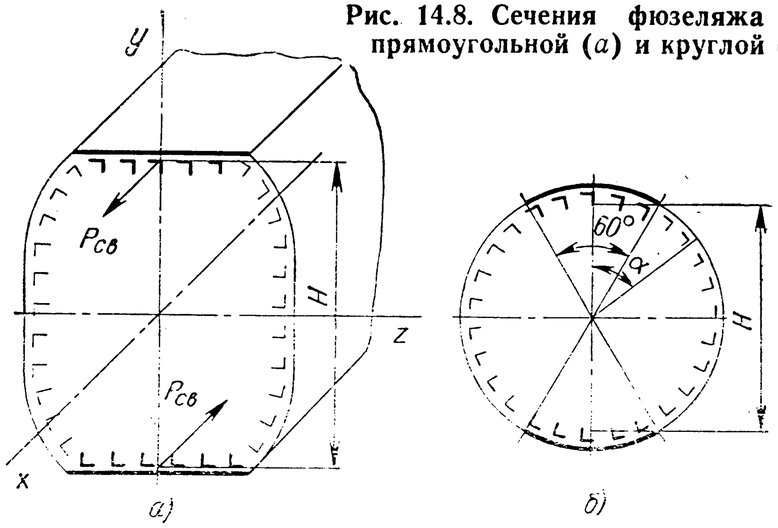


Рис. 14.8. Сечения фюзеляжа близкой к прямоугольной (*а*) и круглой (*б*) формы

Для фюзеляжа с сечением, близким к окружности, при постоянной толщине приведенной обшивки

$$q_Q = \frac{Q}{\pi R} \sin \alpha,$$

где α — угол, показанный на рис. 14.8, *б*; R — радиус сечения фюзеляжа.

Для овального сечения, приближающегося к прямоугольному (см. рис. 14.8, *а*), максимальная величина потока касательных напряжений приближенно равна:

$$q_{Q\,max} \approx 1{,}25 \frac{Q}{2H}.$$

§ 14.5. НАПРЯЖЕНИЯ НА УЧАСТКАХ С ВЫРЕЗАМИ

Крупные вырезы в фюзеляже (грузовые люки, двери) вызывают определенные особенности в распределениях деформаций и напряжений. Так, в ряде случаев не выполняется гипотеза плоских сечений. Особое значение приобретает стесненное кручение. Рассмотрим напряженное состояние отсека фюзеляжа с вырезом в нижней части (рис. 14.9). В целях упрощения будем считать, что изгибающий и крутящий моменты по длине отсека не меняются, а вызванные ими напряжения не превышают пределов пропорциональности или величин критических напряжений потери устойчивости.

При действии только изгибающего момента M_z элементы в сечениях (*I, II*) (см. рис. 14.9, *а*) на участке выреза и в сечениях *V*, достаточно удаленных от выреза, работают так же, как в сечениях фюзеляжа без вырезов, а следовательно, нормальные напряжения в них определяются формулой (14.4). На переходных участках (III—IV) происходит перераспределение нормальных напряжений по высоте сечения — от эпюры для сечений *I—II* к эпюре для сечения *V*.

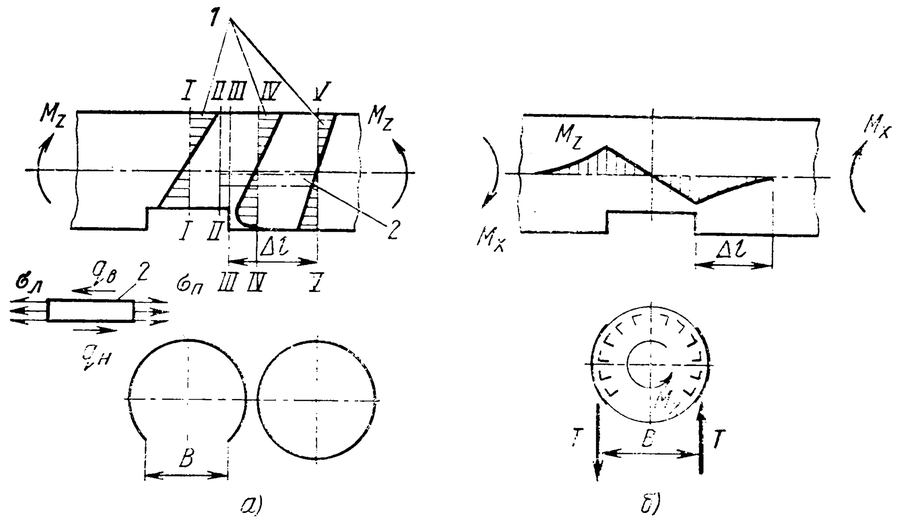


Рис. 14.9. Отсек фюзеляжа с вырезом, нагруженный изгибающим (*а*) и крутящим (*б*) моментами:

1 — эпюры нормальных напряжений; *2* — продольная полоска, вырезанная из бортовой панели фюзеляжа

По концам продольных элементов — полосок *2*, вырезанных как показано на рис. 14,9, *а*, действуют напряжения $\sigma_л$ и $\sigma_п$, в общем случае не одинаковые по величине (в соответствии с эпюрами нормальных напряжений в сечениях *I—II* и *V*). Продольные силы $\sigma_л \Delta F$ и $\sigma_п \Delta F$ на левом и правом концах элемента не равны друг другу. Поэтому элемент должен быть уравновешен потоками касательных напряжений, действующих по его продольным границам. Система таких касательных напряжений обеспечивает перераспределение по контуру сечения нормальных напряжений. Таким образом, на переходном участке *III—IV* помимо нормальных напряжений возникают дополнительные касательные напряжения, вызванные наличием выреза. Длина переходного участка Δl существенно зависит от жесткости продольного набора (стрингеров, обшивки) и шпангоутов по концам выреза. Приближенно $\Delta l \approx B$, где B — ширина выреза (см. рис. 14.9, *а*). Метод расчета напряжений приведен в книге [16].

Рассмотрим теперь работу отсека при действии крутящего момента. На участке выреза обшивка образует открытый профиль. При свободном кручении, отличительной чертой которого является депланация сечений, открытые профили не могут воспринять больших крутящих моментов. Замкнутые части фюзеляжа, лежащие рядом с вырезом, затрудняют депланацию. Поэтому в рассматриваемом случае имеет место стесненное кручение, при котором профиль может воспринимать большой крутящий момент.

Стеснение депланации предполагает появление направленных вдоль оси отсека нормальных напряжений, препятствующих депланации. Система этих напряжений является самоуравновешенной, т. е. равнодействующая всех элементарных сил $\sigma \Delta F$ и момент этих сил должны быть равны нулю. Если же рассматривать только одну из боковых панелей, то эта панель деформируется так, как если бы

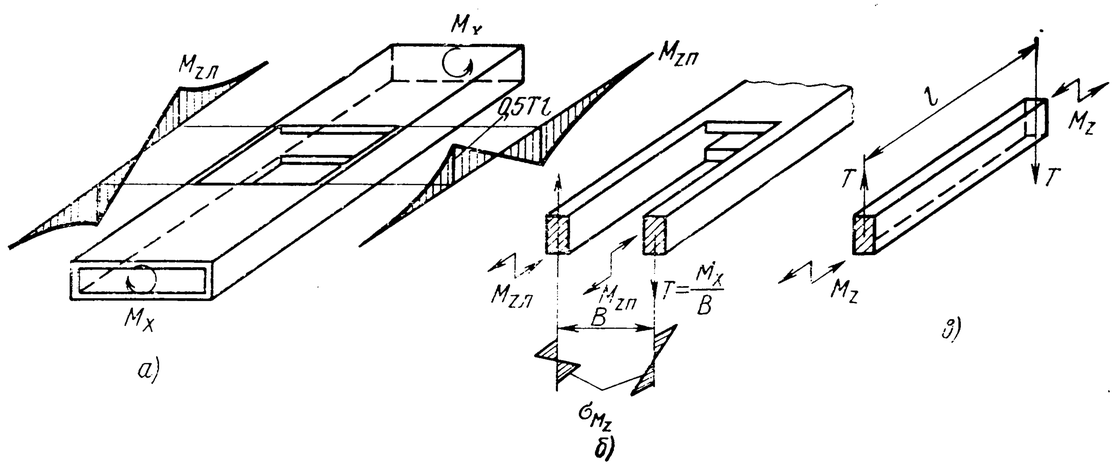


Рис. 14.10. Отсек с вырезами, нагруженный крутящим моментом (*а* и *б*), и одна из его боковых панелей (*в*)

она была нагружена изгибающим моментом. Появление нормальных напряжений при действии крутящего момента является характерной особенностью напряженного состояния участка фюзеляжа с вырезом. В качестве упрощенного примера рассмотрим отсек коробчатого сечения (рис. 14.10, *а*) с вырезами как в верхней, так и в нижней панели. На участке вырезов крутящий момент воспринимается парой перерезывающих сил T, действующих по боковым стенкам панели (рис. 14.10, *б*). Рассматривая отдельно одну из боковых стенок (рис. 14.10, *в*), видим, что под действием только перерезывающих сил она не будет находиться в равновесии. Поэтому по ее торцам возникают изгибающие моменты M_z и соответствующие нормальные напряжения. Сумма моментов M_z, действующих в двух панелях, равна нулю, что диктуется условиями равновесия. В одной же из панелей наибольшая величина момента $M_{z\,\max}=0{,}5Tl$.

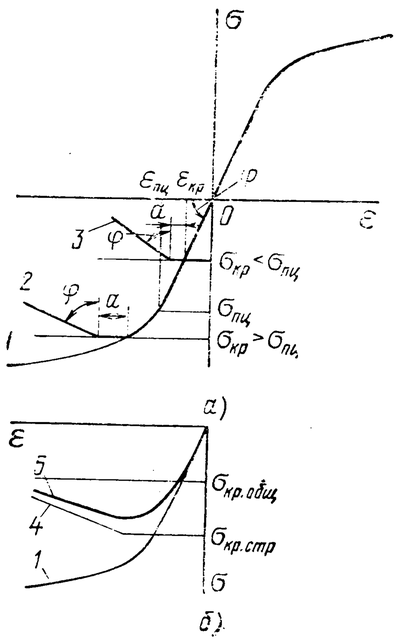
Возвратившись к расчету рассматриваемого участка фюзеляжа с вырезом при действии крутящего момента, укажем, что наиболее простой приближенный способ расчета основан на приведении этого участка к рассмотренной схеме отсека с двумя вырезами. При этом пренебрегается работой верхнего свода фюзеляжа (см. рис. 14.9, *б*). Крутящий момент воспринимается боковинами (как в рассмотренном выше примере с коробчатым отсеком). Силы в боковине $T\approx M_x/B$, изгибающий момент в боковине $M_z=Tx$. Касательные и нормальные напряжения в боковинах от силы T и момента M_z определяются по обычным формулам. На участке рядом с вырезом в продольном наборе также возникают нормальные напряжения, затухающие по мере удаления от выреза. Этим напряжением соответствуют касательные, обеспечивающие их выравнивание до нуля. Величины нормальных и касательных напряжений, определенные расчетами по изложенному приближенному методу, могут в большей или меньшей мере отличаться от действительных. Более точные способы расчета напряжений на участках с вырезом получены на основе теории стесненного кручения [16], на основе гипотезы плоских сечений при сдвиге и кручении и при использовании комбинации напряженных состояний, соответствующих этим двум схемам [28].

Расчет напряжений в элементах конструкции нерегулярных участков фюзеляжа может быть выполнен также с помощью метода конечных элементов. Для этого фюзеляж разделяется на отдельные простейшие элементы. Полагают, что элементы связаны друг с другом только в дискретных точках, расположенных на их краях. Эти точки называются узлами. Рассматривая вначале каждый элемент в отдельности, находят для него соотношение между перемещениями узлов и приложенными в них силами произвольной величины. Выбирают основные неизвестные: перемещения узлов (метод перемещений) или силы (метод сил). Далее в методе перемещений для каждого узла записывают уравнения равновесия, в которые входят реакции всех элементов, соединяющихся в нем, и внешние, приложенные к нему, нагрузки. Реакции выражают с помощью полученных ранее соотношений через перемещения. Такие уравнения, составленные для всех узлов, образуют систему, которая решается (относительно перемещений) на ЭЦВМ. По найденным перемещениям определяют силы, приложенные к каждому элементу, и напряжения в них. Такой метод позволяет получить наиболее точные результаты.

§ 14.6. ДИАГРАММЫ РАСТЯЖЕНИЯ — СЖАТИЯ. КРИТИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В СТРИНГЕРАХ

При растяжении диаграммы $\sigma=f(\varepsilon)$, т. е. зависимости напряжений от относительных удлинений для лонжеронов, стрингеров и обшивки совпадают с диаграммой для материала, из которого они изготовлены. Поэтому их построение можно выполнить на основании справочных данных по характеристикам материалов. При сжатии кривые $\sigma=f(\varepsilon)$ для материала и для конструктивных элементов отличаются (см. рис. 14.7) вследствие того, что обшивка и стрингеры при соответствующих нагрузках теряют устойчивость. Приближенно диаграмму $\sigma=f(\varepsilon)$ для стрингера или обшивки можно построить следующим образом. В качестве исходной принимается кривая $\sigma=f(\varepsilon)$ для материала. Определяется критическое напряжение потери устойчивости $\sigma_{кр}$. На диаграмме $\sigma=f(\varepsilon)$ для материала отмечается точка $\sigma=\sigma_{кр}$. Дальнейшее построение производится по различным правилам для стрингера и для обшивки. Для стрингера (рис. 14.11, *а*) через точку $\sigma=\sigma_{кр}$ проводится прямая, параллельная оси абсцисс. На прямой откладывается отрезок длиной a, из конца которого проводится наклонная прямая, составляющая с осью ординат угол $\varphi=\operatorname{arctg}E$. Если $\sigma_{кр}<\sigma_{пц}$, то $a=\varepsilon_{кр}/2$, если $\sigma_{кр}>\sigma_{пц}$, то $a=\varepsilon_{пц}/2$. Здесь $\varepsilon_{пц}$ и $\varepsilon_{кр}$ — относительные удлинения, соответствующие напряжениям $\sigma_{пц}$ и $\sigma_{кр}$.

Потеря устойчивости обшивкой при наличии подкрепляющих элементов — стрингеров и шпангоутов не означает еще полного исчерпания ее несущей способности. Пусть к участку обшивки с



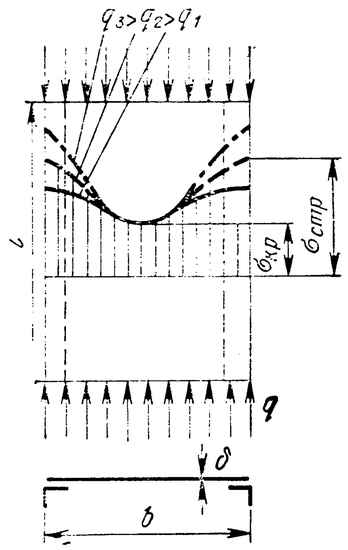


Рис. 14.11. Построение диаграммы растяжения — сжатия стрингера (*а*) и обшивки (*б*):

1 — диаграмма для материала; *2* — диаграмма для стрингера при $\sigma_{кр}>\sigma_{пц}$; *3* — диаграмма для стрингера при $\sigma_{кр}<\sigma_{пц}$; *4* — диаграмма для стрингера; *5* — диаграмма для обшивки

Рис. 14.12. Диаграмма работы обшивки совместно со стрингерами

двумя стрингерами из того же материала по краям (рис. 14.12) приложена сжимающая нагрузка. При малой величине нагрузки напряжения в обшивке и стрингерах одинаковы. При увеличении нагрузки напряжения в стрингерах будут увеличиваться. Напряжения в обшивке будут увеличиваться равномерно по всей ее ширине, пока они не станут равными $\sigma_{кр}$ обшивки. При дальнейшем увеличении нагрузки в средней между стрингерами части обшивки напряжения практически остаются равными $\sigma_{кр}$. Участки обшивки по краям (у стрингеров) сохраняют несущую способность и напряжения в них увеличиваются так же, как в стрингерах. С увеличением нагрузки неравномерность распределения напряжений по ширине панели увеличивается.

При построении диаграммы $\sigma=f(\varepsilon)$ неравномерное распределение напряжений заменяют равномерным, соответствующим среднему по ширине значению напряжений $\sigma_{кр}$. Величина среднего значения может быть определена по формуле [45]

$$\sigma_{ср}=\sqrt{\sigma_{стр}\sigma_{кр.обш}}.$$

Здесь $\sigma_{кр.обш}$ — критическое напряжение для обшивки; $\sigma_{стр}$ — напряжение в стрингере.

По этой формуле для каждого значения ε можно вычислить значения $\sigma_{ср}$, которые и наносятся на график $\sigma=f(\varepsilon)$ обшивки (см. рис. 14.11, *б*). Значения $\sigma_{стр}$ берутся по диаграмме $\sigma_{стр}=f(\varepsilon)$, построенной для стрингеров, как указано выше.

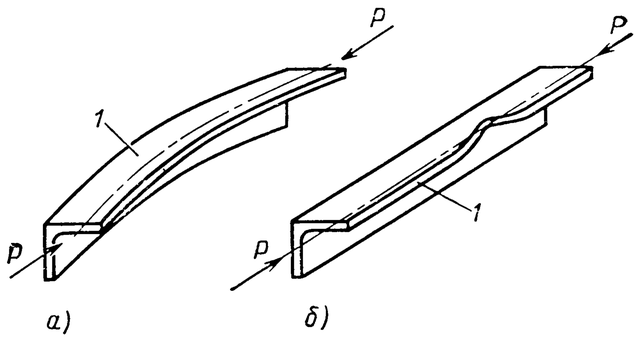


Рис. 14.13. Общая (*а*) и местная (*б*) потери устойчивости:

1 — ось стрингера

Критические напряжения потери устойчивости стрингеров. При определении критических напряжений для стрингеров необходимо иметь в виду две формы потери устойчивости — общую и местную. Общая форма потери устойчивости характеризуется (рис. 14.13, *а*) изгибом оси стрингера или его закручиванием. При этом поперечные сечения стрингера не искривляются, а смещаются в соответствии с искривлением оси или поворачиваются вокруг нее, сохраняя свою форму. При местной потере устойчивости (рис. 14.13, *б*) ось стрингера не искривляется. Происходит выпучивание одной или нескольких полок — пластинок, образующих стрингер. Поперечные сечения стрингера в этом случае теряют свою первоначальную форму. Общая форма потери устойчивости характерна в основном для длинных стержней, а местная — для коротких.

Критические напряжения общей потери устойчивости стрингера определяются по известной из курса сопротивления материалов формуле Эйлера:

$$\sigma_{кр}=\frac{C\pi^2E}{(l/i)^2}, \qquad (14.18)$$

где l — длина стрингера (расстояние между шпангоутами); i — радиус инерции сечения стрингера.

Коэффициент C зависит от условий закрепления стрингера по концам, т. е. на шпангоутах. Если шпангоуты силовые, мощные, то обычно принимают $C=2$. При несиловых шпангоутах стрингер можно считать закрепленным по концам шарнирно, и, следовательно, $C=1$.

Если стрингер скреплен с обшивкой, то при расчете радиуса инерции сечения момент инерции и площадь сечения вычисляются с учетом присоединенной обшивки. Ширина присоединенной обшивки при напряжениях, меньших напряжения потери ее устойчивости, принимается равной расстоянию между стрингерами, а при больших напряжениях равной (30—40) δ. Из формулы (14.18) следует, что критическое напряжение общей потери устойчивости стрингера возрастает при уменьшении расстояния между шпангоутами и при выборе профилей стрингера, имеющих больший радиус инерции.

Формула Эйлера была получена при условии линейной зависимости $\sigma=f(\varepsilon)$ для материала стержня (стрингера). Поэтому она

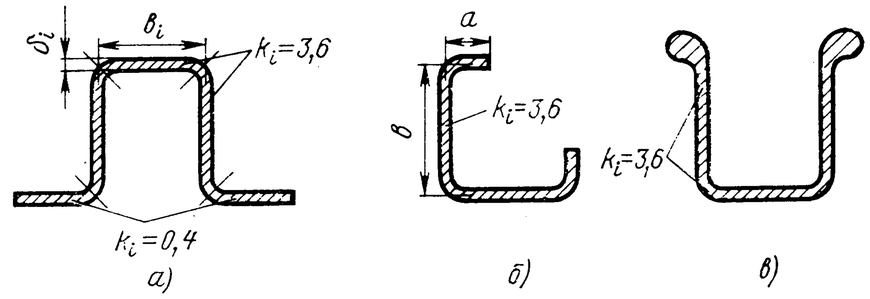


Рис. 14.14. Стрингер с полками с различными граничными условиями (*а*), с отгибами (*б*) и бульбами (*в*)

дает правильные результаты только при $\sigma_{кр}<\sigma_{пц}$ или

$$\bar{l}=\frac{l}{i}>\left(\frac{l}{i}\right)_{пр}=\sqrt{\frac{C\pi^2E}{\sigma_{пц}}}=\bar{l}_{пр}.$$

При меньших значениях $\bar{l}$ пользуются экспериментальными данными или одной из приближенных эмпирических формул, например, [16]:

$$\sigma_{кр}=\sigma_в\frac{1+\nu}{1+\nu+\nu^2}\ ;\quad \nu=\frac{\sigma_в}{\sigma_э}\ ,$$

где $\sigma_э$ — напряжение, найденное по формуле (14.18).

Для определения критического напряжения местной потери устойчивости каждую из полок стрингера рассматривают как сжатую пластинку и используют формулу (14.19). Коэффициент k_i для полки, к краям которой с обеих сторон примыкают другие полки, принимают с некоторым запасом $k_i=3{,}6$. Для полки с одним свободным краем (рис. 14.14, *а*) принимают $k_i=0{,}40$. При наличии небольших по ширине ($a/b\approx0{,}2\ldots0{,}3$) отгибов (рис. 14.14, *б*) или так называемых бульб — утолщений по кромкам профиля (ри.с 14.14, *в*) — для всех стенок можно принимать $k_i=3{,}6$. Если полученные значения $\sigma_{кр\,i}>\sigma_{пц}$, то они исправляются по формулам (14.20) или (14.21).

Потеря местной устойчивости одной из пластинок, входящих в состав стрингера, соединенного с обшивкой, еще не означает, что несущая способность стрингера в целом исчерпана, так как другие полки еще способны воспринимать бо́льшие нагрузки. Поэтому для стрингера, скрепленного с обшивкой, критическое напряжение, при котором исчерпывается его несущая способность вследствие потери местной устойчивости, определяется по формуле

$$\sigma_{кр}=\frac{\sum\sigma_{кр\,i}F_i}{\sum F_i}\ ,$$

где F_i — площадь сечения полки.

§ 14.7. КРИТИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБШИВКИ

Обшивку, заключенную между двумя стрингерами и двумя шпангоутами, можно рассматривать как пластинку, нагруженную по краям нормальными и касательными напряжениями. Это дает возможность использовать в качестве основы для определения критических напряжений потери устойчивости формулы теории пластинок строительной механики [35]. В эти формулы вносятся некоторые поправки, учитывающие экспериментальные данные и особенности работы обшивки в конструкции.

Для плоской пластинки, нагруженной по концам равномерной сжимающей нагрузкой, соответствующая формула имеет вид

$$\sigma_{кр}=\frac{kE}{(b/\delta)^2}\ , \tag{14.19}$$

где b — ширина пластинки; δ — толщина пластинки.

Значения коэффициента k меняются в широких пределах в зависимости от соотношения сторон и условий закрепления краев пластинки. Однако отношение длины обшивки (расстояние между шпангоутами) к ширине (расстояние между стрингерами) обычно значительно больше единицы, поэтому можно пользоваться асимптотическими значениями k. Если стрингеры являются достаточно мощными, хорошо сопротивляются кручению, имеют коробчатое сечение, то пластинку можно считать защемленной по краям и $k=6{,}3$. При открытых стрингерах (пластинка, опертая шарнирно) $k=3{,}6$.

С уменьшением отношения ширины пластинки к ее толщине величина $\sigma_{кр}$, определенная по формуле (14.19), неограниченно возрастает (рис. 14.15). При значениях

$$\bar{b}=\frac{b}{\delta}<\left(\frac{b}{\delta}\right)_{пр}=\sqrt{\frac{kE}{\sigma_{пц}}}=\bar{b}_{пр}$$

величина $\sigma_{кр}$ больше $\sigma_{пц}$. Вывод формулы (14.19) был основан на линейной зависимости напряжений от деформации $\sigma=f(\varepsilon)$, поэтому ею можно пользоваться, только если $\sigma_{кр}<\sigma_{пц}$, т. е. при $\bar{b}>\bar{b}_{пр}$. При меньших значениях $\bar{b}$ используются эмпирические зависимости для определения критического напряжения потери устойчивости, например:

$$\sigma_{кр}=\sigma_{сж}-(\sigma_{сж}-\sigma_{пц})(\bar{b}/\bar{b}_{пр}) \tag{14.20}$$

$$\text{или}\quad \sigma_{кр}=\sigma_{сж}\frac{1+\nu}{1+\nu+\nu^2}\ ;\quad \nu=\frac{\sigma_{сж}}{\sigma'_{кр}}\ , \tag{14.21}$$

где $\sigma_{сж}$ — предел прочности при сжа-

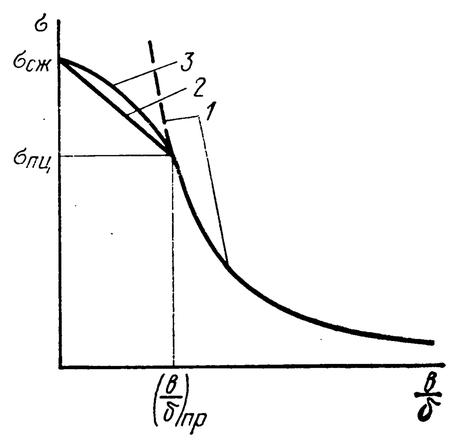


Рис. 14.15. Зависимость критического напряжения от параметра b/δ:

1 — по формуле (14.19); *2*, *3* — при $\sigma>\sigma_{пц}$

тин. С некоторым запасом $\sigma_{сж}=\sigma_в$; $\sigma'_{кр}$ — критическое напряжение, определенное по формуле (2.17); n — показатель степени, принимаемый равным 1 или 2.

Из формулы (14.19) можно сделать вывод о том, что критические напряжения потери устойчивости увеличиваются при уменьшении ширины пластинки, т. е. при более частом расположении стрингеров по сечению и при увеличении толщины обшивки. Обычно при проектировании выбирают шаг стрингеров и толщину обшивки, имея в виду не только влияние этих параметров на $\sigma_{кр}$, но и ряд других факторов (увеличение массы при увеличении числа стрингеров и толщины обшивки, обеспечение прочности при действии касательных напряжений и местных нагрузок, технологическую сложность конструкции и др.).

Для фюзеляжа характерно наличие панелей с относительно небольшим радиусом кривизны. Цилиндрические панели более устойчивы, чем плоские. Формулы для определения критических напряжений основаны на теоретическом изучении устойчивости цилиндрических оболочек с учетом экспериментальных данных [16, 43]. Одна из них имеет вид

$$\sigma_{кр}=\frac{kE}{(b/\delta)^2}+\frac{0,15E}{R/\delta}. \qquad (14.22)$$

Другая, дающая близкие к (14.22) результаты:

$$\sigma_{кр}=\sqrt{\sigma^2_{цил}+\left(\frac{\sigma_{пл}}{2}\right)^2}+\frac{\sigma_{пл}}{2}, \qquad (14.23)$$

где $\sigma_{цил}=\frac{9E}{(R/\delta)^{1,6}}+\frac{0,16E}{(l/\delta)^{1,3}}$; $\sigma_{пл}=\frac{kE}{(b/\delta)^2}$;

R — радиус кривизны панели; l — расстояние между шпангоутами.

Формулы (14.22) и (14.23) применимы при $\sigma_{кр}<\sigma_{пц}$. При $\sigma_{кр}>\sigma_{пц}$ можно применять формулы (14.20) или (14.21).

При действии касательных напряжений пластинка (обшивка) также может потерять устойчивость. Критическое значение касательного напряжения потери устойчивости плоской пластинки [43]

$$\tau_{кр}=\frac{k_\tau E}{(b/\delta)^2}. \qquad (14.24)$$

Для определения коэффициента k_τ в случае шарнирных опор по краям пластинки можно пользоваться приближенной зависимостью:

$$k_\tau=4,8+3,6\left(\frac{b}{l}\right)^2,$$

где b и l — ширина и длина пластинки, причем $l>b$. Для пластинки с защемленными краями коэффициент k_τ больше приблизительно на 70%.

Для цилиндрической панели критическое касательное напряжение потери устойчивости выше, чем для плоской. Оно определяется эмпирической формулой [44]:

$$\tau_{кр}=\frac{0,1E}{R/\delta}+\frac{5E}{(b/\delta)^2}\beta;\quad \beta=1+0,8(b/l)^2. \qquad (14.25)$$

Здесь R — радиус обшивки; δ — толщина обшивки. Формулами (14.24) и (14.25) можно пользоваться, если $\tau_{кр}<\tau_{пц}$. При бо́льших значениях $\tau_{кр}$ используют формулы (14.20) или (14.21), заменив в них нормальные напряжения касательными.

Обычно по краям участка обшивки, ограниченного двумя стрингерами и двумя шпангоутами, одновременно действуют как нормальные, так и касательные напряжения. При наличии напряжений одного вида критические напряжения другого вида уменьшаются.

Критические напряжения, нормальные или касательные при совместном сжатии и сдвиге пластинки, определяют по формулам

$$\sigma_{кр}=\sigma^0_{кр}[1-(\tau/\tau^0_{кр})^n];$$

$$\tau_{кр}=\tau^0_{кр}\sqrt[n]{1-\sigma/\sigma^0_{кр}}.$$

Здесь τ и σ — действующие в обшивке касательные и нормальные напряжения; $\tau^0_{кр}$ и $\sigma^0_{кр}$ — критические напряжения потери устойчивости при раздельном действии только касательных или только нормальных напряжений.

Показатель степени n принимают обычно равным $n=1,7$ (по экспериментальным данным).

Более подробные сведения о расчете фюзеляжей можно найти в книгах [16, 28, 35, 44 и 49].

глава 15 ПРОЧНОСТЬ КРЫЛА, ОПЕРЕНИЯ, ШАССИ И ДРУГИХ АГРЕГАТОВ ПРИ БОЛЬШИХ ОДНОКРАТНЫХ НАГРУЗКАХ

§ 15.1. НАГРУЗКИ НА КРЫЛО

Крыло можно рассматривать как тонкостенную балку, работающую на изгиб и кручение. Подкосы можно считать стержнями, работающими только на растяжение—сжатие. При определении нагрузок на крыло его вдоль размаха разбивают на отсеки по нервюрам. К числу действующих на крыло сил относятся аэродинамические, реакции других агрегатов, реакции подкосов, инерционные и силы тяжести. Суммы инерционных сил и сил тяжести определяются, как указано в § 13.1, реакции агрегатов, крепящихся к крылу (шасси, гондолы двигателей, редукторы несущих винтов, подвески и пр.) — в § 13.1, 15.4 и 15.5. Реакции подкосов равны по величине действующим в них осевым силам, которые определяются методами расчета комбинированных систем в строительной механике [35].

Суммарная аэродинамическая сила, действующая на крыло, определяется из аэродинамического расчета вертолета. Распределение ее по размаху более точно может быть получено в результате продувок моделей фюзеляжа с крылом в аэродинамических трубах. Приближенно можно считать, что аэродинамическая нагрузка по размаху крыла распределена пропорционально его хордам

$$q_а = \frac{Y_к}{l}\,\frac{b}{b_{ср}}, \qquad (15.1)$$

где $Y_к$ — суммарная подъемная сила крыла; l — размах крыла (без его части, занятой фюзеляжем); b — средняя хорда данного отсека крыла; $b_{ср}$ — средняя хорда крыла; $q_а$ — погонная аэродинамическая нагрузка.

Нагрузка на отсек $\Delta Q_i = q_i \Delta l$. Крутящий момент определяется относительно некоторой прямой, проведенной в направлении размаха. Обычно выбирают прямую, проходящую на расстоянии одной четверти хорды от передней кромки крыла. Для подсчета крутящего момента надо также найти положение центра давления в каждом сечении крыла. Для этого по погонной нагрузке $q_а$ определяется коэффициент подъемной силы сечения

$$c_{y\,сеч} = \frac{q_а}{\frac{\rho V^2}{2}\,b}. \qquad (15.2)$$

По найденным значениям $c_{y\,сеч}$ из атласа аэродинамических характеристик профиля определяются коэффициенты момента c_m. Обычно коэффициенты момента определены для момента относительно носка профиля. При этом

$$\bar{x}_д = \frac{x_д}{b} = \frac{c_m}{c_y}.$$

Построение эпюр изгибающих и крутящих моментов и перерезывающих сил выполняется, как и для фюзеляжа, по формулам (14.1)—(14.3).

Определяющим по величине нагрузок является обычно случай III-л, а для крыла с установленным на нем шасси также и один из посадочных случаев. Основной нагрузкой является изгибающий момент в вертикальной плоскости M_z. Для крыла одновинтового вертолета в случае III-л сжатая зона охватывает верхнюю поверхность крыла, а наиболее нагруженное сечение расположено в комлевой части крыла в месте крепления его к фюзеляжу. Для вертолета поперечной схемы вследствие действия реакций редуктора несущего винта, гондолы и подкосов наиболее нагруженное сечение смещается к внешнему концу крыла.

§ 15.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИИ КРЫЛА

Поверочный расчет напряжений в продольном наборе части крыла, не примыкающей непосредственно к фюзеляжу и не имеющей вырезов, выполняется тем же методом, что и для фюзеляжа (см. § 14.2 и 14.3). При прикидочном (проектировочном) расчете для определения нормальных напряжений можно считать, что момент M_x воспринимается верхней и нижней панелями крыла, заключенными между передним и задним лонжеронами (рис. 15.1), и использовать приближенные формулы

$$S = M_x / h_{ср}; \quad \sigma = S / F_{пр},$$

где S — осевая сила в верхней или в нижней панели; $h_{ср}$ — средняя высота крыла в его средней по хорде части (между лонжеронами).

Приведенную площадь верхней панели $F_{пр}$ определяют по приближенной формуле:

$$F_{пр} = F_л + \varphi_{стр} f_{стр.пр},$$

где $F_л$ — площадь поясов лонжеронов.

Редукционные коэффициенты $\varphi_{стр}$ и приведенные площади стрингеров $f_{стр.пр}$ определяются как и при приближенном расчете фюзеляжа (см. § 14.4).

Метод приближенного определения касательных напряжений изложен в [16, 43 и 49]. Напряженное состояние элементов продольного набора в районе выреза качественно не отличается от рассмотренного в § 14.5 для фюзеляжа.

Особенностью напряженного состояния крыла по сравнению с фюзеляжем является распределение напряжений в комлевой части. Оно зависит от силовой схемы крыла и конструкции крепления к фюзеляжу. Обычно применяется крепление крыла с помощью узлов на лонжеронах к ответным узлам на шпангоутах фюзеляжа. Если крыло двухлонжеронное и оба узла (переднего и заднего лонжеронов) имеют по два уха (рис. 15.2, *а*), то изгибающий момент M_x в районе стыка воспри-

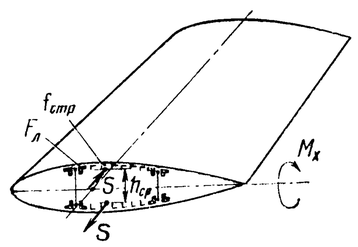
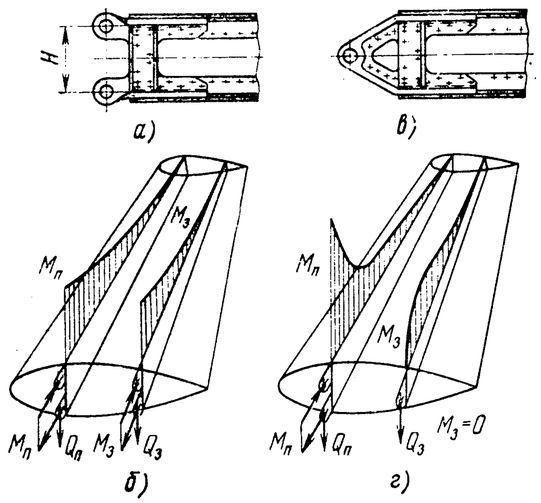


Рис. 15.1. К приближенному определению напряжений в продольном наборе двухлонжеронного крыла



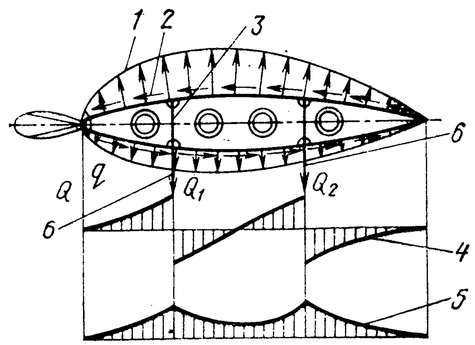


Рис. 15.2. Эпюры нагружения лонжеронов крыла при консольном (*а*, *б*) и шарнирном (*в*, г) креплении заднего лонжерона

Рис. 15.3. Эпюры нагружения нервюры:

1 — аэродинамическая нагрузка; *2* — поток касательных напряжений (реакция обшивки); *3* — стенки лонжеронов; *4* — эпюра перерезывающей силы; *5* — эпюра моментов; *6* — силы реакции стенок лонжеронов

нимается (рис. 15.2, *б*) этими лонжеронами пропорционально их жесткостям:

$$\frac{M_п}{M_з} = \frac{EI_п}{EI_з};$$

$$M_п + M_з = M_x,$$

где $M_п$ и $M_з$ — изгибающие моменты переднего и заднего лонжеронов. Моменты инерции $I_п$ и $I_з$ определяются площадями поясов лонжеронов.

Если задний вспомогательный лонжерон имеет шарнирное крепление (рис. 15.2, *в*), то весь момент M_x воспринимается передним лонжероном (рис. 15.2, *г*). На участке длиной Δl от места стыка к концу крыла происходит перераспределение нормальных напряжений: включается в работу задний лонжерон, стрингеры и обшивка, так что на расстоянии Δl нормальные напряжения распределены, как для сечения в части крыла без вырезов. Приближенно длина переходного участка Δl равна расстоянию B между лонжеронами. Перерезывающая сила Q_y и крутящий момент в комлевых сечениях воспринимаются стенками лонжеронов, вызывая в них соответствующие касательные напряжения. На участке Δl происходит перераспределение касательных напряжений. На этом участке действуют также дополнительные касательные напряжения, наличие которых (см. § 14.5) вызвано перераспределением нормальных напряжений.

Заделка крыла может препятствовать депланациям корневых сечений при действии крутящего момента и перерезывающей силы. Стеснение депланаций вызывает появление в лонжеронах, стрингерах и обшивке дополнительных нормальных и в обшивке и стенках лонжеронов дополнительных касательных напряжений, образующих самоуравновешенные системы. Если заделка такова, что стеснение имеет место, то вызванные им напряжения следует учитывать при расчете нормальных и касательных напряжений в корневых сечениях [16, 28].

Нервюры крыла принято разделять на усиленные, к которым крепятся другие агрегаты (стойки шасси, узлы двигательной установки или подредукторные рамы) и нормальные. Усиленные нервюры воспринимают сосредоточенные силы реакций крепящихся к ним агрегатов. Аэродинамическая нагрузка является по сравнению с этими силами второстепенной и обычно в расчетах не учитывается. Нормальные нервюры рассчитываются на действие аэродинамической нагрузки,

передающейся на них с обшивки. Нервюры нагружаются также при изгибе и кручении крыла (см. [16, 43, 49]). Опорами для нервюр являются обшивка и стенки лонжеронов. При расчете нервюры прежде всего определяются нагрузки: сосредоточенные реакции других агрегатов и аэродинамические нагрузки (по эпюрам давления, полученным из продувок профилей в аэродинамических трубах) для значений коэффициента подъемной силы сечения, определенных по формуле (15.2). Далее определяются опорные реакции (рис. 15.3) из условия равновесия нервюры. Наконец, производится расчет самой нервюры в зависимости от ее конструкции: как балки, фермы или плоской рамы. Примеры расчетов нервюр различного типа при действии различных видов нагрузки приведены в [16, 43 и 49].

Нагрузки на элероны, закрылки и щитки определяются по материалам продувок в аэродинамических трубах, или приближенно (см. [16]). Элероны и закрылки рассматриваются как балки, причем изгибающий момент обычно воспринимается одним лонжероном, а крутящий — контуром, образованным обшивкой носовой части элерона или закрылка и стенкой лонжерона. При определении изгибающего момента учитывается реакция тяги управления. Если число опор элерона или закрылка больше двух, задача становится статически неопределимой (см. § 15.3). Щитки обычно не имеют замкнутого контура, способного передать крутящий момент. Они крепятся к крылу с помощью шомпольного соединения. Аэродинамическая нагрузка с обшивки передается на нервюры. Нервюры рассматриваются как двухопорные балки, работающие на изгиб.

Опорами для нервюры служат шомпольное соединение и лонжерон щитка. Лонжерон, таким образом, нагружается поперечной нагрузкой от нервюр и работает на изгиб. Опорами для лонжерона являются тяги управления щитком. Подробнее с расчетом элеронов, закрылков и щитков, не являющихся типичными для вертолетов агрегатами, можно познакомиться по книгам, посвященным расчету на прочность самолетов [16, 43, 49].

§ 15.3. РАСЧЕТ ОПЕРЕНИЯ

На горизонтальное оперение (ГО) действует подъемная сила, состоящая из двух слагаемых: уравновешивающей и дополнительной сил. Уравновешивающая сила служит для балансировки вертолета на заданном установившемся режиме полета. Она определяется из расчета балансировки вертолета. Дополнительная нагрузка возникает при маневре или при попадании в болтанку. В первом случае она зависит от интенсивности маневра и определяется при расчете маневра, предусмотренного случаями III-л и IV-л норм прочности. Дополнительная нагрузка при полете в болтанку может быть определена в соответствии с нормами прочности по приближенной формуле (13.13), если в нее подставить площадь горизонтального оперения. Использование этой приближенной формулы оправдано тем, что факторы, усложняющие явление увеличения подъемной силы крыла или несущего винта при попадании в восходящий поток, перечисленные в § 13.2, для малых по площади оперений имеют существенно меньшее значение.

Для вертикального оперения (ВО) вертолета без рулевого винта определяющим является расчетный случай VI-л. Нагрузка определяется по формуле (13.13). Для вертолета с рулевым винтом или отклоняемым рулем направления определяющим может быть также дополнительный расчетный случай [27], предусматривающий дачу педалей при полете на максимальной скорости.

Так как интерференция рулевого винта и оперения является значительной, то нагрузку на ВО с рулевым винтом предпочтительнее находить по материалам продувок. Приближенно можно использовать формулу (13.13) для расчета нагрузки на ВО и формулу (13.12) для определения приращения угла атаки рулевого винта, необходимого для расчета его силы тяги.

При построении эпюр изгибающих и крутящего моментов и перерезывающих сил можно принять, что аэродинамическая нагрузка распределения по размаху ГО и высоте ВО пропорциональна хордам сечений, т. е. в соответствии с формулой (15.1). Следует учесть инерционные нагрузки (см. § 13.1) и реакции рулевого винта. При двухкилевом оперении с килями (шайбами), расположенными по концам стабилизатора, изгибающий момент M_x стабилизатора определяется с учетом нагрузки на шайбы, передающейся на стабилизатор в виде момента M_x

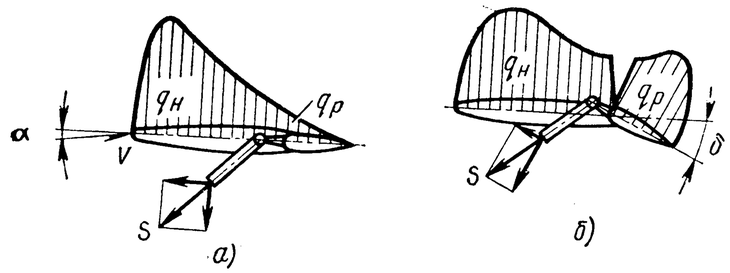


Рис. 15.4. Эпюры распределения аэродинамической нагрузки по хорде оперения при неотклоненном (*а*) и отклоненном (*б*) руле

и растягивающей (сжимающей) силы, которой можно пренебречь. Аналогично, при расположении стабилизатора в верхней части киля изгибающий момент на киле следует определять с учетом нагрузки на стабилизатор.

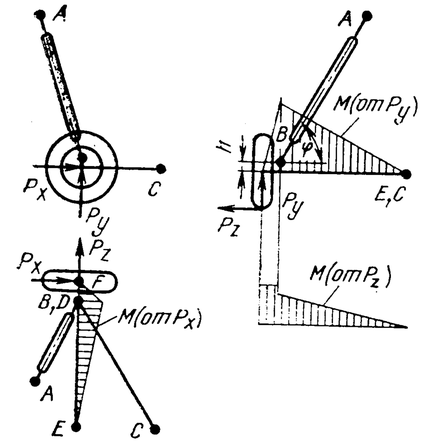
Расчет напряжений в элементах профильного набора вертикального и горизонтально оперения без рулей ничем не отличается от соответствующего расчета для крыла (см. § 15.2). Если оперение имеет руль, то прежде всего необходимо установить долю погонной аэродинамической нагрузки, приходящуюся в каждом сечении на неподвижную часть $q_н$ (стабилизатор, киль) и на руль $q_р$. Это осуществляется по эпюрам распределения давления по хорде (рис. 15.4), полученным при испытаниях в аэродинамических трубах профилей с отклоненными рулями. Далее приступают к расчету руля.

Вначале на основе эпюр распределения давления по хорде определяют момент относительно оси, проходящей через узлы подвески руля. Этот момент уравновешивается осевой силой S, действующей в тяге управления рулем. Из этого условия определяется ее величина. Составляющая силы S, перпендикулярная хорде руля (см. рис. 15.4), должна быть учтена при построении эпюры изгибающего момента M_z. Если руль крепится к неподвижной части с помощью двух узлов, то его можно рассматривать как двухопорную балку и определить реакции в опорах. Если число опор руля (узлов его крепления) больше двух, то задача является статически неопределимой. Приближенно ее решают, используя метод сопротивления материалов для многоопорных балок. Однако в действительности опорные реакции будут заметно отличаться от найденных таким способом, так как опоры руля не являются абсолютно неподвижными. Они смещаются при изгибе и кручении стабилизатора или киля. Поэтому более точные результаты получаются при расчете статически неопределимой системы руль—стабилизатор или руль—киль. Основную систему получают, отбрасывая лишние опоры. Реакции в отброшенных опорах определяют из условий совместности перемещений частей опор, принадлежащих рулю и стабилизатору (или килю) с учетом изгиба и кручения обеих частей оперения. Пример для киля с тремя опорами приведен в [16, 43].

По аэродинамическим и инерционным нагрузкам и реакциям в опорах можно построить эпюры перерезывающей силы, изгибающего и крутящего моментов (отдельно для руля и неподвижной части оперения). Определение напряжений в лонжеронах, обшивке и нервюрах выполняется теми же методами, что и для крыла.

§ 15.4. РАСЧЕТ ШАССИ

Прочность шасси проверяется на нагрузки случаев I-п, II-п, III-п и VI-п. Нагрузки на опоры шасси определяются, как указано в § 13.3 и 13.4. Порядок дальнейшего расчета зависит от конкретной конструктивной схемы шасси, которые достаточно разнообразны. Как правило, можно выделить элемент, работающий (как балка) на изгиб, и ряд элементов — стержней, работающих только на растяжение и сжатие, так как узлы крепления стержней к балке, а также балки и стержней к фюзеляжу или крылу можно считать шаровыми шарнирами.



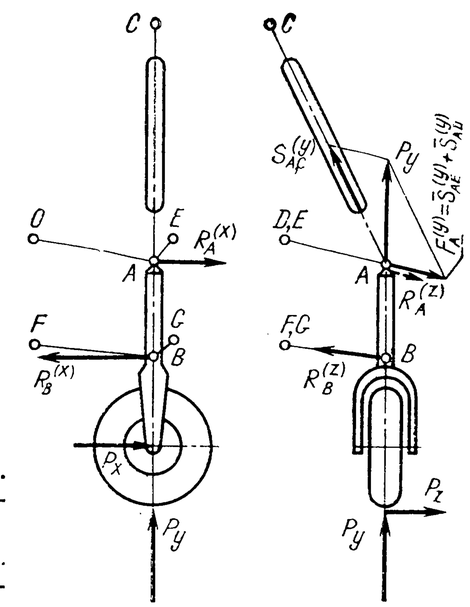


Рис. 15.5. Основная опора вертолета. Нагрузки и эпюры изгибающих моментов

Рис. 15.6. Основная опора вертолета. Нагрузки и эпюры изгибающих моментов. Определение усилий в стержнях

Рассмотрим шасси типа, показанного на рис. 15.5. Осевые силы в стержнях AB и CD можно найти, составив уравнения моментов относительно осей, проходящих, соответственно, через узлы E и A, E и C. При действии силы P_y усилие в стержне CD практически равно нулю. Балка EF нагружена изгибающим моментом. Скачок в эпюре (см. рис. 15.5) около узла B объясняется выносом узла с оси балки. Компонент осевой силы S_{AB}, направленный вдоль оси балки, создает момент $\Delta M = hS_{AB}\cos\varphi$, угол φ и плечо h показаны на рис. 15.5.

От силы P_x усилие в стержне AB близко к нулю. На балку действует изгибающий момент в плоскости xOz. Сила P_z вызывает в основном нагрузки в балке EF: осевую силу, существенного значения не имеющую, и изгибающий момент. В стержне AB возникает осевая сила.

Другой вариант основных опор показан на рис. 15.6. Здесь как балка работает стойка AB. Остальные стержни работают на растяжение — сжатие. От силы P_y осевые усилия возникают в стержнях AC, AD и AE. Величину этих усилий можно найти, разложив силу P_y на две составляющие по осям стержней AC (S_{AC}), AD и AE (S_{AD} и S_{AE}). Сила P_x вызывает изгиб стойки AB. Усилия в стержнях BF и BG можно найти из уравнения моментов относительно точки A. Решение этого уравнения дает силу, лежащую в плоскости FBG, приложенную к стойке в узле B $\left(\vec{R}_B^{(x)}\right)$. Сила $\vec{R}_A^{(x)}$ определяется из уравнения равновесия стойки AB: $\vec{R}_A^{(x)} = \overline{P}^{(x)} - \vec{R}_B^{(x)}$ или из уравнения моментов относительно точки B. Силы $\vec{R}_A^{(x)}$ и $\vec{R}_B^{(x)}$ следует разложить по направлениям стержней, входящих соответственно в узлы A и B, что дает усилия в стержнях AD, AE, AC, BF и BG. Сила P_z вызывает изгиб балки AB. Усилия в стержнях BF и BG определяются из

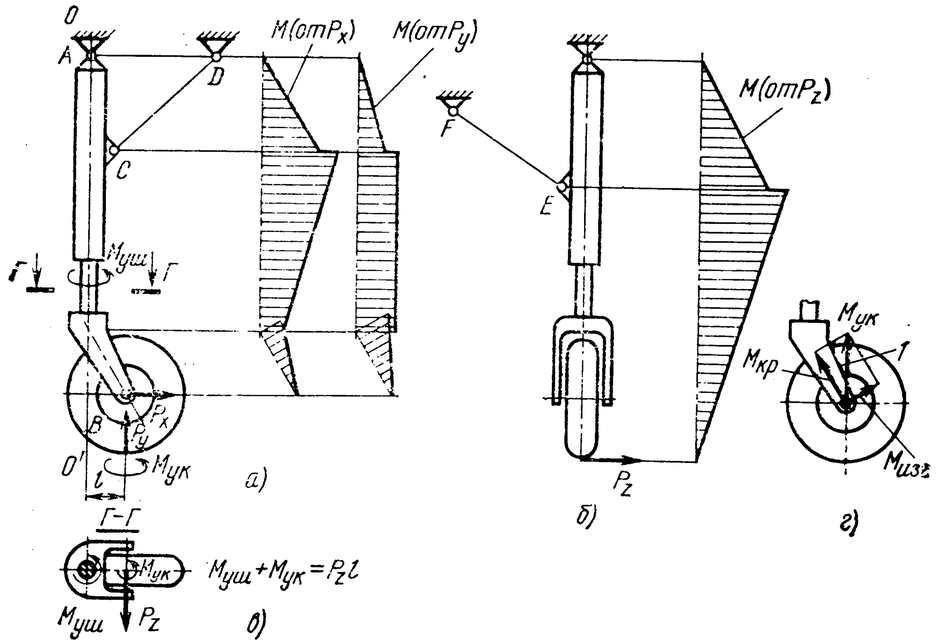


Рис. 15.7. Носовая стойка шасси. Нагрузки и эпюры изгибающих моментов:
1 — вилка

уравнения моментов относительно точки A с последующим разложением силы, обратной реакции в точке B $(R_B^{(z)})$ по направлениям стержней BF и BG. Силы в стержнях AC, AD и AE можно найти, разложив по направлениям этих стержней силу $\vec{R}_A^{(z)}$.

В передних опорах (рис. 15.7) балкой является стойка AB. Усилия в стержнях CD и EF определяются из уравнений моментов относительно осей AF и AD. Эпюры изгибающих моментов по стойке (от сил P_x и P_z) показаны на рис. 15.7, *а* и *б*. Создаваемый силой P_z момент относительно оси OO' стойки, равный $M_y = P_z l$, уравновешивается моментами трения колеса о грунт $M_{y\,к} \approx 0{,}8\, M_y$ и штока в амортизационной стойке $M_{y\,ш} \approx 0{,}2\, M_y$ (см. рис. 15.7, *в*). Момент $M_{y\,к}$ вызывает изгиб и кручение вилки *1* колеса (см. рис. 15.7, *г*). Этот момент на эпюре рис. 15.7, *б* не показан.

При составлении уравнений сил и моментов в расчетах шасси геометрические размеры и углы необходимо определять с учетом обжатия амортизационной стойки. Расчеты удобно выполнять, определяя вначале силы в стержнях $(S^{(x)}, S^{(y)}, S^{(z)})$ и моменты в балках $(M^{(x)}, M^{(y)}, M^{(z)})$ от каждого компонента P_x, P_y и P_z в отдельности. При этом полагают их равными 1000 Н. Далее для рассматриваемого расчетного случая можно определить силу в любом стержне или момент в сечении балки по формулам

$$S = \frac{P_x}{1000} S^{(x)} + \frac{P_y}{1000} S^{(y)} + \frac{P_z}{1000} S^{(z)};$$

$$M = \frac{P_x}{1000} M^{(x)} + \frac{P_y}{1000} M^{(y)} + \frac{P_z}{1000} M^{(z)}.$$

Дальнейший расчет состоит в определении напряжений в наибо-

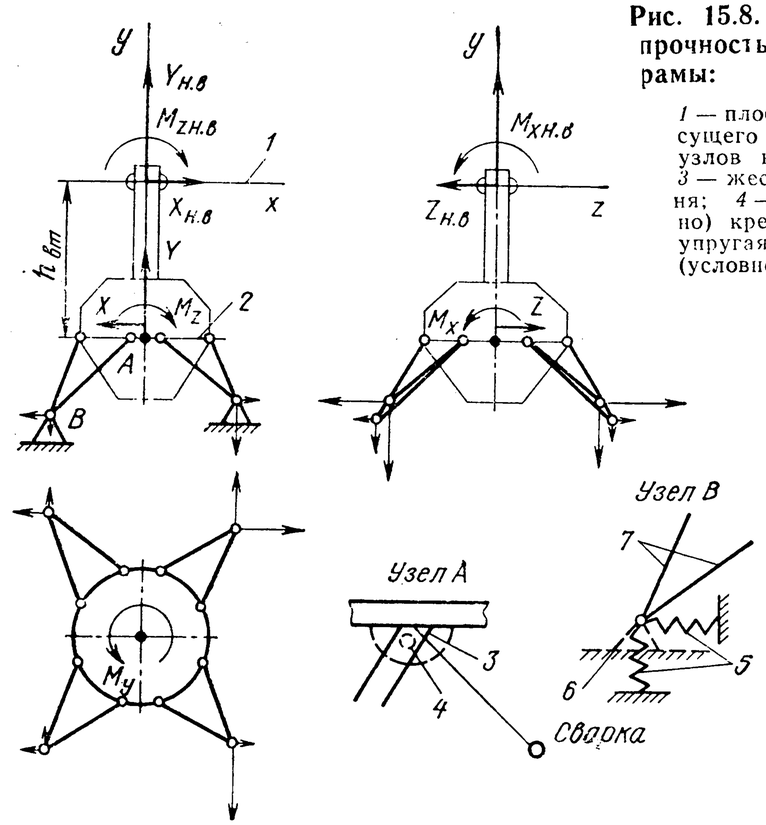


Рис. 15.8. К расчету на прочность подредукторной рамы:

1 — плоскость вращения несущего винта; *2* — плоскость узлов крепления стержней; *3* — жесткая заделка стержня; *4* — шарнирное (условно) крепление стержня; *5* — упругая опора; *6* — жесткая (условно) опора; *7*—стержни

лее нагруженных сечениях балки, в сечениях стержней и в узлах по обычным формулам сопротивления материалов. Сжатые стержни необходимо, кроме того, проверить на общую устойчивость по формуле Эйлера.

§ 15.5. РАСЧЕТ ПОДРЕДУКТОРНОЙ РАМЫ, СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И ДРУГИХ АГРЕГАТОВ

Подредукторная рама. Расчет подредукторной рамы состоит в определении усилий и напряжений в стержнях и в узлах крепления стержней к редуктору и к фюзеляжу. Основным расчетным случаем для рамы являются обычно случай III-л. Могут быть определяющими для прочности некоторых стержней случаи III-п и IV-п.

Для каждого из случаев определяются три компонента силы и три компонента момента (рис. 15.8) относительно точки пересечения оси винта с плоскостью узлов крепления редуктора:

$$X = X_{н.в} + F_{x\,ин};$$

$$Y = Y_{н.в} + F_{y\,ин};$$

$$Z = Z_{н.в} + F_{z\,ин};$$

$$M_x = Z_{н.в}\, h_{вт} + M_{x\,н.в} + M_{x\,ин};$$

$$M_y = M_{y\,н.в} + M_{y\,ин};$$

$$M_z = X_{н.в}\, h_{вт} + M_{z\,н.в} + M_{z\,ин},$$

где $h_{вт}$ — расстояние от плоскости втулки до плоскости узлов крепления стержней к редуктору.

Компоненты аэродинамической силы и момента ($X_{н.в}$, $Y_{н.в}$, $Z_{н.в}$, $M_{x\,н.в}$, $M_{y\,н.в}$, $M_{z\,н.в}$), передающиеся от несущего винта, и компоненты инерционной силы и момента ($F_{x\,ин}$, $F_{y\,ин}$, $F_{z\,ин}$, $M_{x\,ин}$, $M_{y\,ин}$, $M_{z\,ин}$) определяются, как было указано в гл. 13. При этом учитывается масса лопастей винта, которая считается сосредоточенной в центре втулки.

Обычно подредукторная рама состоит из восьми стержней. Для упрощения при определении усилий в стержнях все узлы крепления стержней к редуктору или к кольцу рамы и шпангоутам можно считать шаровыми шарнирами (узел *A* на рис. 15.8). При этом стержни работают только на осевые силы. Поэтому система является дважды статически неопределимой. Расчет производится обычными методами строительной механики [35]. Такой подход является не вполне точным, так как узлы крепления стержней редукторной рамы к фюзеляжу нельзя считать абсолютно неподвижными (узел *B* на рис. 15.8). В действительности они крепятся к упругим шпангоутам и могут, следовательно, перемещаться при действии нагрузки вследствие деформаций шпангоутов. Корпус редуктора также не является абсолютно жестким. Однако практически этими факторами пренебрегают.

Системы управления. Большие однократные нагрузки являются определяющими для прочности третьего участка (см. § 9.1) системы управления несущим и рулевым винтами, участков между бустерами и механизмами общего и дифференциального шага соосных вертолетов или механизмом управления штоком рулевого винта одновинтовых вертолетов, а также для систем управления двигателями, рулями и других, вспомогательных систем.

Нагрузки в третьем участке системы управления вызываются летчиком. При нормальной работе системы управления эти нагрузки, как правило, невелики, так как они направлены на преодоление трения в системе управления и противодействие пружинам или другим устройствам, служащим для создания на ручке усилий, обеспечивающих нормальное управление вертолетом. Расчетным является случай, когда в каком-то звене системы управления произошло заклинивание. При этом, пытаясь управлять вертолетом, летчик может приложить к ручке циклического управления, рукоятке «Шаг—Газ» или педалям значительно бо́льшие усилия.

Для вертолетов с двумя винтами некоторые звенья нагружаются при приложении усилий к различным органам управления. Для них надо рассмотреть случай комбинированного приложения усилий к ручке управления, рычагу общего шага и педалям. Величины усилий летчика в случаях раздельного и комбинированного воздействия заданы в нормах прочности [27]. Для вертолетов с двойным управлением требуется рассмотрение случая приложения усилий совместно обоими летчиками.

На участках между бустерами и механизмами общего и дифференциального шага соосных вертолетов и механизмом управления штоком рулевого винта в качестве расчетных принимаются нагрузки, соответствующие максимальной силе бустера. Это обеспечивает прочность соответствующего участка в случае заклинивания механизма.

По заданным таким образом величинам усилий, создаваемых летчиком или бустером, нетрудно найти силы или моменты в отдельных деталях рассчитываемой системы управления и по формулам сопротивления материалов соответствующие им напряжения. Полученные таким образом напряжения следует сравнить с пределом прочности или с критическими напряжениями потери устойчивости. Оценку прочности проушин при действии больших однократных нагрузок следует вести по предельной несущей способности. Для этого используются результаты статических испытаний типовых проушин, обобщенные, например, в [16].

Другие агрегаты. Из остальных агрегатов на действие однократных нагрузок рассчитываются втулки несущих и рулевых винтов, подмоторные рамы, сидения экипажа и пассажиров, узлы крепления различных сосредоточенных грузов (двигателей, оборудования и т. п.). Расчетным является случай III-л, для узлов крепления также случаи IV-л, I-п и II-п, для сидений — случай VII-п, для втулки — случай II-з. Расчеты втулки выполняются, как указано в гл. 10, а остальных агрегатов — методами строительной механики и сопротивления материалов. Величины напряжений сравниваются с пределом прочности или критическим напряжением потери устойчивости. Более подробные сведения о расчете крыльев, оперения и шасси можно почерпнуть в книгах [16, 28, 35, 43 и 49].

глава 16 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРОЧНОСТИ

§ 16.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ЭКСПЕРИМЕНТА. МЕТОДЫ ЕГО ПРОВЕДЕНИЯ

Экспериментальные исследования являются неотъемлемой частью общего комплекса работ по прочности. Они дополняют теоретические исследования, служат основой для их корректировки и дальнейшего развития, позволяют сделать выводы по улучшению конструкции, а также являются основным способом подтверждения соответствия конструкции требованиям НЛГ [27] по прочности. Во многих случаях эксперимент, взятый в отдельности, не позволяет получить ответ без привлечения других методов. Он является лишь одним из составных элементов системы обеспечения прочности. Планируя эксперимент, разрабатывая программу и методику испытаний и обработки материалов, всегда необходимо учитывать связи между данным экспериментом и другими составными частями комплекса так, чтобы обеспечить их совместное эффективное применение. Только комплексный, системный подход, основанный на совместном использовании всех видов исследований в их взаимной связи, может обеспечить получение правильного технического решения.

Так, например, сравнение нагрузок, определенных расчетом и экспериментально в полете, позволяет оценить достоверность расчетных методов, выявить условия, при которых они дают достаточно надежные данные или, наоборот, данные, не совпадающие с экспериментом. В последнем случае выявляется необходимость уточнения расчетных данных, дальнейших теоретических исследований. Сравнивая измеренные в полете нагрузки с приложенными к конструкции при лабораторных испытаниях (статических, усталостных и др.), можно убедиться в правильности задания нагрузок или скорректировать их. С другой стороны, измерения в полете могут быть правильно поставлены и проведены только на основе предварительных расчетов и стендовых испытаний.

Экспериментальные исследования могут проводиться по различным направлениям и преследовать различные цели, что определяется специфическими особенностями вертолета как аэромеханической системы, общими методами обеспечения прочности и конкретным состоянием работ по созданию и обеспечению эксплуатации вертолетов данного типа.

Существуют различные виды испытаний, отличающихся задачами, а следовательно, и методами проведения. Это прежде всего

испытания конструкции под действием заданных нагрузок, определение нагруженности, проверка запасов до автоколебаний, исследования вибрации фюзеляжа, определение динамических характеристик конструкции, рассматриваемые в этой главе.

Наряду с указанными, можно отметить и другие виды испытаний — по определению прочностных характеристик материалов, по определению распределения напряжений при помощи различных моделей из оптически активного материала, испытания по определению температурных полей, ресурсные наземные и летные испытания, испытания в условиях реальной эксплуатации.

Первые два вида являются общими для машиностроения. С их методикой можно познакомиться в [46]. Испытания по определению температурных полей (для прочностных целей) составляют относительно малую часть всего объема испытаний и поэтому в данной книге не рассматриваются. Ресурсные испытания состоят в продолжительной работе вертолета на заданных режимах с контролем его состояния. Они позволяют выявить грубые ошибки при проектировании. Однако наработка даже несколькими вертолетами заданного времени отнюдь не гарантирует отсутствие недопустимых явлений на других вертолетах этого типа. Широкие эксплуатационные исследования позволяют получать важные сведения о нагруженности, об изменении прочностных характеристик и износе в условиях реальной эксплуатации. Результаты таких исследований имеют значение не только для вертолетов данного типа, но могут быть обобщены на создаваемые вновь вертолеты.

Все виды испытаний производятся в периоды проектирования, испытаний и доводки опытного вертолета и для контроля за качеством серийной продукции, а также с целью изучения новых явлений, для уточнения существующих теоретических методов и их проверки, наконец, для исследований перспективных вопросов. По каждому из направлений могут производиться испытания с различными целями: для получения данных, необходимых при проектировании нового объекта, для проверки и уточнения методов расчета, для выбора наилучшего конструктивного варианта или наилучшего варианта выполнения маневра, для обеспечения безопасности испытаний опытного экземпляра, для получения свидетельства о прочности, для установления допустимых в эксплуатации режимов и летных ограничений. Так, в частности, выполняемые при летных испытаниях опытного экземпляра вертолета измерения позволяют своевременно обнаружить слабые места в конструкции и приостановить испытания, не допустив разрушения в полете. По материалам измерений нагрузок в полете и испытаний конструкций при заданных нагрузках может быть принято решение об изменении установленного ранее ресурса или о пересмотре ограничений [8] по режимам полета, указанным в инструкциях по пилотированию. Испытания для получения свидетельства о прочности являются наиболее ответственными, так как ошибка при их проведении может привести в дальнейшем к авариям и другим недопустимым последствиям при эксплуатации вертолета.

Испытания выполняются различными способами: без вращения винтов на специальных стендах в лаборатории, на стендах с вращением — специальных башнях (для испытаний лопастей) или нелетающих вертолетах (испытания рулевых винтов, трансмиссии), в аэродинамических трубах, в полете и на земле на натурных вертолетах. В зависимости от конкретного содержания могут быть испытания вертолета в целом, отдельных агрегатов, узлов или элементов конструкции. Различные способы отличаются по своим возможностям. Остановимся на двух из способов. Ценность летных испытаний состоит в том, что все явления протекают в натуре без искажений, связанных с нарушением подобия, со схематизацией конструкции, способов приложения нагрузки и др. Возможно создание вертолетов — летающих лабораторий для исследования новых типов конструкций, ранее не изученных явлений. Недостатком является в ряде случаев повышенная опасность испытаний. Параметры, определяющие режим полета, связаны уравнениями движения вертолета. Поэтому их нельзя варьировать в широких пределах. При изменении одного из параметров обычно изменяются и другие, поэтому затруднены однопараметрические исследования. Испытания с помощью моделей позволяют выполнять опережающие, перспективные изыскания. Они целесообразны также для изучения особенностей агрегатов принципиально новых схем и для выявления влияния отдельных факторов. Однако создание моделей является достаточно сложным, трудоемким и дорогостоящим. В известных случаях необходимо создание конструктивно подобных моделей, для которых указанные недостатки особенно существенны. Проще так называемые отсечные модели, состоящие из монолитных отсеков, соединенных упруго. Одной из основных трудностей является обеспечение подобия по силам трения. Исследования в аэродинамических трубах затруднены при малых скоростях потока и на маневрах.

Эксперимент над сложной динамической системой может решать различные задачи, в число которых входит определение внешних воздействий (см. § 16.3), определение поведения системы, протекающих в ней процессов в заданных условиях или при заданном воздействии (см. § 16.2, 16.4, 16.5), определение основных параметров, определяющих протекание процессов в системе (см. § 16.6), нахождение математической модели системы и др. В сравнении с теоретическими методами вторая задача аналогична нахождению решения системы уравнений, третья — их анализу, а четвертая — составлению уравнений, определению их структуры и коэффициентов. Последняя по счету, но не по существу, задача называется задачей идентификации. Если задача идентификации данной системы решена, то появляются возможности изучения на ЭЦВМ процессов в системе (математическое моделирование) при различных внешних воздействиях и условиях, что позволяет значительно сократить затраты на эксперимент. Повышается надежность прогнозирования, что особенно важно при изучении таких опасных явлений, как флаттер или земной резонанс. Становится возможным сравнение

теоретических значений коэффициентов уравнений с найденными в результате идентификации, что позволяет уточнить методы расчета. Наконец, могут быть выработаны конкретные рекомендации по улучшению конструкции (например, по изменению частотных характеристик в благоприятную сторону путем размещения добавочных масс или жесткостей). При этом возникают различные трудности, вызванные как случайными наложениями на результаты эксперимента, так и незавершенностью до настоящего времени теории идентификации.

Теоретической основой методов экспериментальных исследований служат математическая статистика, теория подобия, метрология. Некоторые сведения изложены в гл. 17, там же указаны источники для углубленного изучения.

Для успешного проведения экспериментальных исследований необходимо правильно выбрать методику эксперимента, измерительные средства и методы анализа результатов. Методика эксперимента определяется физическими особенностями изучаемого явления, известными из теории и ранее проведенных экспериментов, с учетом цели испытаний и других упомянутых факторов.

Измерительные средства должны обеспечивать получение качественной информации в достаточном для правильных выводов объеме и в такой форме, чтобы ее можно было практически обработать и проанализировать. Наконец, методы анализа должны не только соответствовать цели испытаний, но и учитывать особенности измерительных средств и измеряемых параметров. Должны быть обеспечены точность, необходимая для получения достоверного ответа в соответствии с целью испытаний, и средства контроля за ее соблюдением. Следует изыскивать возможности для сопоставления данных, полученных различными способами. В случаях, предусмотренных в НЛГ, должно быть обеспечено соответствие требованиям норм.

Наиболее полные сведения из эксперимента можно получить при комплексном применении различных методов измерения — тензометрии, виброметрии, измерении перемещений, давлений, параметров, определяющих режим испытаний, и других физических величин. Практически при всех испытаниях главным видом измерений является тензометрия — измерение относительных деформаций с помощью электрических датчиков сопротивления (тензорезисторов), а главным методом анализа — анализ на основе методов математической статистики. Первое определяется самим характером задачи, а второе — наличием в исследуемых процессах и параметрах значительных по величине случайных составляющих. Поэтому ниже кроме краткого описания особенностей отдельных видов испытаний излагаются некоторые основные понятия по тензометрии (см. § 17.2 и 17.3) и применению методов математической статистики к обработке результатов прочностных испытаний (см. § 17.4—17.7).

В последнее время широкое развитие получают методы управления экспериментом, позволяющие ведущему инженеру на основании ставших известными в процессе испытаний результатов активно

вмешиваться в ход испытаний, оперативно выбирать наиболее целесообразное дальнейшее направление, своевременно (во избежание возникновения недопустимых, аварийных ситуаций) приостановить их. Для обеспечения управления получают развитие соответствующие средства, а также методы обработки данных в реальном времени, т. е. без заметного запаздывания относительно исследуемого процесса. Для своевременного и правильного принятия решения должна быть создана система программного математического обеспечения для ЭЦВМ, входящей в систему управления, позволяющая анализировать результаты эксперимента, оценивать их по определенным его задачей критериям и т. д. Краткое представление о такой системе можно получить из § 16.2, 16.6, 17.2. Практически все виды испытаний в той или иной мере могут быть опасными для лиц, их проводящих, и материальной части. Поэтому всегда должны быть разработаны и приняты строгие меры предосторожности. Представление о них для одного из видов эксперимента даны в § 16.5.

§ 16.2. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЗАДАННЫХ НАГРУЗОК

Методы проверки прочности конструкции под действием нагрузок известной величины включают в себя три основных вида испытаний: усталостные, статические и копровые. Общими чертами этих испытаний являются заданные условия нагружения, одинаковый основной критерий — разрушение конструкции и необходимость в дополнительном оборудовании для создания нагрузок и управления ими.

Цель усталостных испытаний — определение долговечности конструкции под действием переменных нагрузок для последующего установления ресурса (см. гл. 1) и для контроля качества серийной продукции. Испытаниям обязательно подвергаются лопасти несущего и рулевого винтов, системы управления, втулка и подредукторная рама, а в ряде случаев и другие агрегаты (оперение, крыло, фюзеляж). Вследствие большой сложности проведения испытаний и значительной стоимости испытываемых конструкций часто испытываются не агрегаты в целом, а отдельные их отсеки или элементы: отсеки лопастей (как правило, типовой отсек и комлевой участок), узлы подредукторной рамы, рукава втулки и т. д. Усталостные испытания выполняются также в процессе проектирования вертолета для выбора наилучшего по характеристикам выносливости варианта конструкции.

Испытания выполняются на стендах двух типов: резонансных (рис. 16.1) и с силовозбуждением. В первом случае заданные нагрузки создаются с помощью инерционного вибратора (рис. 16.2), установленного на испытываемом объекте, например, на отсеке лопасти. Частота вибратора выбирается так, чтобы она была лишь немного меньше одной из собственных частот испытываемого объекта. Это дает возможность создать нагрузки необходимой величины с помощью относительно небольшого вибратора. Во втором случае (рис. 16.3) нагрузки создаются эксцентриковыми механическими или электрогидравлическими силовозбудителями (см. рис. 16.2). Обычно кроме переменных нагрузок предусматривается приложение и статической подгрузки. Одной из основных трудностей является создание напряженного состояния, подобного напряженному состоянию в натуре. Обычно это удается не полностью. Участки конструкции, в которых напряженное состояние не подобно натурному (например, расположенные вблизи мест ее крепления к стенду), считаются незачетными по отношению к результатам испытаний. В ходе испытаний, очевидно, необходимо с большой точностью измерять силы (моменты) или напряжения, создаваемые в испытываемых образцах. Для этой цели используются тензоизмерения (см. § 17.2) и приборы-динамометры (механические и электрические). Часто регистрируют также скорость роста усталостных трещин, что позволяет обоснованно установить периодичность осмотров конструкции в эксплуатации, улучшать конструкцию в направлении повышения ее живучести.

Если внешние нагрузки прикладываются в ряде точек конструкции (например, при испытаниях автомата перекоса), для управления силовозбудителями в целях выдерживания определенных согласованных по времени законов изменения нагрузок применяются сложные управляющие системы. Они включают в себя электрические устройства управления, иногда ЭВМ, и устройства обратной связи с конструкцией, реагирующие на ее напряженное состояние.

Особенностью усталостных испытаний является необходимость повторений их для многих однотипных объектов, что объясняется существенным случайным разбросом характеристик долговечности (см. гл. 1). Вследствие этого разброса основным методом анализа является статистический. Только на основе применения методов математической статистики могут быть получены правильные выводы.

Статистические испытания имеют своей целью оценку прочности при действии больших однократных нагрузок. Сравнение результатов испытаний агрегатов опытного вертолета с расчетными нагрузками, задаваемыми нормами прочности (см. § 13.5), позволяет

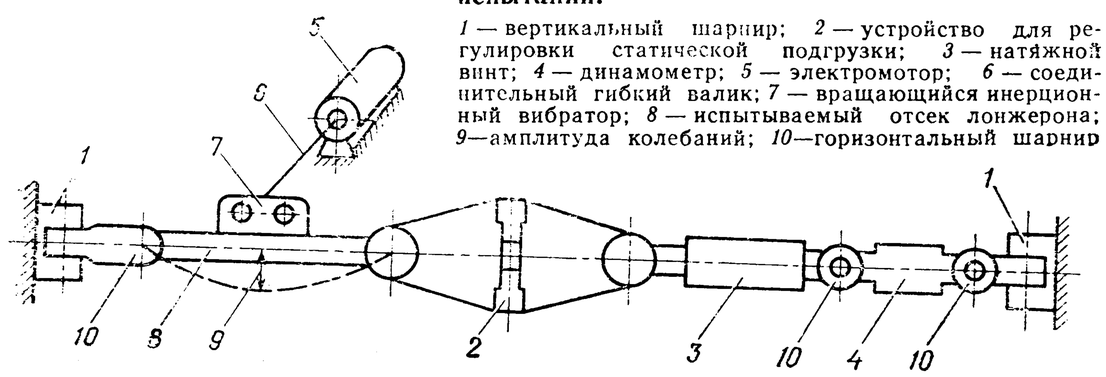


Рис. 16.1. Резонансный стенд для усталостных испытаний:

1 — вертикальный шарнир; *2* — устройство для регулировки статической подгрузки; *3* — натяжной винт; *4* — динамометр; *5* — электромотор; *6* — соединительный гибкий валик; *7* — вращающийся инерционный вибратор; *8* — испытываемый отсек лонжерона; *9*—амплитуда колебаний; *10*—горизонтальный шарнир

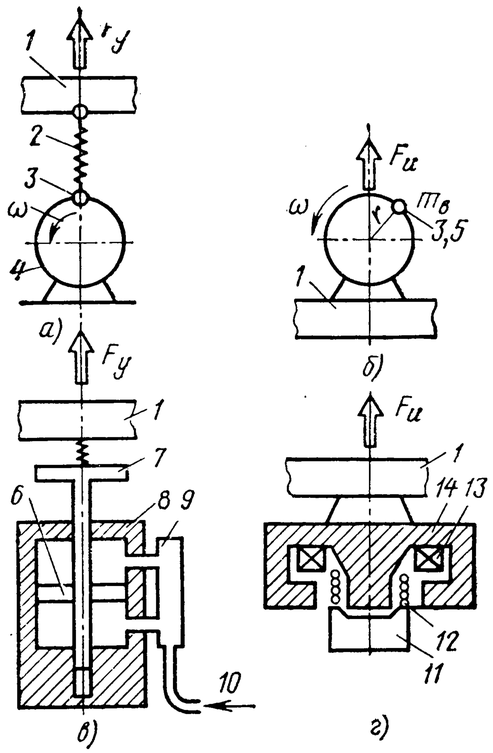


Рис. 16.2. Силовозбудители (вибраторы):

а — вращающийся эксцентриковый; *б* — вращающийся инерционный; *в* — электрогидравлический; *г* — электродинамический; *1* — испытываемая конструкция; *2* — упругий элемент; *3* — эксцентрик; *4* — электродвигатель; *5* — несбалансированная масса; *6* — поршень; *7* — толкатель; *8* — цилиндр; *9* — золотниковое устройство; *10* — от гидросистемы; *11* — масса; *12* и *13* — электромагниты; *14* — корпус

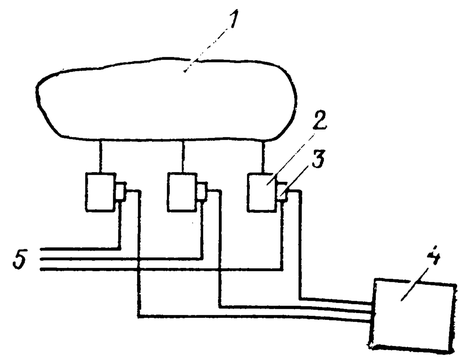
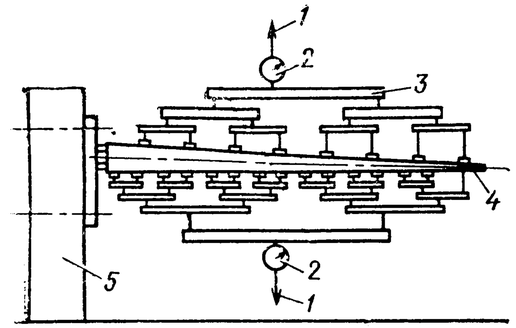


Рис. 16.3. Стенд для усталостных испытаний:

1 — испытываемая конструкция; *2* — гидравлический силовозбудитель; *3* — золотниковое устройство; *4* — система управления; *5* — к гидросистеме

убедиться в достаточной прочности или внести соответствующие коррективы. При этом испытывают агрегаты в целом: фюзеляж с подредукторной рамой и шасси, крыло, оперение, системы управления. Такие же испытания, но по упрощенной программе, применяются для контроля за качеством серийной продукции. Статические испытания производятся и на стадии проектирования вертолета. При этом испытывают обычно отдельные элементы: панели, узлы, отсеки. Эти испытания позволяют уточнять расчеты и улучшать конструкцию в процессе ее создания. Получила распространение экспериментальная доводка конструкции. Элементы, напряженное состояние которых недостаточно надежно выявляется расчетом, делают вначале заведомо недостаточно прочными, а затем в процессе статических испытаний усиливают до необходимых пределов. Такой подход позволяет экономить массу конструкции.

При испытаниях к конструкции прикладывают силы заданной величины, для чего применяют электромеханические или гидравлические силовозбудители. Для лучшего воспроизведения распределения нагрузки по испытываемому объекту может быть использована промежуточная распределительная рычажная система (рис. 16.4), спроектированная в соответствии с расчетным случаем, на который ведутся испытания. Более совершенной является система нагружения с большим числом (100—200) непосредственно воздействующих на объект силовозбудителей, управляемых специальной системой автоматического управления на основе ЭВМ. Она является универ-



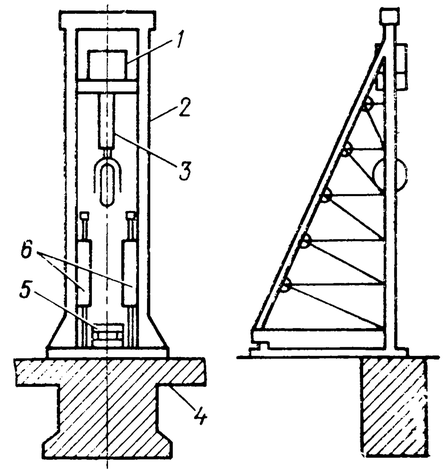


Рис. 16.4. Рычажная система:

1 — от силовозбудителя; *2* — динамометр; *3* — рычажная система; *4* — испытываемая конструкция; *5* — колонна для крепления испытываемой конструкции

Рис. 16.5. Копер для испытаний шасси:

1 — подвижная тележка с дополнительной массой; *2* — станина; *3* — испытываемая стойка шасси; *4* — фундамент; *5* — опорная плита; *6* — устройство для учета разгрузки подъемной силой

сальной, позволяет проводить испытания на различные комбинации нагрузок. Нагрузки при испытаниях обычно увеличивают ступенями по 10—15% расчетной нагрузки.

Схема нагружения должна обеспечивать не только возможно более точное воспроизведение аэродинамических и инерционных нагрузок — активных сил, но и реакций — соответствующих граничных условий.

Основным критерием при статических испытаниях является разрушение конструкции. Проверяется также отсутствие относительных перемещений, нарушающих нормальное функционирование агрегатов (см. § В.1) и остаточных деформаций при нагрузке, равной эксплуатационной. Испытания дают и возможность проверить принятые в расчетах гипотезы, сравнить расчетное и экспериментальное распределение напряжений, определить величины изгибной или крутильной жесткости. Поэтому при испытаниях кроме контроля за величиной нагрузок производятся измерения напряжений в различных элементах, а также их перемещений. Данные измерений используются также в системе управления экспериментом.

Копровым испытаниям подвергается шасси. Целью испытаний является оценка прочности шасси при действии повторных нагрузок и определение реальных характеристик амортизационных стоек. Испытания производятся на специальных стендах (рис. 16.5), имеющих вертикальные направляющие, по которым может перемещаться вверх и вниз тяжелый груз. К грузу прикрепляется шасси. Груз поднимается на определенную высоту и сбрасывается. При ударе возникают нагрузки на шасси. Высота сброса определяется таким образом, чтобы при касании колесом пола вертикальная скорость имела величину, соответствующую расчетному посадочному

случаю, на который производятся испытания. Масса груза выбирается равной редуцированной массе (см. § 13.3). В момент касания колесом основания включается специальное устройство *6* (см. рис. 16.5), создающее силу, направленную вверх. Таким образом учитывается разгрузка шасси подъемной силой, создаваемой винтом при посадке. В таких условиях при испытаниях в шасси возникают нагрузки, близкие к реальным. Упрощенно, без упомянутого устройства, подъемную силу учитывают, уменьшая массу груза.

Сбросы повторяются. Общее их число выбирается равным вероятному числу посадок рассматриваемого типа за все время эксплуатации вертолета. Это дает возможность проверить прочность шасси при действии повторных нагрузок. При испытаниях фиксируется отсутствие или наличие разрушений и остаточных деформаций. Измеряются напряжения в элементах конструкции, обжатие пневматика и ход амортизационной стойки. Это дает возможность проверить и в случае необходимости скорректировать расчеты. При проведении этих испытаний необходимо учитывать общие особенности, характерные для испытаний при действии кратковременных импульсивных нагрузок: существенное различие законов изменения деформаций и напряжений в различных местах конструкции, зависимость их от индивидуальных свойств испытываемых конструкций, колебательный характер процессов и их продолжение после прекращения действия внешней нагрузки, необходимость обеспечить регистрацию без больших искажений быстротекущих процессов.

§ 16.3. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАГРУЖЕННОСТИ

Экспериментальное определение нагруженности конструкции выполняется с различными целями: проверки и совершенствования методов расчета нагруженности, изучения особенностей нагружения новых конструкций или на новых, ранее не исследованных режимах, получения исходных материалов, необходимых для заключения по прочности, сравнения различных вариантов конструкции или вариантов выполнения маневра, обеспечения безопасности испытаний опытного вертолета, выявления причин возникновения повышенных нагрузок, уточнения нагружения в условиях реальной эксплуатации и в отдельных случаях для непосредственного суждения о прочности конструкции путем сравнения с допустимой величиной нагруженности.

Исследования нагруженности связаны с теоретическими исследованиями прочности и лабораторными испытаниями (см. § 16.2).

Измерения нагрузок производятся на динамически подобных моделях и вертолетах небольшого размера в аэродинамических трубах, а главным образом в полете [1]. Исследования в полете получили широкое распространение. Они выполняются практически на всех опытных вертолетах, а во многих случаях и на серийных.

Нагруженность конструкции можно характеризовать величиной напряжений или упругих сил и моментов в отдельных сечениях или

величиной внешних нагрузок (аэродинамических, инерционных, реакций других агрегатов, входящих в конструкцию, реакций земли). Вид величины, характеризующей нагруженность, определяется конкретными задачами испытаний, возможностями испытательной и измерительной техники и состоянием расчетно-теоретических методов обеспечения прочности.

Напряжения измеряют главным образом в следующих случаях: если данный конструктивный элемент не проходит лабораторных испытаний на прочность и оценка его прочности выполняется путем сравнения фактических величин напряжений с допустимыми — пределом прочности, пределом текучести, критическим по устойчивости; если нет уверенности, что при лабораторных испытаниях создается правильное напряженное состояние (например, вследствие отличий в приложении нагрузок в натурных условиях и при статических испытаниях); если методика лабораторных испытаний основана на воспроизведении напряженного состояния по измеренным в полете напряжениям; если ранее установлена ограниченная критическая область конструкции и выявлено, что знание напряжений в некоторых ее местах достаточно полно характеризует прочность агрегата в целом.

Измерения внешних нагрузок позволяют лучше понять механизм и особенности нагружения и определяющие его факторы. В определенных случаях можно получить более широкое представление об общем напряженном состоянии объекта. Однако переход от внешних нагрузок к напряженному состоянию с помощью расчетно-теоретических методов или путем лабораторных испытаний не всегда возможен с достаточной степенью точности, что и ограничивает эффективность этого вида измерений. Иногда выполняют раздельные измерения аэродинамических и инерционных нагрузок. Это облегчает выявление основных факторов, влияющих на величины общей нагрузки. Измерения нагрузок, как правило, требуется производить в нескольких местах, так как и аэродинамические и инерционные нагрузки являются распределенными. Это осложняет процесс исследования при измерениях суммарных или аэродинамических нагрузок и, в меньшей степени, при измерениях инерционных нагрузок. Измерительные средства при измерении инерционных нагрузок проще, их легче эксплуатировать, чем средства измерений общих или аэродинамических нагрузок.

Измерения упругих сил или моментов в сечениях позволяют прямо установить нагружение данного сечения. Однако они дают представление об общей картине нагружения, только если выполняются в достаточно большом числе сечений. Во многих случаях для уменьшения объема испытаний, их трудоемкости и затрат времени ограничиваются измерениями в двух-трех характерных сечениях. Измерения упругих сил и моментов имеют, как правило, более высокую точность, но более сложны, чем измерения напряжений.

При проведении летных испытаний измеряют напряжения в лонжероне лопасти несущего винта, в ее обшивке, в обшивке фюзеля-

жа, моменты кручения и шарнирные моменты лопастей, силы в системах управления, моменты и силы в валах несущего и рулевого винтов, в хвостовой балке, осевые силы в стержнях подредукторной рамы, напряжения или изгибающие моменты в лопастях рулевого винта, деталях втулок и др. Измерения аэродинамических нагрузок выполняются реже, в основном на лопастях несущего винта.

Режимы испытаний выбирают в зависимости от цели исследований. В нормах [27] определены режимы, на которых в обязательном порядке производятся измерения в полете при установлении ресурса агрегатов вертолета. Одной из важнейших основ для выбора режимов служат результаты теоретических исследований и расчетов. В дополнение к основным параметрам, определяющим режим (скорость и высота полета, частота вращения винта, угол скольжения и др.), обязательно обращают внимание на взлетную массу и центровку вертолета, так как они тоже существенно влияют на нагруженность.

Для определения напряжений, упругих сил и моментов, а также суммарных внешних нагрузок применяется тензометрия (см. § 17.2 и 17.3).

Измерения аэродинамической нагрузки выполняются дренажным и бездренажным способами. В первом из них на обтекаемой потоком поверхности устанавливают приемники давления, которые трубопроводами (дренажной системой) связывают с датчиками давления. Датчики вырабатывают электрические сигналы, пропорциональные величине давления у отверстия приемника, которые регистрируются с помощью специальной аппаратуры. Этот способ требует вмешательства в конструкцию для проводки дренажной системы и установки датчиков давления. Возможно появление погрешностей, вызванных запаздыванием в передаче давления по трубопроводу. Поэтому он может быть применен при измерениях на крыльях, фюзеляже и только в исключительных случаях — на лопастях. Бездренажный способ основан на применении миниатюрных датчиков давления, наклеиваемых на поверхность лопасти. Датчики преобразуют давление в соответствующие электрические сигналы. Диаметр датчика составляет несколько миллиметров, а высота — менее одного миллиметра, поэтому искажения в обтекании датчиками, наклеенными на лопасть с последующим выравниванием поверхности с помощью дополнительных покрытий, достаточно малы. Связь датчиков с регистрирующей аппаратурой осуществляется с помощью токосъемников (см. § 17.2).

Инерционные нагрузки определяют по ускорениям, измеренным с помощью специальных датчиков, аналогичных по своему устройству вибродатчикам (см. § 16.5). Для измерения реакций смежных агрегатов применяют специальные динамометрические узлы, устанавливаемые дополнительно или взамен обычных узлов крепления агрегата. При невозможности такой установки применяют способ, аналогичный способу измерения упругих сил и моментов в сечениях (см. § 17.3). При измерениях реакций особое внимание должно

быть уделено влиянию люфтов в узлах на показания измерительной аппаратуры.

Очевидно, что при всех видах испытаний должна быть обеспечена регистрация параметров режима: скорости, давления и температуры наружного воздуха, частоты вращения винта, положений органов управления, углов атаки, скольжения, крена, тангажа, угловых скоростей, перегрузок и других в зависимости от конкретного объекта и цели испытаний.

Полезные данные можно получить, если одновременно с основными измерениями дополнительно измеряются относительные перемещения элементов конструкции, влияющие на величину и распределение аэродинамических нагрузок. Для этой цели применяют кинометрический (с помощью специальных кино- или фотоаппаратов), электромеханический (с помощью электрических датчиков, преобразующих перемещения, передаваемые на них механической связью, в электрические сигналы) или тензометрический (интегрируя измеренные относительные деформации) методы. Подробнее с измерительной техникой можно ознакомиться по книгам [1, 29].

Обработка материалов испытаний состоит главным образом в определении величин нагрузок, сил (моментов) или напряжений в зависимости от параметров, определяющих режим.

Учитывая наличие в процессе изменения нагрузки в большинстве случаев значительной случайной составляющей, обработка ведется с использованием методов математической статистики (см. § 17.3—17.7).

§ 16.4. ПРОВЕРКА ЗАПАСОВ ДО АВТОКОЛЕБАНИЙ

Для большинства видов автоколебаний характерными чертами, которые надо учитывать при проведении испытаний, являются: существование порога возбуждения, опасный характер колебаний и необходимость обеспечения запасов и проверки их фактического наличия. Существование порога возбуждения означает (см., например, § 7.6 и 12.4), что автоколебания могут возникнуть только при достаточно большом начальном возмущении. При недостаточном возмущении автоколебания не возникают, что может создать ложное представление о безопасности, в действительности не обеспеченной. Величина порога возбуждения зависит от определенных факторов. Влияя на них при испытаниях, надо обеспечить, чтобы порог возбуждения был бы не больше минимально возможного в условиях реальной эксплуатации. Начальные возмущения, в свою очередь, должны быть не меньше наибольших, встречающихся в этих условиях.

Автоколебания имеют обычно предельный цикл, т. е. амплитуда колебаний не возрастает до бесконечности. Однако уровень, на котором устанавливаются колебания, может оказаться слишком высоким, небезопасным для вертолета. К тому же достаточно точно определить его до эксперимента расчетными методами в большин-

стве случаев не удается. Поэтому при проведении испытаний экспериментатор всегда должен иметь в виду возможность возрастания колебаний до опасной величины и предусмотреть соответствующие меры безопасности (стопорные устройства, возможность быстрого изменения определяющего параметра, например, быстрого снижения частоты вращения винта, меры по защите экипажа и т. п.).

Обычно на хорошо спроектированном вертолете существует запас по автоколебаниям, т. е. они не возникают на любом режиме работы, допустимом в эксплуатации и даже при некотором превышении ограничений. Собственно задачей испытаний и является оценка этих запасов. Поэтому для получения данных по запасам необходимо производить изменение какого-либо определяющего параметра конструкции или выходить на режимы, превышающие по определяющему параметру установленные для эксплуатации ограничения. Конструктивные меры, направленные на обеспечение безопасности по автоколебаниям, обычно приводят к ухудшению других характеристик. Поэтому стремятся иметь достаточные, но минимально необходимые запасы до автоколебаний. Это объясняет высокие требования к надежности и точности данных, получаемых в эксперименте. На вертолете возможно появление автоколебаний различных видов. Изучение их требует разработки специальной в каждом случае методики испытаний с учетом предполагаемых причин и изложенных выше общих соображений. Обычными для каждого вертолета являются испытания по определению запаса до флаттера и земного резонанса.

Испытания по флаттеру производятся на моделях в аэродинамических трубах, обязательно (в соответствии с нормами прочности [27]) на натурном вертолете в наземных условиях при раскрутках несущего винта и, иногда, в полете. Испытания на моделях позволяют получить зависимость критического значения частоты вращения винта от параметров, определяющих режим полета, прежде всего от скорости полета (§ 7.6 и 7.7). Это дает возможность корректировать расчетные данные, которые (см. § 7.7) недостаточно надежно отражают влияния скорости полета. Становится возможным правильный выбор параметров лопасти без последующих доработок по результатам летных испытаний. Наконец, уменьшается объем и повышается безопасность летных испытаний. Основная трудность проведения испытаний состоит в сложности создания динамически подобных моделей винтов, включая систему управления.

Испытания на натурном вертолете при наземных гонках выполняются в следующем порядке. На лопастях устанавливаются провоцирующие грузы, вызывающие смещение назад эффективной центровки на величину, равную необходимому запасу (см. § 7.4). Производится раскрутка винта с постепенным увеличением частоты вращения. При этом ручка управления обязательно отклоняется от нейтрального положения на максимально возможную величину. Отклонение ручки вызывает принудительное движение в осевых шарнирах, что обеспечивает снижение порога возбуждения (см. § 7.6). При испытаниях измеряются в первую очередь движение лопастей в осевом и горизонтальном шарнирах и колебания автомата перекоса. Полезно также измерять напряжения в лопастях несущего винта, усилия в системе управления и вибрации фюзеляжа. По записям указанных параметров определяют возникновение колебаний типа флаттер (рис. 16.6) и фиксируют соответствующие значения частоты вращения винта и амплитуды принудительного движения в осевом шарнире. Определяют частоту флаттера. Она обычно близка к удвоенной частоте оборотов. Сравнивая фазы соответствующих флаттеру колебаний отдельных лопастей относительно горизонтального или осевого шарнира, устанавливают форму флаттера — синфазную или циклическую.

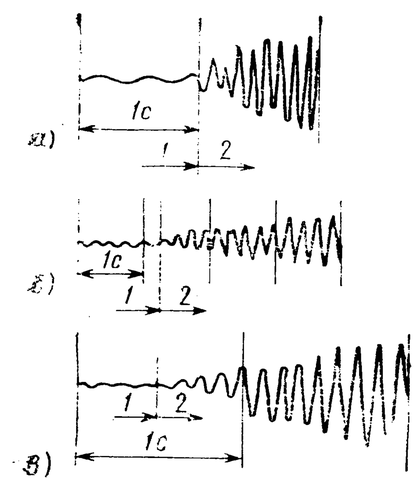


Рис. 16.6. Маховое движение лопасти (*а*), момент управления $M_{упр}$ (*б*) и вибрации в кабине пилота (*в*):

1 — флаттера нет; *2* — при флаттере

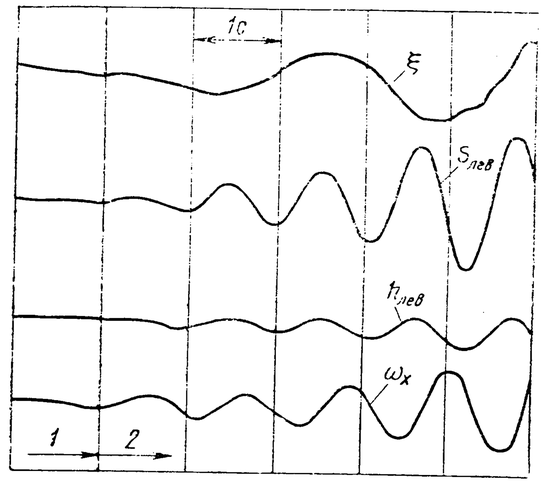


Рис. 16.7. Движение лопасти относительно ВШ (ξ), обжатие амортизационной стойки (*S*) и пневматика (*h*), а также угловая скорость колебаний фюзеляжа вокруг продольной оси (ω_x) при земном резонансе:

1 — земного резонанса нет; *2* — земной резонанс

При возникновении флаттера экспериментатор должен немедленно вернуть ручку управления в нейтральное положение и принять меры к уменьшению частоты вращения винта (например, выключить двигатели). При возврате ручки принудительное движение в осевых шарнирах уменьшается и флаттер может прекратиться даже без уменьшения частоты вращения винта.

Испытания на земной резонанс выполняются на натурном вертолете на различных режимах: на месте, при разбеге и при посадке (см. гл. 12). Испытания производятся при различных значениях частоты вращения винта, соответствующих зонам неустойчивости, полученным в расчете и при наибольшем и наименьшем значениях тяги, создаваемой винтом (см. § 12.4). Целесообразно при этом выдерживать ручку управления в таком положении, которое

вызывает наибольшее маховое движение лопасти относительно ГШ, что приводит к возникновению кориолисовых сил в плоскости вращения (см. гл. 8). Эти силы вызывают, в свою очередь, принудительное движение лопастей относительно ВШ, что снижает порог возбуждения (см. гл. 12). На заданном режиме производится тем или иным способом импульсное возбуждение колебаний вертолета. При большой тяге винта возможно создание таких импульсов резкими отклонениями — «дачами» — ручки управления. Посадки выполняются с умышленными ошибками в пилотировании так, чтобы происходило неравномерное и грубое, с ударом касание вертолета колесами поверхности аэродрома. Величина и скорость дач ручки, а также величины ошибок в технике пилотирования должны быть не меньше возможных в реальной эксплуатации. Для оценки запасов по земному резонансу можно изменять такие параметры, как характеристика демпфера ВШ, частота колебаний фюзеляжа. Последнее достигается изменением массовых характеристик — загрузкой вертолета. При испытаниях измеряются: движение лопастей относительно ВШ, колебания фюзеляжа, обжатие амортизационных стоек и пневматиков. По результатам этих измерений (рис. 16.7) оценивается быстрота затухания колебаний после импульса, что дает возможность судить о приближении к условиям, в которых возникает земной резонанс. Обычно земной резонанс возникает и развивается настолько бурно, что сам факт его возникновения очевиден и без каких-либо измерений. По результатам эксперимента фиксируют критические значения частоты вращения, при которых возникает земной резонанс, и условия его возникновения: величину махового движения, характеристики импульсов, регулировочные данные демпферов ВШ и шасси.

При подготовке эксперимента принимаются все меры по обеспечению безопасности экипажа в случае поломки вертолета.

§ 16.5. ИССЛЕДОВАНИЯ ВИБРАЦИЙ ФЮЗЕЛЯЖА

Исследования вибраций производятся на натурных вертолетах в полете с различными целями. Одна из них — это изучение вибраций в связи с их неблагоприятным воздействием на экипаж и пассажиров. Определение и оценка уровня вибраций в пилотских и пассажирских кабинах по допустимости их физиологического воздействия осуществляется соответствующими специалистами. Однако в практике нередки случаи, когда вибрации определенного вида на опытном вертолете признаются выходящими за допустимые пределы. Тогда для выявления причин повышенных вибраций, их источника и механизма и выработки мер по их снижению привлекаются специалисты по прочности. Другая цель связана с определенными отзывами экипажа о виброобстановке на борту вертолета. Известны случаи, когда летчики обнаруживали появление «необычных» вибраций, сигнализируя о возникновении на вертолете недопустимых явлений (например, флаттера). Однако восприятие вибраций человеком является далеко недостаточным для составления правильного представления об их характере. Так, вибрации приборной доски с плохо подобранной амортизацией могут быть восприняты как повышенные вибрации фюзеляжа в целом и т. д. Поэтому при появлении вибраций, привлекающих внимание экипажа, для получения объективного представления о них выполняются специальные измерения.

Измерения вибраций в полете могут дать представление о формах вынужденных колебаний конструкции. Это позволяет установить зоны повышенных переменных напряжений, в которых следует наклеить тензорезисторы при дальнейших испытаниях. Нахождение форм колебаний является также необходимой частью исследований по определению динамических характеристик конструкций (см. § 16.6). Еще одна цель — определение колебаний узлов подвески тех агрегатов, вынужденные колебания которых в полете определяются только движением этих узлов, а поверхностные силы (за исключением реакций узлов) отсутствуют, т. е. имеет место так называемое кинематическое возбуждение. (Примером может служить любой агрегат, закрепленный внутри фюзеляжа, если он не связан с другими). По результатам таких измерений настраивают в соответствии с принятой методикой стенды для усталостных испытаний этих агрегатов. Испытания проводятся также для проверки эффективности мер по снижению уровня или устранению вибраций того или иного вида. Наконец, измерения вибраций могут помочь в выявлении определенных видов автоколебаний, сопровождающихся появлением характерных колебаний фюзеляжа (см. § 11.5 и 16.4).

При испытаниях, как правило, измеряют линейные колебания по заданному направлению. Непосредственное измерение угловых колебаний не получило распространения. Угловые колебания определяют по разности показаний двух датчиков линейных колебаний, разнесенных по концам соответствующей базы. Для получения полного представления о колебаниях данной точки используются три датчика, измеряющих составляющие колебаний по трем осям. Измерения вибраций производятся с помощью датчиков сейсмического типа с использованием согласующих устройств и регистраторов. Сейсмические (инерционные) датчики (рис. 16.8) содержат массу, закрепленную на упругом элементе, и электрическую часть, вырабатывающую электрические сигналы как функцию от закона движения массы при деформациях упругого элемента. Согласующие устройства преобразуют сигналы датчиков в форму, подходящую для регистратора и выполняют другие преобразования сигнала (например, электрическое интегрирование или дифференцирование и фильтрацию). В качестве регистраторов применяются светолучевые осциллографы и бортовые магнитные накопители. Подробнее с измерительной системой можно ознакомиться в [1 и 29]. В испытаниях регистрируются также параметры, определяющие режим полета. В качестве дополнительных выполняют измерения напряжений или сил (моментов) в некоторых сечениях и

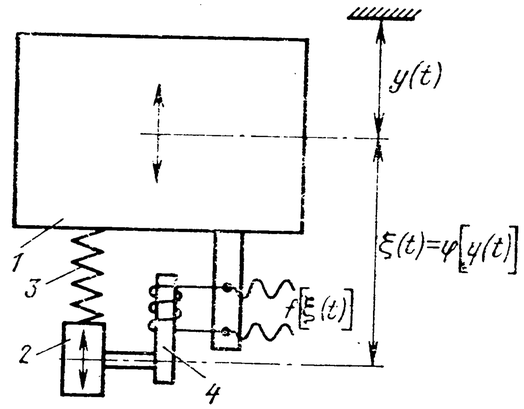


Рис. 16.8. Вибродатчик:

1 — колеблющаяся конструкция; *2* — масса датчика; *3* — пружина; *4* — преобразователь относительного движения массы в электрический сигнал

аэродинамического давления. Такие измерения служат, например, для распознавания вибраций типа бафтинг.

Выбор мест и режимов измерений определяется конкретной целью исследований и типом вибраций. Во многих случаях достаточно измерить вибрации под сиденьями экипажа или вблизи центра тяжести вертолета на режимах горизонтального полета с различной скоростью. Это характерно для исследований, связанных с физиологическим воздействием вибрации, или с обнаружением непривычных для экипажа вибраций и вибраций, соответствующих автоколебаниям. Для определения форм колебаний может потребоваться большее число вибродатчиков — до 15. При исследовании вибраций, вызываемых переменными силами несущих или рулевого винтов, полезно выполнить серию режимов при различных частотах оборотов винтов, что позволяет выявить возможную близость колебаний к резонансу.

Уровень вибраций можно оценивать как по виброперемещениям, так и по виброскоростям или виброускорениям. При гармонических колебаниях виброперемещения изменяются по закону: $y = y_0 \sin \omega t$. Законы изменения виброскоростей и виброускорений: $\dot{y} = \omega y_0 \cos \omega t$ и $\ddot{y} = -\omega^2 y_0 \sin \omega t$. Таким образом, амплитуда виброскоростей $A_V = \omega y_0$ пропорциональна круговой частоте ω, а амплитуда виброускорений $A_W = \omega^2 y_0$ — квадрату круговой частоты. Уровень вибраций в этом простейшем случае может быть охарактеризован любой из амплитуд $A_y = y_0$, $A_V = \omega y_0$ или $A_W = \omega^2 y_0$. Переход от одной величины к другой очевиден. На практике чаще приходится встречаться с полигармоническими процессами, т. е. процессами, представляющими собой сумму гармоник с различными частотами ω_i. Виброперемещения определяются, следовательно, формулой

$$y = \sum_i A_{yi} \sin(\omega_i t + \varepsilon_i),$$ а виброускорения

$$\ddot{y} = -\sum A_{yi} \omega_i^2 \sin(\omega_i t + \varepsilon_i),$$

т. е. процессы изменения виброперемещений и виброускорений будут внешне выглядеть как сложные кривые, отличающиеся по форме. Поэтому одной из первых задач обработки является выделение отдельных гармонических составляющих — спектральный анализ (см. § 17.6 и 17.7). По результатам такого анализа, т. е. выделенным отдельным гармоническим составляющим, выявляют

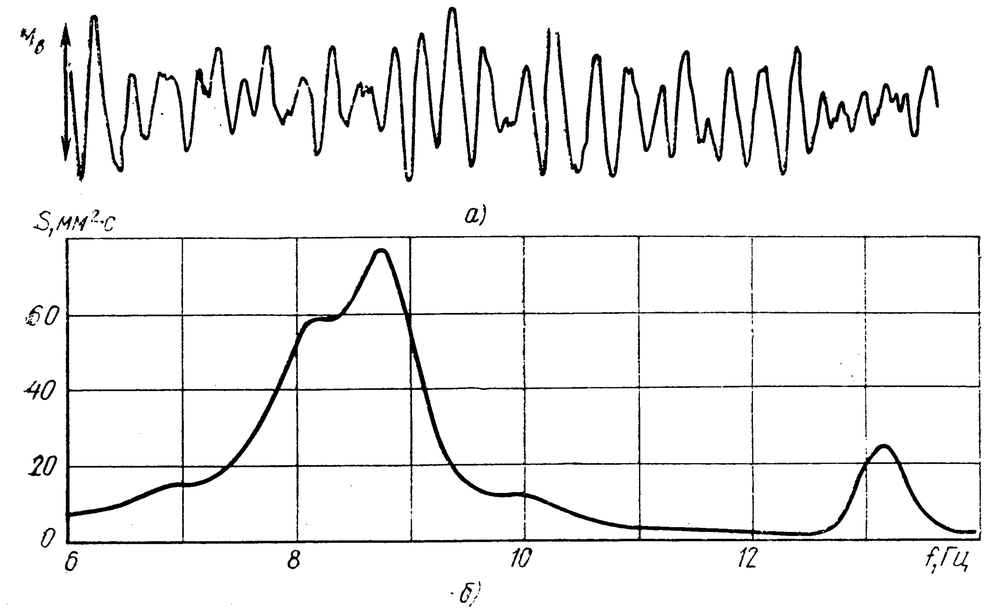


Рис. 16.9. Бафтинг:

а — изгибающий момент в вертикальной плоскости — $M_в$; *б* — спектральная плотность $M_в$

источники вибраций. При этом руководствуются общими представлениями об особенностях вибраций различных типов, изложенными в гл. 11, — прежде всего значениями частот. Так, для нормально-обусловленных вибраций характерна частота $f = zn_s$ (z — число лопастей, n_s — частота вращения винта) и кратные ей частоты. Вибрации типа бафтинг имеют нерегулярный характер (рис. 16.9). Спектр сосредоточен около собственных частот конструкции. Вибрации, вызванные неидентичностью лопастей вследствие неточности их изготовления или регулировки, имеют обычно частоты, равные частотам вращения несущего или рулевого винта и т. д.

Характерной особенностью реальных процессов вибраций является наличие значительной по величине случайной составляющей. Поэтому при анализе результатов измерений следует использовать положения математической статистики (см. гл. 17).

§ 16.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦИИ

Целью испытаний является определение частот и форм собственных колебаний, коэффициентов демпфирования, приведенных масс и жесткостей [40] конструкции. Результаты используются непосредственно в расчетах (взамен соответствующих расчетных данных), для проверки и совершенствования методов расчета и для проверки соответствия конструкции требованию НЛГ [27] об отсутствии опасных резонансов. Испытания выполняются на натурных объектах — лопастях несущих и рулевых винтов, системах управления, фюзеляже или вертолете в целом.

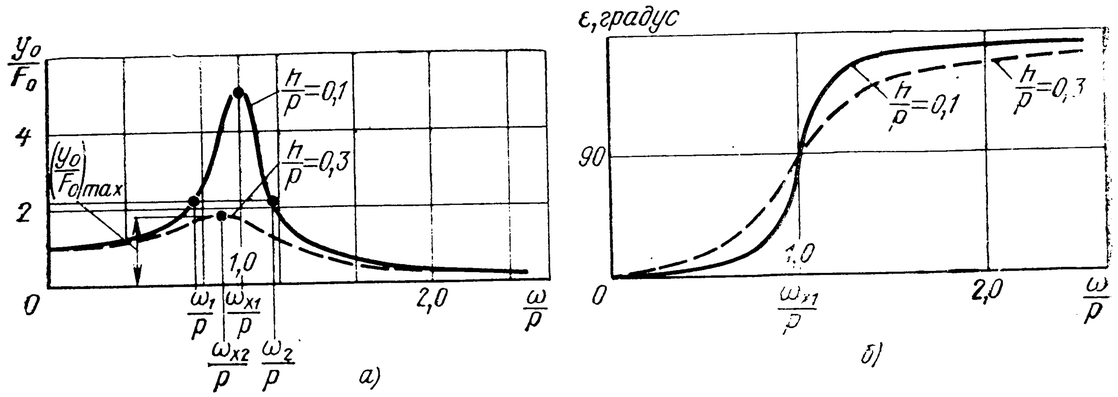


Рис. 16.10. АЧХ (*а*) и ФЧХ (*б*) линейной системы с одной степенью свободы

Обратимся вначале к линейной системе с одной степенью свободы. Под действием гармонической силы $F=F_0 \sin \omega t$ масса M, входящая в эту систему, будет совершать установившиеся колебания по закону

$$y=y_0 \sin(\omega t-\varepsilon)=y_0^{(s)} \sin \omega t-y_0^{(c)} \cos \omega t, \tag{16.1}$$

причем
$$y_0=\frac{\frac{F_0}{M}}{\sqrt{(p^2-\omega^2)^2+4\omega^2 h}}; \tag{16.2}$$

$$\varepsilon=\operatorname{arctg} \frac{2\omega h}{p^2-\omega^2}; \tag{16.3}$$

$$y_0^{(s)}=y_0 \cos \varepsilon; \quad y_0^{(c)}=y_0 \sin \varepsilon. \tag{16.4}$$

Здесь p — собственная частота и h — коэффициент демпфирования — искомые величины. Следующие из (16.2) и (16.3) зависимость $y_0/F_0=f(\omega)$ (рис. 16.10, *а*) называется амплитудно-частотной (АЧХ), а зависимость $\varepsilon=f(\omega)$ (рис. 16.10, *б*) — фазочастотной (ФЧХ) характеристиками. Составляющая $y_0^{(s)} \sin \omega t$ в (16.1), изменяющаяся в фазе с силой F, называется синфазной, а составляющая $y_0^{(c)} \cos \omega t$, отстающая по фазе от силы F на $\pi/2$, — квадратурной. Зависимости $y_0^{(s)}/F_0=f(\omega)$ и $y_0^{(c)}/F_0=f(\omega)$ называются действительной и мнимой частотными характеристиками (рис. 16.11, *а* и *б*). График $y_0^{(c)}=f(y_0^{(s)})$ (рис. 16.11, *в*) — амплитудно-фазовая характеристика (передаточная функция). Если в эксперименте прикладывать силу $F=F_0 \sin \omega t$ с различными частотами ω и измерять колебания (16.1), то можно получить все эти характеристики. По этим характеристикам определяют искомые величины P и h, для чего существуют различные способы. Можно использовать характерные точки (см. рис. 16.10) АЧХ и ФЧХ — точки с абсциссами $\omega_{x1}=p$ и $\omega_{x2}=\omega_m$ (где ω_m — значение частоты ω, при котором отношение y_0/F_0 максимально). При фазовом резонансе $\omega=\omega_{x1}$ в соответствии с (16.3) и (16.4) сдвиг фазы $\varepsilon=\pi/2$,

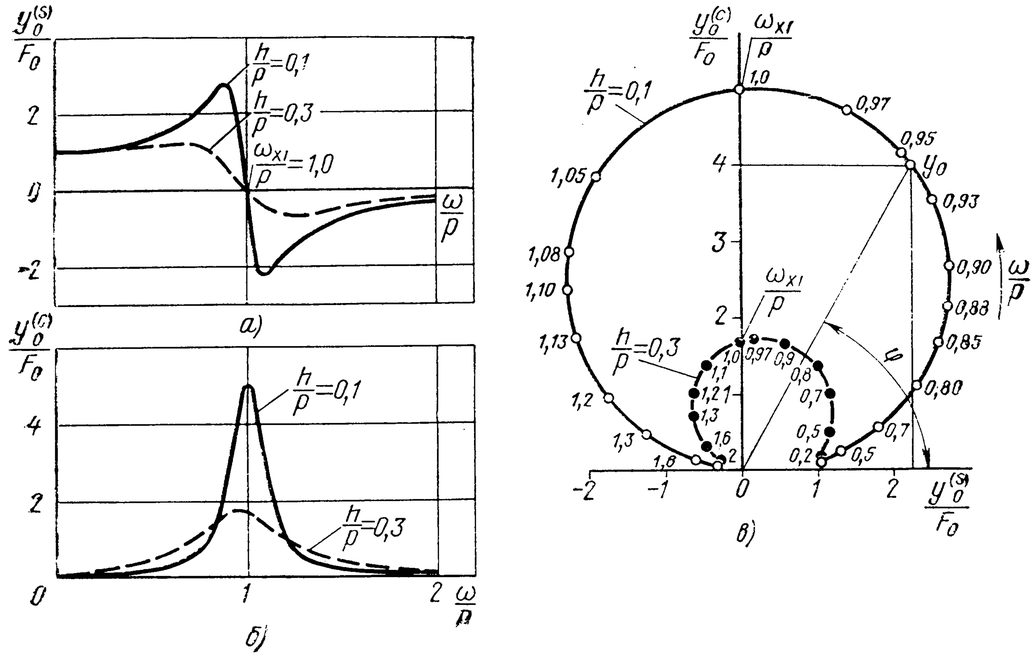


Рис. 16.11. Действительная (*а*) и мнимая (*б*) частотные и амплитудно-фазовая (*в*) характеристики

а $y_0^{(s)}=0$ (см. рис. 16.11). Величина ω_{x2} (частота амплитудного резонанса), как это следует из формулы (16.2), определяется соотношением $\omega_{x2}=\sqrt{p^2-2h^2}$. Обычно при малом демпфировании $\omega_x \approx p$. Следовательно, значение p можно определить (см. рис. 16.10) по полученной в эксперименте АЧХ как значение $\omega=\omega_m=\omega_{x2}$, при котором y_0/F_0 максимально, или по ФЧХ как значение $\omega=\omega_{x1}$, при котором $\varepsilon=\pi/2$. Из действительной частотной характеристики p определяется (см. рис. 16.11) как значение ω, при котором $y_0^{(s)}=0$. При $\omega=\omega_{x1}=p$ из (16.2) имеем $y_0/F_0=1/M(2ph)$, откуда $h=1\Big/\left[2pM\left(\frac{y_0}{F_0}\right)_{\omega=p}\right]$. Можно поступить иначе — найти (см. рис. 16.10) величины $\omega_1<p$ и $\omega_2>p$, соответствующие одинаковым значениям y_0/F_0, и определить h по формуле:

$$h=\frac{1}{2}\sqrt{2p^2-(\omega_1^2+\omega_2^2)},$$

следующей из соотношения (16.2). Существуют и другие способы, основанные на рассмотрении действительной и мнимой частотных характеристик, или на дифференцировании АЧХ и ФЧХ, или на анализе измерений скорости колебаний $\dot{y}(t)$. При наличии больших случайных наложений полезно применить метод наименьших квадратов (см. § 17.5). Метод, основанный на возбуждении вынужденных колебаний конструкции с помощью гармонической силы $F=F_0 \sin \omega t$, называется методом вынужденных колебаний. Другой метод — собственных колебаний — заключается в их воз-

буждении путем придания массе M начального смещения или начальной скорости собственных колебаний, закон которых имеет вид

$$y = y_0 e^{-ht} \sin(\nu t + \varepsilon_0). \qquad (16.5)$$

Интервал времени между двумя соседними значениями $y=0$ составляет $T=\pi/\nu$, где $\nu=\sqrt{p^2-h^2}$. При малом демпфировании $\nu \approx p$, следовательно, собственная частота может быть определена по измеренной величине T: $p=\pi/T$. Отношение двух последовательных максимальных отклонений A_{k-1} и A_k, как это следует из (16.5), равно

$$\frac{A_k}{A_{k-1}} = e^{-h\frac{2\pi}{\nu}} \quad \text{или} \quad \ln\frac{A_k}{A_{k-1}} = -h\frac{2\pi}{\nu}.$$

Из этого соотношения определяется h.

Для реальных конструкций решение задачи становится сложной вследствие наличия бесконечного ряда собственных частот, связей, вызываемых демпфированием [42], и возможного нелинейного характера конструктивного демпфирования (см. 7.6, 11.3). Как это следует из выражения (11.8), при приложении силы по гармоническому закону $F=F_0 \sin \omega t$ и достаточно малом демпфировании возбуждаются колебания с частотой ω по форме, представляющей собой линейную комбинацию форм собственных колебаний. Анализируя выражения для амплитуд (11.8) и фаз таких колебаний, можно установить, что если собственные частоты достаточно далеки друг от друга, а демпфирование мало, то при частоте ω, близкой к одной из собственных частот p_r, форма колебаний близка к собственной, на АЧХ имеется отчетливо выраженный пик при $\omega \approx p_r$ и при $\omega = p_r$ фаза $\varepsilon = \pi/2$ (рис. 16.12, *а*), т. е. сохраняются свойства, присущие колебаниям системы с одной степенью свободы, а следовательно, могут быть применены рассмотренные выше способы определения собственной частоты и демпфирования. Если же конструкция имеет близкие собственные частоты (например, две — p_{r1} и p_{r2}), то форма вынужденных колебаний вблизи этих частот будет представлять собой комбинацию собственных форм и отмеченных выше особенностей АЧХ и ФЧХ нет (при $\omega = p_{r1}$ или $\omega = p_{r2}$ $\varepsilon \neq \pi/2$, а $A = A_{max}$ при $\omega \neq p_{r1}$ и $\omega \neq p_{r2}$). Вместо двух пиков на АЧХ, соответствующих p_{r1} и p_{r2}, может быть только один, как на рис. 16.12, *б*. В этом случае применяют многоточечное возбуждение, прикладывая силы в нескольких точках конструкции с помощью нескольких согласованных между собой вибраторов [40]. Основной целью при этом является такой подбор амплитуд сил, создаваемых вибраторами, при котором уменьшаются интегралы A_k в выражении (11.8), соответствующие собственным частотам, не интересующим исследователя (например, $p \neq p_{r1}$), так, чтобы в сумме (11.8) преобладало только одно слагаемое, соответствующее искомой частоте (например p_{r1}). Многоточечное возбуждение применяется также и для компенсации сил демпфи-

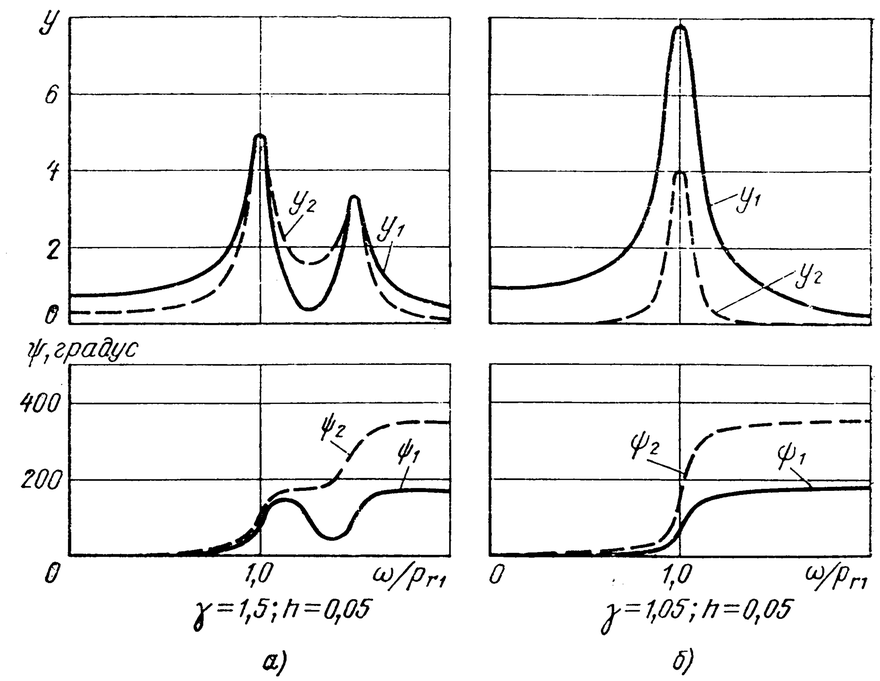


Рис. 16.12. Амплитудно- и фазочастотные характеристики системы с двумя степенями свободы

рования в общем случае [40]. Подбор амплитуд и фаз сил, создаваемых вибраторами, является одним из этапов испытаний.

Разработаны способы оценки степени нелинейности, обусловленной как природой демпфирования, так и нелинейными свойствами конструкции (особенно при больших амплитудах колебаний). В частности, о наличии нелинейности судят по наличию зависимости АХЧ от амплитуды силы F (в линейной системе отношение y_0/F_0 не зависит от F_0). Другой признак — появление колебаний с частотами, не равными частоте возбуждающей силы, что также не может быть в линейной системе. Для определения собственных частот и форм колебаний конструкции в определенных случаях [40] может быть применен и метод свободных колебаний. Существуют методы, позволяющие найти приведенные массы и жесткости [14]. Применение того или иного метода для исследования реальных конструкций зависит от конкретных условий эксперимента: наличия необходимой аппаратуры, потребной и достижимой в эксперименте точности, помехоустойчивости метода, свойств (особенностей) конструкции, допустимых сроков испытаний (трудоемкости эксперимента) и т. д. Чаще других используется метод вынужденных колебаний с построением АЧХ. Всегда полезно получить данные различными способами и сопоставить их.

К техническим средствам проведения эксперимента относятся вибраторы, измерительная система, система управления экспериментом и система подвеса. Применяются электромеханические вращающиеся вибраторы — эксцентриковые и с несбалансированной массой (инерционные) (см. § 16.2), электрогидравлические и элек-

тродинамические. Первые проще по устройству и в эксплуатации. Электрогидравлические и электродинамические вибраторы удобнее при многоточечном возбуждении, так как ими можно управлять непосредственно в процессе эксперимента (изменять заданным образом соотношения амплитуд и фаз сил, создаваемых каждым из вибраторов).

Измерительная система должна регистрировать процессы колебаний ряда точек конструкции и изменения сил, создаваемых вибраторами, а также параметры этих процессов (амплитуды и фазы). Измерительная система состоит из датчиков вибраций, датчиков сил, создаваемых вибраторами, регистраторов, анализаторов, коммутирующих устройств, устройств связи с ЭЦВМ и системой управления. При испытаниях натурных конструкций применяют устанавливаемые на ней вибродатчики сейсмического типа (см. § 16.5), а при испытаниях малых моделей — бесконтактные методы измерений, чтобы не искажать массовые характеристики модели установкой датчиков. В качестве регистраторов применяются осциллографы, магнитографы (см. § 17.2), приборы с цифровой печатью, перфораторы. Электронные анализаторы должны определять раздельно синфазную и квадратурную составляющие колебаний, амплитуды, частоты и фазы колебаний, обеспечивать построение форм колебаний, АЧХ и ФЧХ и передаточных функций. Эти сведения желательно выдавать на устройство визуализации для контроля и управления экспериментом.

Система управления испытаниями служит для изменения законов действия сил, возбуждающих колебания. Система включает средства индикации, пульт управления, аппаратуру управления электросистемами вибраторов. Подробнее с этой системой можно познакомиться в [40]. Система управления может включать в себя управляющую ЭЦВМ с соответствующим математическим обеспечением.

Еще одна техническая задача, которую надо решить при проведении испытаний — обеспечение граничных условий. При испытаниях отдельных агрегатов возможны два варианта их закрепления — предельно жесткое [например, при определении частот и форм изолированной лопасти (см. гл. 3)] или соответствующее по жесткости реально существующему на вертолете. При определении динамических характеристик вертолета в целом, соответствующих условиям полета (в отрыве от земли), следует подвесить его так, чтобы подвеска не привела к существенному изменению искомых характеристик и не вызывала бы побочных автоколебаний [40]. В этой же работе рассмотрены различные способы решения таких задач. Подробнее с методикой и средствами испытанний можно ознакомиться в [14 и 40].

глава 17 НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МЕТОДОВ

§ 17.1. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

Теория подобия дает методические указания по постановке и обработке данных опыта, по распространению результатов опыта на другие явления и по расчету и построению модели, подобной натуре (если исследования проводятся на модели). В соответствии с этой теорией обрабатывать результаты опытов надо в виде зависимости между критериями подобия и отношениями одноименных величин (см. ниже), что дает возможность распространить их на все подобные явления. Соблюдение условий подобия позволяет распространять результаты исследований на моделях в искусственных условиях на натурные объекты в естественных условиях. Моделирование основано на рассмотрении физически подобных явлений. Выполнение условий подобия при проведении испытаний позволяет в разных опытах получать сопоставимые результаты, что особенно важно при сравнительных испытаниях. При общем изучении нового явления предпочтительнее варьировать критерии подобия, а не какие-либо иные параметры, относящиеся к нему. Это обеспечивает получение более общей картины, позволяет полнее выявить основные особенности явления, гарантирует от возможных в противном случаев недосмотров.

Как известно, подобными называются явления, происходящие в геометрически подобных системах, если у них во всех сходственных точках отношения одноименных величин есть постоянные числа [18]. Эти отношения называются константами подобия. Наличие связей между величинами, характеризующими явление, накладывает определенные зависимости на константы подобия. Следствием этого является возможность выявления степенных комплексов определенного вида, составленных из величин, характеризующих явление, — критериев подобия. В соответствии с первой теоремой теории подобия [18] у подобных явлений критерии численно одинаковы. Одинаковы также отношения одноименных величин (длин, скоростей и т. п.), вычисленных для одного явления. В соответствии с второй теоремой подобия вид критериев может быть установлен путем специального анализа дифференциальных уравнений, описывающих исследуемое явление. Возможны два способа такого анализа — сравнение уравнений, записанных для двух явлений из группы подобных, или приведение уравнений к виду, в котором все переменные выражены в относительных единицах.

В частности, применение того или другого метода к анализу уравнения второго закона Ньютона приводит к критерию

$$K=\frac{ft}{mv}=\mathrm{id},$$

где f — сила; t — время; m — масса; v — скорость. Обычно принято вводить характерную длину $l=vt$, что приводит критерий K к виду

$$\frac{fl}{mv^2}=\mathrm{Ne}. \qquad (17.1)$$

Критерий Ne называется критерием Ньютона. Сила f может иметь различную природу, в зависимости от чего критерий Ne приобретает различную форму, и соответственно, другое наименование. Положим последовательно, что сила f является силой тяжести, давления, вязкости, упругости и выражается поэтому формулами вида:

$$f=mg;\quad f=pS;\quad f=\mu\frac{v}{l}S;\quad f=\varepsilon ES. \qquad (17.2)$$

Здесь g — ускорение свободного падения; p — давление; S — площадь; μ — коэффициент вязкости; ε — относительное удлинение; E — модуль упругости. Подставляя в (17.1) каждое выражение (17.2) и производя замену $m/(Sl)=\rho$ получим соответственно:

$\mathrm{Ne}=\frac{gl}{v^2}=\frac{1}{\mathrm{Fr}}$, $\mathrm{Fr}=\frac{v^2}{gl}$ — число Фруда — критерий подобия по силам тяжести;

$\mathrm{Ne}=\frac{p}{\rho v^2}=\mathrm{Eu}$, $\mathrm{Eu}=\frac{p}{\rho v^2}$ — число Эйлера — критерий подобия по давлению;

$\mathrm{Ne}=\frac{\mu}{v\rho l}=\frac{1}{\mathrm{Re}}$, $\mathrm{Re}=\frac{v\rho l}{\mu}$ — число Рейнольдса — критерий подобия по вязкости;

$\mathrm{Ne}=\varepsilon\frac{E}{\rho v^2}=\frac{\varepsilon}{\mathrm{Ca}}$, $\mathrm{Ca}=\frac{\rho v^2}{E}$ — число Коши — критерий подобия по силам упругости.

Для совершенного газа $p/\rho=gRT=a^2$ и из выражения для числа Эйлера следует $\mathrm{Eu}=\frac{p}{\rho v^2}=\frac{a^2}{v^2}=\frac{1}{\mathrm{M}^2}$, $\mathrm{M}=\frac{v}{a}$ — число Маха — критерий по сжимаемости. Заметим, что часто применяемый в вертолетостроении параметр $\gamma=\frac{c_y^\alpha\rho bR^4}{2I_{\text{г.ш}}}$ — массовая характеристика лопасти — при $\alpha=\mathrm{id}$ пропорционален Ne и может быть получен преобразованием критерия Ne, если сила $f=c_y^\alpha\alpha\frac{\rho v^2}{2}s$ — аэродинамическая подъемная сила. Критерии Fr, Eu, Re, Ca, M являются необходимыми для подобия явлений обтекания сжимаемым вязким газом упругого тела, в частности в задачах вынужденных

колебаний и флаттера лопастей винта вертолета. Для выявления других критериев следует теми же способами произвести анализ всех уравнений, составляющих систему, описывающую исследуемое явление.

Не рассматривая результаты такого анализа полностью, укажем, что наряду с критериями Eu, Fr, Re, Ca, M выявляется (из уравнения сохранения массы) критерий гомохронности Ho [18], имеющий вид

$$\mathrm{Ho}=\frac{tv}{l},$$

где t, v, l — характерные промежуток времени между двумя событиями, скорость и длина. На основе правила замещения величин одного наименования [18] критерию Ho могут быть приданы другие формы:

$$\overline{V}=\frac{V}{\omega R}\quad\text{или}\quad\mu=\frac{V\sin\alpha}{\omega R}\ (\alpha=\mathrm{id});$$

$$\theta=\frac{T_1}{T_2}=\frac{p_2}{p_1},$$

где ω и R — угловая скорость и радиус винта; T_1, T_2 (p_1, p_2) — характерные периоды (частоты). В частности, p_1 можно рассматривать как частоту вращения винта, а p_2 — как одну из собственных частот того или иного агрегата. Обратную $\overline{V}$ величину $1/\overline{V}=\omega R/V=\mathrm{St}$ называют числом Струхаля. Критерии подобия аналогичным образом могут быть получены и для других явлений, например для упругого равновесия конструкции под действием внешних сил (см. ниже), для нагружения при маневре и т. д.

Условия равенства критериев подобия являются исходными для выбора масштабов входящих в них величин — констант подобия при экспериментах в условиях, отличающихся от натурных. Отметим также, что полное представление о подобии явлений может быть получено только с привлечением к рассмотренным выше положениям теории подобия также теоремы М. В. Кирпичева (третьей теоремы теории подобия). Если уравнения связи неизвестны, то для нахождения вида критериев используется способ, основанный на анализе размерностей. Не являясь строгим, он позволяет «угадать» вид критериев, но может привести и к ошибочным результатам.

Нередко выполнить все условия подобия не удается. Многие эксперименты проводят в условиях частичного подобия, т. е. обеспечивая подобие по некоторым важнейшим для данной задачи факторам. В определенных случаях имеет место автомодельность явления по отношению к одному из критериев подобия — его характеристики не изменяются при изменении этого критерия (в определенном диапазоне). Следовательно, нет необходимости выдерживать подобие по этому критерию, что обычно позволяет упростить эксперимент. Подробнее с затронутыми здесь вопросами можно познакомиться в [18, 38].

Рассмотрим некоторые частные примеры. Для статической задачи — равновесия упругой конструкции критерии имеют вид $\mu = \mathrm{id}$, $\frac{F}{\rho g l} = \mathrm{id}$, $\frac{P}{El^2} = \mathrm{id}$, где μ — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала конструкции, P — внешняя нагрузка. Можно указать также одинаковое для натуры и модели отношение одноименных величин σ/E. Поэтому результаты эксперимента следует представлять в форме $\frac{\sigma}{E} = f\left(\mu, \frac{F}{\rho g l}, \frac{P}{El^2}\right)$. При моделировании обычно $g = \mathrm{id}$. Если материал модели и натуры одинаков, то из критерия $\frac{E}{\rho g l} = \mathrm{id}$ следует, что модель должна иметь те же размеры, что и натура. Если же желательно провести опыт на модели меньших (обычно) размеров, то материал модели надо выбрать из условий: $\mu_м = \mu_н$, $\frac{\rho_м E_н}{\rho_н E_м} = \frac{l_м}{l_н}$ $\left(\text{из условия } \frac{E}{\rho g l} = \mathrm{id}\right)$, а величины сил из соотношения $\frac{P_м}{P_н} = \frac{E_м l_м^2}{E_н l_н^2}$, где индексы м и н обозначают величины, относящиеся соответственно к модели и к натуре. Критерий $\frac{E}{\rho g l}$ связан с влиянием силы тяжести. Если им можно пренебречь, то этот критерий выпадает из рассмотрения. При моделировании при этом следует выдержать соотношения $\mu_м = \mu_н$, $\frac{P_м}{P_н} = \frac{E_м l_м^2}{E_н l_н^2}$. Если $E_м = E_н$, то силы следует изменить пропорционально $\left(\frac{l_м}{l_н}\right)^2$. Очевидно, что распределения модулей E и сил P по объемам модели и натуры должны быть подобными.

В задаче о свободных колебаниях балки (см. § 3.1) можно выявить критерии $\frac{I}{l^4} = \mathrm{id}$ и $\frac{p^2 m}{E} = \mathrm{id}$. Последний критерий, используя соотношение между амплитудой скорости колебаний и частотой ($\dot{y}_0 = y_0 p$), можно привести к виду $\frac{\rho \dot{y}_0^2}{E} = \mathrm{Ca}$. Если при моделировании надо сохранить p, то следует выполнить соотношение $\frac{m_м}{E_м} = \frac{m_н}{E_н}$. При различных погонных массах и модулях упругости для модели и натуры частоты связаны соотношением $\frac{p_м}{p_н} = \sqrt{\frac{m_н E_м}{m_м E_н}}$, которое вытекает и из формулы (3.14).

Для вынужденных колебаний или флаттера лопасти критерии подобия были указаны выше. Из анализа их следует, что модель должна иметь те же размеры, что и натура. В противном случае можно обеспечить только частичное подобие. Масштабы для размеров, угловых скоростей винта, скорости потока и других параметров при этом определяются из критериев, которые желательно сохранить одинаковыми.

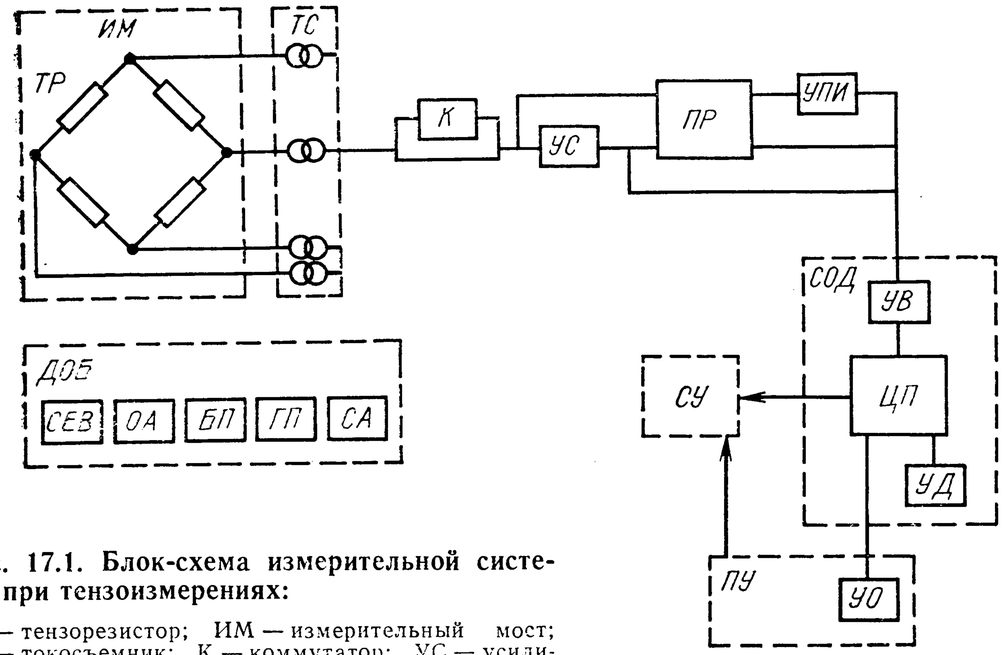


Рис. 17.1. Блок-схема измерительной системы при тензоизмерениях:

ТР — тензорезистор; ИМ — измерительный мост; ТС — токосъемник; К — коммутатор; УС — усилитель; ПР — промежуточный регистратор; УПИ — устройство преобразования информации; СОД — система обработки данных; УВ — устройство ввода; ЦП — центральный процессор; УД — устройство документации; ПУ — пульт управления; УО — устройство отображения; СУ — система управления; ДОБ — дополнительные элементы и блоки; СЕВ — система единого времени; ОА — отметка азимута; БП — блок питания; ГП — градуировочное приспособление; СА — сервисная аппаратура

§ 17.2. ТЕНЗОМЕТРИЯ

Измерения выполняются с помощью специальной измерительной системы, состоящей (рис. 17.1) из тензорезисторов, регистраторов и системы обработки и анализа, а также вспомогательных устройств и устройств обслуживания. Состав системы и выбор ее элементов, их типов и характеристик определяются конкретными целями испытаний. Ниже коротко излагаются наиболее важные особенности и характеристики отдельных элементов измерительной системы.

Принцип действия тензорезисторов (рис. 17.2), как известно, заключается в изменении их электрического сопротивления при удлинении, вызванном растяжением или сжатием материала, на котором они наклеены. Характеристикой тензорезистора является коэффициент тензочувствительности:

$$S = \frac{\Delta R/R}{\varepsilon},$$

где $\Delta R/R$ — относительное приращение электрического сопротивления тензорезистора; ε — относительное удлинение вдоль оси тензорезистора.

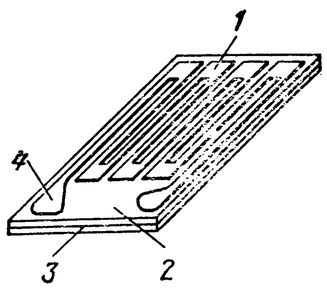


Рис. 17.2. Фольговый тензорезистор:

1 — чувствительный элемент-решетка; *2* — клей; *3* — подложка; *4* — вывод

Применяются тензорезисторы с чувствительной решеткой из проволоки или фольги, выполненных из специальных металлических сплавов, и полупроводниковые тензорезисторы. У первых коэффициент тензочувствительности $S \approx 2$, а у полупроводниковых — значительно выше — до $S = 100...120$. Коэффициент тензочувствительности определяется выборочными испытаниями нескольких тензорезисторов из изготовленной партии. Между тензорезисторами одной партии имеет место случайный разброс коэффициентов тензочувствительности. Этот разброс приводит к тому, что характеристика S для индивидуального тензорезистора может быть известна только с некоторой погрешностью, среднеквадратическая величина которой составляет 1—2% значения S. Коэффициент S зависит от температуры. Обычно это вносит дополнительные погрешности в результаты только при измерениях на нагретых элементах (например, в полете на деталях подредукторной рамы, расположенных вблизи от источников нагрева — редуктора, выхлопных каналов двигателей и т. п.). При измерениях на деталях, подверженных сильному нагреву, применяются специальные тензорезисторы.

Тензорезисторы характеризуются базой — длиной их измерительной решетки. Малобазные тензорезисторы имеют базу от 0,5 до 10 мм. Они применяются, когда необходимо измерить напряжения в зоне концентраций и больших градиентов. Применение тензорезисторов с бо́льшей базой не позволит выявить местные значения напряжений, так как их показания будут соответствовать осредненному по длине значению относительного удлинения. Если это возможно, следует применять тензорезисторы с большей базой — 20—25 мм, имеющие более хорошие измерительные характеристики. Важной характеристикой является допустимая величина тока в чувствительной решетке. От этой величины зависит уровень полезного сигнала. Всегда выгодно, чтобы этот сигнал был по возможности больше. Бо́льшая величина тока допустима для тензорезисторов с решеткой из фольги. Особенностью, которую надо учитывать при измерениях, является изменение сопротивления тензорезистора при изменении температуры. Это изменение сопротивления будет зарегистрировано как кажущаяся деформация детали и, следовательно, приведет к ошибке. Существуют различные методы компенсации влияния температуры на сопротивление тензорезисторов [1, 29]. Очевидно, что необходимым условием правильных измерений является качественная наклейка тензорезисторов, обеспечивающая полную передачу деформаций детали чувствительной решетке. Существуют специальные инструкции по наклейке и соответствующие клеи.

Обычно применяются фольговые и проволочные тензорезисторы. Полупроводниковые тензорезисторы значительно дороже, более сложны в обращении при наклейке. На их измерительные характеристики сильнее влияют изменения температуры, что приводит к большим погрешностям. Поэтому они применяются только в особых случаях.

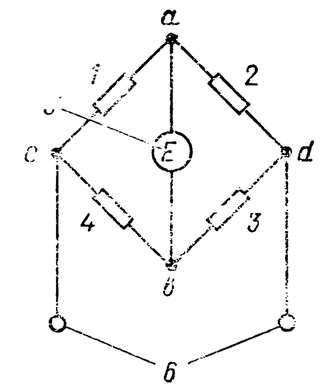


Рис. 17.3. Измерительный мост:

1, 2, 3, 4 — тензорезисторы; *5* — питание; *6* — к регистратору

Тензорезисторы включаются в измерительный мост (рис. 17.3). К одной диагонали (a—b) подводится питание, с другой — измерительной (c—d) — снимается используемый в последующих частях измерительной системы сигнал. В простейшем случае в одно из плеч моста (например, ac) включается один измерительный (активный) тензорезистор; остальные плечи образованы пассивными, не подвергающимися действию относительных удлинений, тензорезисторами, служащие также для термокомпенсации. Сигнал на измерительной диагонали моста в этой схеме пропорционален величине ε в месте наклейки активного тензорезистора. Важным свойством измерительного моста является возможность суммирования или вычитания сигналов отдельных тензорезисторов. Например, для моста, схема которого показана на рис. 17.3, показания тензорезисторов *1* и *3* складываются, а тензорезисторов *1* и *2* — вычитаются. Поэтому обычно в разные плечи моста включают несколько (до четырех) активных тензорезисторов и получают сигнал, пропорциональный величине $\Sigma = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, где ε_i — относительные удлинения в местах наклейки тензорезисторов *1—4*. Это дает возможность получать алгебраические суммы Σ относительных удлинений, что используется для разделения отдельных компонентов сил или моментов (см. § 17.3) или для определения вызываемых ими напряжений. В сложных вариантах таких задач и при измерениях очень малых ε применяются измерительные мосты, в которых число тензорезисторов может быть значительно больше четырех. Сигналы, вырабатываемые измерительным мостом, могут быть прямо или с промежуточным усилением поданы на прибор-регистратор, назначением которого является регистрация результатов измерений, или на вход в ЭВМ для непосредственной обработки и анализа в процессе проведения эксперимента, т. е. без существенного запаздывания по времени.

В качестве регистраторов могут быть использованы различные приборы с визуальным отсчетом, с выдачей результатов в виде печатных таблиц или перфокарт, светолучевые осциллографы, обеспечивающие запись на светочувствительной бумаге, магнитографы с регистрацией на магнитной ленте. Некоторые приборы способны измерять только медленно меняющиеся процессы, но при этом позволяют опрашивать последовательно большое количество (сотни)

измерительных мостов. Они применяются при статических испытаниях. При регистрации динамических процессов — при испытаниях усталостных, копровых, по определению запасов до автоколебаний, частотных, по измерению нагруженности и вибраций в полете применяются светолучевые осциллографы или магнитографы. Преимуществом последних является регистрация результатов на магнитной ленте, что позволяет вводить информацию для обработки в ЭЦВМ без дополнительных преобразований.

Важными вспомогательными устройствами являются усилители, токосъемники и коммутаторы. Усилители служат для усиления сигналов измерительных мостов, часто имеющих недостаточную величину для дальнейшего использования. Токосъемники служат для обеспечения электрической связи датчиков, наклеенных на деталях вращающихся винтов, с измерительной аппаратурой в фюзеляже вертолета. Главное требование к ним, надежность контакта — стабильность переходных сопротивлений. Коммутаторы служат для поочередного подключения к одному измерительному каналу различных измерительных мостов. Они особенно полезны при статических испытаниях, когда обычно возникает необходимость измерений во многих точках конструкции.

Устройства обслуживания предназначены для поддержания измерительной системы в рабочем состоянии (проверки, наладки, калибровки). Для современных сложных систем наличие таких устройств является обязательным.

Обработка вручную обычно очень трудоемка, и ее не удается осуществить в полной мере и в приемлемые сроки. Поэтому используются системы автоматической обработки. Система для обработки данных эксперимента состоит из центрального процессора, устройств преобразования информации (УПИ), устройств ввода данных, отображения и документации. В качестве центрального процессора применяют ЭЦВМ. Иногда используют специализированные, главным образом аналоговые устройства. Очевидным преимуществом ЭЦВМ является ее универсальность, что дает возможность менять алгоритмы обработки, производить ее в различных вариантах. Преимущество специализированных устройств — большее быстродействие. При использовании приборов-регистраторов устройства ввода обеспечивают ввод в систему обработки данных, зафиксированных на перфоносителе или магнитной ленте непосредственно приборами-регистраторами или специальными устройствами (УПИ), преобразующими зарегистрированную в иной форме информацию в форму, подходящую для ввода в ЭЦВМ. Устройства ввода необходимые и при непосредственном, без промежуточной регистрации, вводе сигналов в систему обработки. Устройства для того и другого варианта ввода отличаются принципом действия, схемой, возможностями. Устройства документации служат для представления результатов обработки в форме таблиц и графиков (алфавитно-цифровые печатающие устройства, графопостроители). Устройства отображения применяются, если обработка и анализ результатов ведутся в темпе эксперимента. Они

служат для вывода информации в удобной для обозрения форме на пульт управления экспериментом. Это позволяет ведущему эксперимент инженеру оперативно вмешиваться в ход эксперимента, управлять им. Вывод информации обычно осуществляется на дисплей.

Для системы обработки данных необходимо математическое обеспечение (МО) — комплекс программ. МО разделяется на системное и прикладное. Системное МО обеспечивает, с одной стороны, функции организации вычислительного процесса, регулярного и аварийного обслуживания устройств ввода и вывода, управления прохождением задач через систему и, с другой стороны — функции средств автоматизации программирования, отладки и сборки программ. Прикладное МО делится на общее и специальное. В первое входят библиотеки и пакеты прикладных программ, ориентированные на решение того или иного класса общих задач. Общее прикладное МО создается централизованно и выпускается вместе с ЭЦВМ. Специальное прикладное МО — это программы и программные комплексы, которые разрабатываются потребителем для решения конкретных задач обработки. В число таких программ входят обрабатывающие (например, для подсчета повреждаемости), вспомогательные (например, для отбраковки случайных выбросов в экспериментальных данных) и обобщающие. Последние необходимы потому, что объем данных, выдаваемых после эксперимента, обычно так велик, что его невозможно освоить (понять и проанализировать) без предварительного автоматического отбора важной информации, оценки ее надежности, составления обобщенных характеристик, выделения основных показателей, сопоставления результатов различных измерений и т. п. с помощью ЭЦВМ. Основным способом проверки системы обработки и математического обеспечения, необходимой вследствие их повышенной сложности, является обработка тестов — моделей с известными заранее характеристиками процессов, ожидаемых в эксперименте. Подробнее с вопросами, рассмотренными в данном разделе, можно ознакомиться по [1, 26 и 29].

§ 17.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ, СИЛ И МОМЕНТОВ

Тензорезистор позволяет измерить непосредственно относительное удлинение места его наклейки по направлению оси чувствительной решетки. Для получения метода перехода от измеренных удлинений к напряжениям рассмотрим элемент, выделенный на поверхности детали (рис. 17.4). Пренебрегая поверхностными силами на рассматриваемой площадке и учитывая закон парности касательных напряжений, можно записать

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0; \tag{17.3}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \tag{17.4}$$

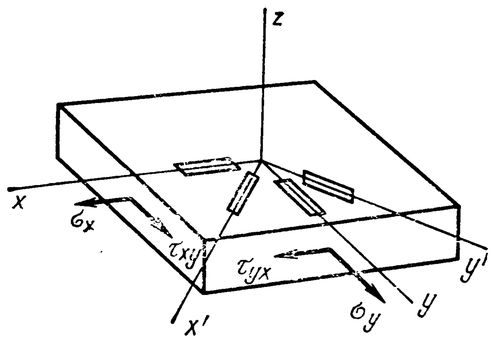


Рис. 17.4. Элемент поверхностного слоя детали с тензорезисторами и осями координат

Обобщенный закон Гука, отражающий линейный характер зависимости деформаций от напряжений [46]:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy};$$

$$\varepsilon_y = a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{zx} + a_{26}\tau_{xy};$$

. . . . . .

$$\gamma_{xy} = a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{zx} + a_{66}\tau_{xy}$$

с учетом (17.3) и (17.4) дает соотношения

$$\gamma_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy};$$

$$\varepsilon_y = a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}; \qquad (17.5)$$

$$\varepsilon_{xy} = a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy},$$

где a_{ik} — упругие константы, зависящие от свойств материала.

Для изотропного материала и для ортотропного (ортогонально анизотропного) материала, если оси Ox и Oy совпадают с осями ортотропии ($a_{16}=a_{26}=0$), первое и второе соотношения системы (17.5) можно решить относительно σ_x и σ_y. Применяя техническую систему обозначений для констант a_{ik}, решение можно записать так:

$$\sigma_x = E_x \frac{\varepsilon_x + \mu_{yx}\varepsilon_y}{1 - \frac{E_x}{E_y}\mu_{yx}^2}; \quad \sigma_y = E_y = \frac{\varepsilon_y + \mu_{xy}\varepsilon_x}{1 - \frac{E_x}{E_y}\mu_{xy}^2}. \qquad (17.6)$$

Для изотропного материала модули упругости $E_x = E_y = E$, константы $\mu_{xy} = \mu_{yx} = \mu$ — коэффициенты Пуассона. Если необходимо определить касательные напряжения τ_{xy}, а также в общем случае анизотропного материала (для которого $a_{16} \neq 0$ и $a_{26} \neq 0$), измерений ε_x и ε_y недостаточно. Повернем оси координат относительно оси Oz на угол φ. Новые положения осей Ox и Oy обозначим соответственно Ox' и Oy'. Как известно, компоненты деформаций в новых осях можно выразить через компоненты в осях Ox и Oy формулами [46]

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\varphi; \qquad (17.7)$$

$$\varepsilon_{y'} = \varepsilon_x \sin^2\varphi + \varepsilon_y \cos^2\varphi - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\varphi. \qquad (17.8)$$

Из соотношения (17.7) или (17.8) следует, что, измеряя ε_x, ε_y и $\varepsilon_{x'}$ или $\varepsilon_{y'}$, можно определить γ_{xy}. Далее из уравнений (17.5) определяются σ_x, σ_y и τ_{xy}. Можно избежать вычислений по формулам (17.7) или (17.8). Для этого следует использовать два тензорезистора, наклеенных по осям Ox' и Oy' и выбрать угол $\varphi = 45°$. Из соотношений (17.7) и (17.8) при этом следует $\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'} = \gamma_{xy}$. Разность $\varepsilon_{x'} - \varepsilon_{y'}$ можно найти схемным способом, включив датчики в соседние плечи (см. § 17.2). Для изотропного материала по измеренным значениям γ_{xy} касательное напряжение определяется по известной формуле

$$\tau_{xy} = \gamma_{xy} G. \qquad (17.9)$$

Учет анизотропии упругих свойств обязателен для получивших широкое применение в вертолетостроении стеклопластиков и ряда других композиционных материалов. Для металлов ею можно пренебречь. Упругие постоянные a_{ik}, входящие в формулы для определения напряжений (17.5), (17.6) и (17.9), следует находить путем лабораторных испытаний образцов, отражающих состояние материала в конструкции, в зависимости от которого эти постоянные могут изменяться, особенно существенно у стеклопластиков. Для стеклопластиков надо также учитывать возможность существенного изменения упругих постоянных в зависимости от температуры детали.

С помощью розеток, т. е. нескольких наклеенных под определенными углами друг к другу тензорезисторов [29], и на основании известных формул теории упругости [46], могут быть найдены главные напряжения и направление главных осей.

При больших нагрузках зависимости напряжений от деформаций нелинейны, закон Гука неприменим, поэтому необходимо пользовать другими соотношениями. На практике это встречается при статических испытаниях до разрушения. Особые методы применяются при тензоизмерениях в условиях высоких температур (более 370 К) вследствие влияния температуры на показания тензорезисторов и появления температурных напряжений. Может оказаться необходимым измерение температуры деталей. Для этой цели применяются терморезисторы, по своей конструкции аналогичные тензорезисторам, но с чувствительной решеткой из материала с большим температурным коэффициентом сопротивления. Сведения по таким измерениям даны в [29].

Методов непосредственных измерений компонентов упругих сил и моментов в общем случае нет. Применяется метод косвенных измерений, основанный на определении искомых компонентов по измеренным с помощью тензорезисторов величинам относительных деформаций в исследуемом сечении. Можно рассмотреть два варианта такого метода: суммирования и обобщенных зависимостей.

Метод суммирования основан на использовании формул, определяющих компоненты упругой силы и момента в сечении:

$$Q_x = \int \sigma_x dS; \quad M_x = \int (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dS;$$

$$Q_y = \int \sigma_y dS; \quad M_y = \int \sigma_z z dS; \qquad (17.10)$$

$$Q_z = \int \tau_{xy} dS; \; M_z = -\int \sigma_x y dS.$$

Здесь σ_x, τ_{xy} и τ_{xz} — напряжения на площадках рассматриваемого сечения, а интегрирование ведется по всей его площади.

Определить напряжения внутри конструктивных элементов с помощью тензорезисторов невозможно. Существующие методы определения напряжений по относительным деформациям позволяют определять напряжения только на поверхностях элементов конструкции. К тому же измерения напряжений сопряжены с определенными трудностями, значительно возрастающими с увеличением числа точек, в которых производятся измерения. Поэтому рассматриваемый метод должен базироваться на некоторых дополнительных сведениях и допущениях.

Для летательных аппаратов характерными являются тонкостенные конструкции. Для таких конструкций обычно можно считать, что относительные удлинения или напряжения постоянны по толщине обшивки и по площади поперечного сечения каждого продольного элемента — стрингера или пояса лонжерона. Для лонжерона лопасти, регулярных участков крыла или фюзеляжа в определенных пределах может быть использована гипотеза плоских сечений. Распределение нормальных напряжений при растяжении — сжатии и изгибе стержней различных ферм и рам, встречающихся в летательных аппаратах, обычно следует закону плоскости, если не возникает явлений потери устойчивости и если рассматриваемое сечение достаточно удалено от узлов крепления.

На основании сформулированных выше допущений интегралы по площади в правых частях уравнений (17.10) могут быть заменены для тонкостенных оболочек суммой интеграла по контуру, образованному обшивкой, и суммы сил (F_i) по стрингерам и лонжеронам, например:

$$Q_x = \int_S \sigma_x dS = \int_l \sigma_x \delta dl + \sum F_{xi}. \qquad (17.11)$$

Вычисление контурных интегралов и сумм при известном законе распределения напряжений может быть осуществлено по результатам измерений σ_i в ограниченном числе точек

$$\int_l \sigma \delta dl = \sum a_i \sigma_i. \qquad (17.12)$$

Коэффициенты суммирования a_i выбираются в соответствии с геометрическими характеристиками сечения, размещением датчиков для измерения напряжений и принятым законом распределения напряжений. Очевидно, что при подготовке испытаний целесообразна проверка приближенных формул (17.11) и (17.12) по материалам специальных экспериментов на натурном объекте.

Другой способ определения компонентов упругой силы и момента в сечении основан на следующем. Относительная деформация некоторого элемента рассматриваемого сечения является функцией

величины компонентов равнодействующих упругих сил и моментов в сечении:

$$\varepsilon = f(Q_x, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z). \qquad (17.13)$$

Если произведены измерения ε в шести точках исследуемого сечения, то из шести уравнений вида (17.3) можно определить искомые величины Q и M. Для практического применения этого метода необходимо прежде всего установить конкретный вид зависимости (17.13) в данной задаче. Для большинства конструкций при не слишком больших нагрузках зависимость (17.13) линейна. Однако отклонения зависимости (17.13) от линейной могут иметь место. Так, для тонкостенных конструкций причиной нелинейности зависимости (17.13) является потеря устойчивости отдельными участками продольного набора. Нелинейность зависимости (17.13) при умеренных нагрузках характерна для деталей из стеклопластика или других композиционных материалов. Вид зависимости (17.13) можно установить, применяя при обработке результатов специальных тарировочных нагружений регрессионный анализ.

Для линейной модели система уравнений (17.13) может быть записана в матричной форме:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{Q}\} = \{\varepsilon\}, \qquad (17.14)$$

где $[\mathbf{A}]$ — матрица коэффициентов влияния; $\{\mathbf{Q}\}$ — матрица-столбец компонентов упругой силы и момента; $\{\varepsilon\}$ — матрица-столбец измеренных удлинений.

Решение системы имеет вид

$$\{\mathbf{Q}\} = [\mathbf{A}]^{-1}\{\varepsilon\}, \qquad (17.15)$$

где $[\mathbf{A}]^{-1}$ — матрица, обратная матрице $[\mathbf{A}]$.

Решение (17.15) может содержать большие погрешности, если матрица $[\mathbf{A}]$ плохо обусловлена. Это надо учитывать при выборе мест наклейки тензорезисторов.

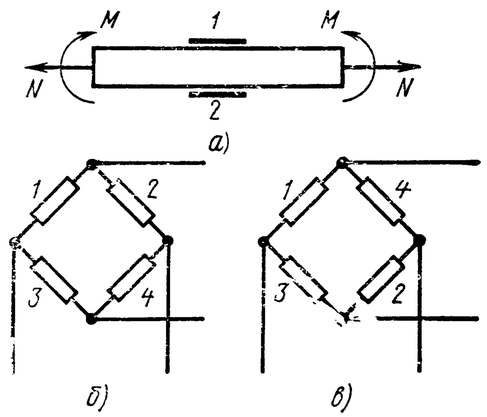
Во многих практически важных случаях места измерения можно выбрать таким образом, чтобы коэффициенты влияния, расположенные не на главной диагонали матрицы $[\mathbf{A}]$ были бы равными нулю или практически незначительными. Тогда система (17.14) распадается на независимые уравнения

$$a_{1x}Q_x = \varepsilon_1; \; a_{2y}Q_y = \varepsilon_2; \; a_{3z}Q_z = \varepsilon_3;$$

$$b_{4x}M_x = \varepsilon_4; \; b_{5y}M_y = \varepsilon_5; \; b_{6z}M_z = \varepsilon_6,$$

что существенно упрощает измерение и обработку и повышает надежность. Упрощение достигается также посредством применения для решения системы (17.14) схем электрического суммирования. Рассмотрим простой пример. Пусть к балке, изображенной на рис. 17.5, приложены изгибающий момент M и осевая сила N. Один тензорезистор с осью, параллельной оси балки, расположенный на ее верхней или нижней поверхности, даст сигнал, пропорциональный удлинению места наклейки, а следовательно, алгебраической

сумме относительных удлинений, вызванных моментом M и силой N. Если же на балку наклеить два тензорезистора, как показано на рис. 17.5, *а*, то при соединении их в мост по схеме, приведенной на рис. 17.5, *б*, сигнал моста будет пропорцио-



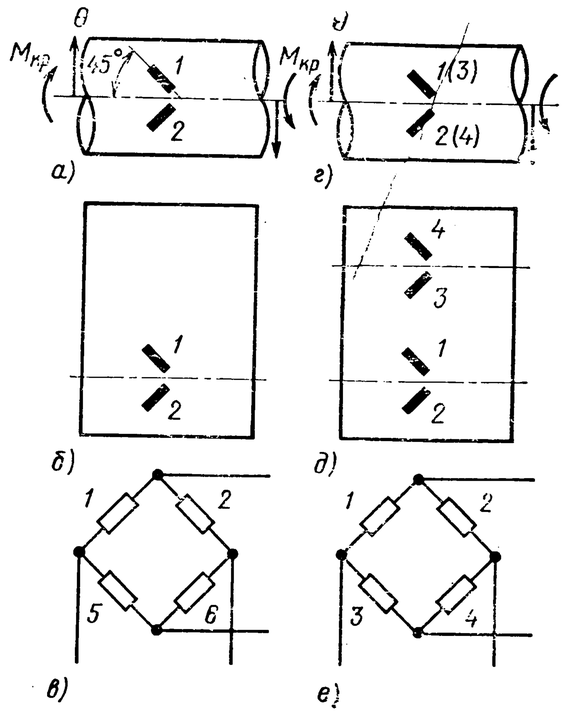


Рис. 17.5. Схема измерения изгибающего момента и осевой силы:

а — схема размещения тензорезисторов; *б* и *в* — схемы включения в мост; *1, 2* — активные тензорезисторы; *3, 4* — пассивные (термокомпенсационные) тензорезисторы

Рис. 17.6. Схемы измерения крутящего момента и касательных напряжений:

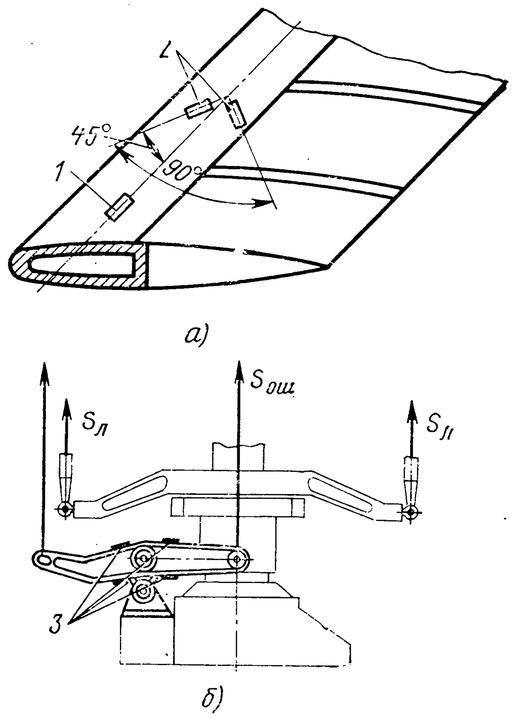
а, б, в — измерение суммарных касательных напряжений; *г, д, е* — измерение касательных напряжений от крутящего момента; *а* и *г* — схемы размещения тензорезисторов; *б* и *д* — развертки; *в* и *е* — схемы включения тензорезисторов; *1, 2, 3, 4* — активные тензорезисторы; *5, 6* — пассивные (термокомпенсационные) тензорезисторы

нален удлинению только от изгибающего момента. При соединении их по схеме, изображенной на рис. 17.5, *в*, сигнал моста зависит только от удлинений, вызываемых силой N. Таким образом обеспечивается возможность измерить раздельно напряжения, вызываемые моментом M или силой N или раздельно величину момента M или силы N.

Тензорезисторы, наклеенные на вал, как показано на рис. 17.6, *а* и *б*, и собранные в схему, приведенную рис. 17.6, *в*, дают сигнал, зависящий только от величины касательных напряжений в сечении. При применении четырех датчиков (рис. 17.6, *г, д, е*) сигнал моста определяется только касательными напряжениями от крутящего момента, т. е. только величиной этого момента, независимо от действующих в сечении других сил — растягивающих или перерезывающих, и изгибающих моментов. Практические примеры показаны на рис. 17.7. В более сложных случаях могут быть использованы: схемы, предусматривающие включение в мост многих тензорезисторов с различными коэффициентами чувствительности, электрические устройства суммирования сигналов нескольких мостов и, наконец, методы, основанные на определении интересующего компонента путем расчетов по величинам зарегистрированных при испытаниях сигналов многих мостов.

Рис. 17.7. Примеры измерения изгибающего и крутящего моментов лопасти (*а*) и силы $S_{ош}$ (*б*):

1, 2, 3 — тензорезисторы



Метод определения суммарных внешних нагрузок основан на использовании уравнений равновесия частей агрегата мысленно отсекаемых выбранными в соответствии с конкретной задачей плоскостями. Условия равновесия отсеченной части исследуемого агрегата имеют вид

$$\sum \vec{F}_в + \int \vec{q} dS = \vec{Q}_{уп}; \qquad (17.16)$$

$$\sum \vec{M}_в + \sum \vec{r} \times \vec{F}_в + \int \vec{m} dS + \int \vec{r} \times \times \vec{q} dS = \vec{M}_{уп}. \qquad (17.17)$$

Здесь $\vec{Q}_{уп}$ и $\vec{M}_{уп}$ — равнодействующая и момент упругих сил в сечении; $\vec{F}_в$ и $\vec{q}$ — внешние силы и погонные нагрузки, приложенные к отсеченной части агрегата; $\vec{M}_в$ и $\vec{m}$ — внешние сосредоточенные и погонные моменты, приложенные к отсеченной части агрегата; $\vec{r} \times \vec{F}_в$ и $\int \vec{r} \times \vec{q} dS$ — моменты сил $\vec{F}_в$ и $\vec{q}$.

Проекции равнодействующей $\vec{Q}_{уп}$ и моменты $\vec{M}_{уп}$ упругих сил в сечении — правые части уравнений (17.16) и (17.17) — могут быть измерены (см. выше). Требуется определить раздельно все или некоторые из сил или моментов, составляющих левые части (17.16) и (17.17).

Рассмотрим более простой случай, когда погонные нагрузки и моменты $\vec{q}$ и $\vec{m}$ отсутствуют или пренебрежимо малы. Для нескольких выбранных сечений исследуемого агрегата уравнения вида (17.16) можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{k} F_{xn} = Q_{xj}; \quad \sum_{n=1}^{k} F_{уп} = Q_{yj}; \quad \sum_{n=1}^{k} F_{zn} = Q_{zj}, \quad j = 1, 2, \ldots \qquad (17.18)$$

Если число сечений равно числу действующих сил, а внутренние силы Q_j измерены, то из системы (17.18) можно найти F_n. Если точки приложения F_n известны, то можно вычислить моменты $\vec{M} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$ в уравнениях вида (17.17). Если величины $M_{уп}$ измерены, то из системы, образованной уравнениями вида (17.17), определяются моменты $M_в$. В ряде случаев нельзя считать малыми погонные нагрузки $\vec{q}$ и $\vec{m}$. Могут быть не известны точки приложе-

ния сил $\vec{F}_n$. Наконец, матрица коэффициентов уравнений (17.16) или (17.17) в зависимости от выбора сечений, в которых измеряются силы и моменты $\vec{Q}_{уп}$ и $\vec{M}_{уп}$, может быть плохо обусловленной. Эти затруднения преодолеваются в зависимости от конкретного содержания задачи. Так, интегралы вида $\int \vec{q}dS$ и $\int \vec{m}dS$ часто можно заменить фиктивными сосредоточенными силами $\vec{F}_ф = \int \vec{q}dS$ и моментами $\vec{M}_ф = \int \vec{m}dS$, представляющими собой суммарные нагрузки на отсек агрегата. Эти величины являются неизвестными. Точки приложения сил $\vec{F}_в$ также могут рассматриваться как дополнительные неизвестные. При этом число уравнений (17.16), (17.17) и сечений, в которых выполняются измерения, должно быть соответственно увеличено.

§ 17.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Как известно, для описания случайных величин в математической статистике используются определенные характеристики. Наиболее общей характеристикой является закон распределения, т. е. соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями [7, 12]. Интегральный закон распределения $F(x)$ определяет вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше заданного x. Применяется также дифференциальный закон распределения или плотность вероятности $f(x)$. Связь интегральной функции распределения $F(x)$ и плотности вероятности $f(x)$ определяется соотношением

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x).$$

Примером закона распределения является нормальный закон. Этому закону подчиняется распределение случайных величин во многих практически важных случаях. Существует так называемая центральная предельная теорема теории вероятности — теорема Ляпунова. Эта теорема устанавливает, что закон распределения суммы случайных величин при увеличении числа слагаемых при некоторых условиях, налагаемых на законы распределения этих слагаемых, неограниченно приближается к нормальному. Результат испытаний определяется во многих случаях суммарным воздействием многих случайных факторов, удовлетворяющих условиям центральной предельной теоремы. Это и служит основанием к тому, чтобы считать его распределенным нормально. Однако в ряде случаев нет оснований считать исследуемую величину нормальной. Могут иметь место и другие законы распределения. Так, при изучении явлений усталостной прочности (см. § 1.1) мы видели, что усталостные долговечности подчиняются логарифмически нормальному закону распределения. Амплитуды вибрационного процесса

при определенных условиях подчиняются закону распределения Релея. Сумма квадратов нормально распределенных случайных величин подчиняется закону χ^2 распределения и т. д. Таким образом, при работе с экспериментальными данными возникает задача оценки вида закона распределения. Эта задача решается или на основании общих теоретических соображений, или путем соответствующего анализа экспериментальных результатов — проверки гипотезы (см. § 17.5) относительно вида закона распределения. Соответствующие методы изложены в [7, 12].

Используются также числовые характеристики случайных величин, такие как математическое ожидание случайной величины $M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ ($f(x)$ — плотность вероятности), дисперсия $D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \{x - M[X]\}^2 f(x) dx$, среднеквадратичное отклонение $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$ и коэффициент вариации $\gamma[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]}$. Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины, дисперсия и среднеквадратичное отклонение — разброс значений X относительно среднего, а коэффициент вариации — относительную величину этого разброса. При обработке результатов измерения переменных нагрузок обычно определяют эквивалентное значение напряжений, сил или моментов (см. § 1.2). Теоретическая величина его

$$M_x^э = \sqrt[m]{\int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x) dx}.$$

Здесь значения случайной величины X — характерные значения нагрузки или напряжения, например, полуразмахи $\Delta\sigma$. Если величина $\gamma[X]$ невелика ($\gamma[X] < 0{,}2$), как это почти всегда бывает на практике, то между эквивалентным значением и указанными ранее характеристиками существует приближенное соотношение

$$M_x^э \approx M[X]\left\{1 + \frac{m-1}{2}\gamma^2[X]\right\},$$

справедливое, как это можно показать, для любого закона распределения.

Иногда в качестве характеристики случайной величины принимают ее наибольшее (x_{max}) или наименьшее (x_{min}) значение в выборке (так называемые крайние члены выборки). Так, выносливость агрегата характеризуют наименьшей долговечностью N_{min}, полученной при испытаниях нескольких образцов (см. § 1.1). Связь этих характеристик с рассмотренными ранее зависит от типа закона распределения случайной величины и характера статистической зависимости результатов последовательных опытов. Она

определяется экспериментально, а для некоторых случаев теоретически — (см. [7, 12]). Важно учитывать, что математические ожидания крайних членов выборки случайной величины зависят от объема выборки, т. е. числа проведенных экспериментов или измерений. С увеличением объема выборки математическое ожидание $M[x_{max}]$ увеличивается, а $M[x_{min}]$ — уменьшается, а закон распределения x и такие его характеристики, как $M[X]$, $\sigma[X]$, M_x^n, не меняются. Поэтому если для какого-либо вывода используются определенные в эксперименте наибольшее или наименьшее значения случайной величины, то обязательно следует учитывать объем выборки.

При обработке экспериментальных результатов определяются оценки рассматриваемых характеристик, вообще говоря, отличающиеся от их точных значений. Это отличие вызвано тем, что оценки сами являются, при ограниченном объеме выборки n, случайными величинами. Так оценка математического ожидания часто определяется по формуле

$$M^*[X]=\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}. \qquad (17.19)$$

Она является суммой случайных величин и поэтому сама является величиной случайной. Только в пределе (при $n\to\infty$) такая оценка стремится, в вероятностном смысле, к математическому ожиданию $M[X]$. Поэтому оценки интересующих экспериментатора характеристик определяются с погрешностями. Оценки могут быть получены различным образом. Например, для математического ожидания $M[X]$ кроме оценки (17.19) может быть использована оценка типа

$$M^*[X]=\frac{x_{max}+x_{min}}{2}$$

или типа $M^*[X]=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k}{\sum_{k=1}^{n}\beta_k}$,

где x_{max} и x_{min} — максимальное и минимальное значения x в выборке — крайние члены выборки, β_k — заданные каким-либо определенным образом весовые коэффициенты.

В каждом конкретном случае обработки на основе теоретических (см. [7, 12]) и экспериментальных данных выбираются наиболее подходящие разновидности оценок. При этом анализируются их свойства, определяющие их точность. К числу таких свойств относятся состоятельность, несмещенность, эффективность (см. [7, 12]). Анализ этих свойств дает возможность избежать применения несостоятельных оценок, точность которых не увеличивается с увеличением объема выборки, или смещенных, которые содержат систематическую ошибку. Для сокращения объема обработки большое значение имеет эффективность оценки.

Точность правильно выбранной оценки зависит от численности выборки. С увеличением объема выборки она повышается, но одновременно повышается и трудоемкость получения данных. Поэтому при проведении эксперимента необходимо установить точность определения оценок в зависимости от объема выборки и оценить его целесообразную величину. Решение задачи различается в зависимости от того, являются ли исследуемые случайные величины статически зависимыми или нет. Подробно она рассматривается в курсах теории вероятностей и математической статистики, например [7, 12].

§ 17.5. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

При анализе материалов эксперимента полезно применять методы установления доверительных интервалов и методы проверки гипотез. Доверительным интервалом называется интервал значений статистической характеристики, который с заданной вероятностью p накрывает истинное значение этой характеристики. Вероятность p называется доверительной вероятностью. Например, пусть по результатам эксперимента найдена оценка $M^*[X]$. Можно (см. [7, 12]) найти значения $x_1=M^*[X]-\delta_1$ и $x_2=M^*[X]+\delta_2$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, такие, что с заданной вероятностью p можно утверждать, что величина $M[X]$ лежит в пределах от x_1 до x_2. Вероятность ошибки равна $1-p$. Знание доверительных интервалов для оценок статических характеристик дает возможность сделать вводы по результатам эксперимента более надежными и оценить их вероятность.

Проверкой гипотезы называется оценка вероятности некоторого предположения, сделанного на основании опытных данных, содержащих случайные отклонения. Пусть, например, при измерениях напряжений в лопастях двух конструктивных вариантов необходимо установить, действительно ли полученная разница средних значений полуразмахов переменных напряжений отражает влияние конструктивных изменений или она является следствием случайного разброса данных. Если полученная в эксперименте разница невелика, то можно ошибиться. Ошибка приведет к нежелательным последствиям. Может быть забракован конструктивный вариант, дающий в действительности некоторое, пусть даже небольшое, снижение уровня нагрузок. Вспомним, что на ресурс по условиям выносливости величина нагрузок влияет очень эффективно (см. гл. 1). Поэтому ошибочно окажется не принятым эффективное по ресурсу конструктивное мероприятие. Противоположная ошибка приведет к ненужным затратам по внедрению в серию лопасти с измененной конструкцией, в действительности преимущество по ресурсу не имеющей. В данном примере целесообразно воспользоваться методом проверки гипотезы равенства средних значений (см. [7, 12]). В результате эта гипотеза или будет принята

(что означает, что новый конструктивный вариант преимуществ не имеет), или будет отвергнута с известной вероятностью ошибки.

Методы математической статистики позволяют оценить число повторных испытаний, необходимое для принятия заключения с заданной надежностью, принять решение об его увеличении (для повышения надежности выводов) или уменьшении (для сокращения затрат на проведение эксперимента), если заданная надежность обеспечивается при сокращенном числе экспериментов. Существует математическая теория планирования эксперимента.

В результате эксперимента получают обычно совокупность значений исследуемой величины $y=f(x_1, x_2, ...)$ в зависимости от одного или нескольких аргументов $x_1, x_2, ...$ Дальнейшей задачей может быть описание аналитической зависимости $y^*=f(x_1, x_2, ...)$. При этом встречаются два варианта задачи: когда вид функции $f(x_1, x_2, ...)$ известен и надо определить параметры $a_1, a_2, ...$, входящие в функциональную зависимость, и другой вариант — когда вид функциональной зависимости не известен и необходимо найти эмпирическую формулу. Применяются различные методы, наибольшее распространение получил метод наименьших квадратов (МНК) [7, 12]. Приняв в первом варианте известную зависимость $y^*=f(x_1, x_2, ..., a_1, a_2...)$, а во втором — задаваясь функциями определенного класса, содержащими неопределенные вначале параметры $a_1, a_2...$ (см. ниже), записывают функционал вида

$$J=\iint\limits_{x_1, x_2, ...} (y-y^*)^2 dx_1 dx_2 ... = \Psi(a_1, a_2, ...).$$

Условия минимума $J: \frac{\partial J}{\partial a_i}=0$ $(i=1, 2, ...)$ дают систему алгебраических уравнений для определения $a_1, a_2, ...$.

Если вид функции y^* не задан, то обычно используются полиномы — степенные или тригонометрические, в случае одного аргумента имеющие вид:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{i^*} a_i \varphi_i(x),$$

где a_i — подлежащие определению параметры. При использовании степенных полиномов $\varphi_i=x^i$, тригонометрических $\varphi_i=\sin i\pi \frac{x}{l}$ и $\varphi_i=\cos i\pi \frac{x}{l}$. Метод наименьших квадратов позволяет найти оценки коэффициентов полиномов как определенные линейные комбинации исходных экспериментальных данных. Оценки МНК имеют наибольшую точность по сравнению с любыми другими оценками, представляющими собой линейные комбинации экспериментальных данных.

При применении степенных полиномов, часто, особенно если для этого есть какие-либо физические основания, ограничиваются линейной зависимостью, принимая полином вида $y=a_0+a_1x$. Существуют методы, позволяющие проверить гипотезу линейности

или достаточность числа функций i^* и получить оценки точности определения коэффициентов a_i.

Тригонометрические полиномы применяются в случаях, когда есть основания полагать, что искомая зависимость $y=f(x)$ является периодической (см. § 17.6). Получающиеся при этом формулы для определения a_i совпадают с выражениями (17.21), если переменную интегрирования t заменить по формуле $t=\frac{\pi}{\omega}\frac{x}{l}$. Также могут быть найдены оценки точности определения a_i.

Изложенное не охватывает всех возможностей, которые дает экспериментатору математическая статистика для повышения научного уровня эксперимента и анализа полученных данных. Некоторые из них будут указаны в § 17.7. Более подробно с отмеченными и с другими полезными методами можно познакомиться по книгам [7, 12] и др.

§ 17.6. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССА. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Во многих областях техники при изучении процессов изменения по времени исследуемой величины применяется преобразование, позволяющее процесс, представленный во временной области, представить в частотной области (спектральное представление процесса). Спектральный способ описания явлений получил широкое распространение при изучении различных колебательных процессов, как эффективное средство, позволяющее во многих случаях понять и изучить процесс и определяющие и влияющие на него факторы.

Методы спектрального представления базируются на известном преобразовании Фурье. В зависимости от характера исследуемого процесса используются различные способы спектрального анализа. Рассмотрим вначале один из простейших способов: гармонический анализ или разложение в тригонометрический ряд периодического процесса. Лопасти несущих и рулевых винтов вертолета на установившемся режиме работы в несколько идеализированном случае, предполагающем отсутствие любых случайных возмущений, являются объектами действия периодических сил. На таком идеализированном режиме переменные нагрузки, напряжения и вибрации вертолета являются периодическими функциями времени. Периодическими (если пренебречь несущественными, в большинстве случаев случайными, отклонениями) являются также законы изменения по времени многих величин, регистрируемых при усталостных испытаниях, испытаниях в аэродинамических трубах, определении динамических характеристик и т. п. Поэтому возникает стремление подвергнуть зарегистрированные процессы гармоническому анализу. Результаты гармонического анализа позволяют в ряде случаев определить причину появления повышенных напряжений или вибраций, или оценить динамические характеристики (частоты и формы собственных колебаний) исследуемого агрега-

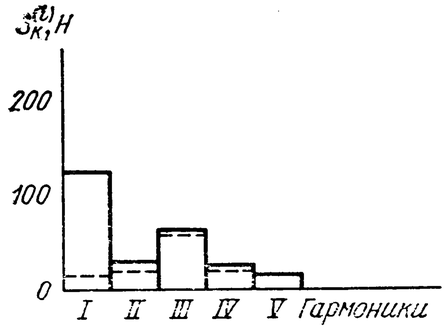


Рис. 17.8. Результаты гармонического анализа силы в системе управления:

——— вертолет № 1 — — — вертолет № 2

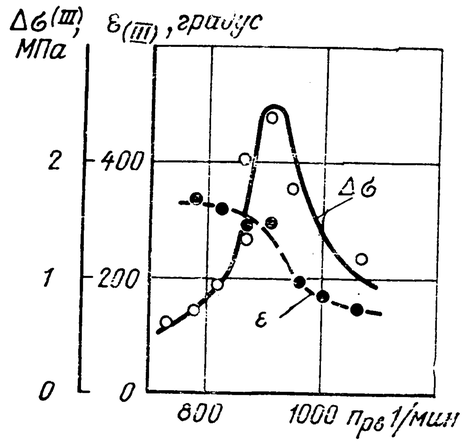


Рис. 17.9. Амплитуда и фаза третьей гармоники напряжения изгиба лопасти рулевого винта в плоскости вращения

та. Во многих случаях удобно производить сравнение расчетных и экспериментальных результатов, если они представлены в форме разложения по гармоникам.

В качестве примера, в котором с помощью гармонического анализа можно получить полезные результаты, на рис. 17.8 показаны коэффициенты ряда Фурье для кривых усилий в системах управления трехлопастными несущими винтами двух вертолетов. Основное отличие между ними состоит в том, что для вертолета № 2 большую амплитуду имеет только третья гармоника переменных усилий, а на вертолете № 1 — кроме третьей также и первая гармоника. Поэтому уровень переменных нагрузок, а следовательно, и повреждаемость системы управления для вертолета № 1 выше, чем для вертолета № 2. Как известно (см. гл. 2), при идентичных лопастях и их идеальной регулировке в системе управления могут возникнуть переменные нагрузки только с частотами, кратными числу лопастей винта. Это приблизительно и имеет место для винта № 2. Наличие большой амплитуды первой гармоники вызвано, таким образом, значительной неидентичностью лопастей. Так устанавливается причина повышенного уровня переменных напряжений в системе управления винтом № 1.

На рис. 17.9 по результатам гармонического анализа построена зависимость от частоты вращения амплитуды и начальной фазы третьей гармоники напряжений от изгибающего момента, действующего в плоскости вращения лопасти рулевого винта. Как видно при $n_{р.в} \approx 900$ об/мин происходит существенное увеличение амплитуды рассматриваемой гармоники. Это увеличение наряду с резонансом могло бы быть вызвано и увеличением амплитуды возмущающей силы, которая в таком эксперименте не определяется, ввиду отсутствия соответствующих методов измерения. Однако изменение начальной фазы на 180° при переходе через значение

частоты вращения $n_{р.в} \approx 900$ об/мин подтверждает наличие резонанса.

Необходимо подчеркнуть, что применение этого полезного метода представления экспериментальных данных на практике должно производиться с осторожностью. Иначе полученные в результате формально проведенного гармонического анализа данные могут ввести исследователя в заблуждение. Рассмотрим этот вопрос более подробно. В теории рядов Фурье показано, что в этот ряд на любом конечном интервале $[t_1, t_2]$ может быть разложена любая абсолютно интегрируемая кусочно-гладкая функция $f(t)$. Причем, сумма ряда $\varphi(t)$ равна $f(t)$ в точках непрерывности и равна $[f(t+0)+f(t-0)]/2$ в точках разрыва. Важно иметь в виду, что ряд $\varphi(t)$ сходится к функции $f(t)$ только на интервале $[t_1 t_2]$. Сумма ряда $\varphi(t)$ представляет собой периодическую функцию с периодом $T=t_2-t_1$, т. е.

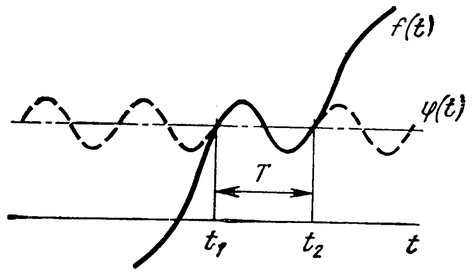


Рис. 17.10. Гармонический анализ. Анализируемая функция $f(t)$ и сумма ряда $\varphi(t)$

$$\varphi(t_2+\tau)=\varphi(t_1+\tau). \qquad (17.20)$$

Таким образом, при $t<t_1$ и $t>t_2$ кривая $\varphi(t)$ повторяется так, что ее отрезки длиной T при наложении друг на друга совпадают. Если функция $f(t)$ не периодическая или имеет период, отличный от T, то для нее равенства (17.20) не существует. Значения $f(t_2+\tau)$ никак не связаны с значениями $f(t_1+\tau)$ и могут быть любыми. Поэтому при $t<t_1$ и также $t>t_2$ функции $\varphi(t)$ и $f(t)$ в общем случае не совпадают (рис. 17.10). Из изложенного следует, что разложение в ряд Фурье, осуществленное на произвольном интервале T' экспериментальной кривой, имеет только формальное значение и не отвечает указанным выше задачам.

Рассматривая реальные записи даже на установившихся в среднем режимах эксперимента, можно убедиться, что обычно принимаемый за период промежуток, равный времени одного оборота исследуемого винта, в действительности периодом не является, так как равенство (17.20) не выполняется. Если формально выполнить гармонический анализ частей процесса, соответствующих нескольким различным оборотам винта, то можно убедиться, что величины амплитуд гармоник не совпадают. Это объясняется прежде всего воздействием случайных возмущений, приводящих к появлению случайных наложений в изучаемом процессе, различных по величине в разные моменты времени. Другая причина, которая иногда имеет место, — это наличие гармоники с частотой, не кратной частоте вращения винта. Если произвести гармонический анализ такой кривой, приняв за период время одного оборота винта, то коэффициенты гармоник с частотами, кратными частоте оборотов, будут найдены с погрешностью, определяемой величиной гармоники с некратной частотой. Наконец, возможны отклонения

от периодичности, вызванные другими причинами (например, изменениями режима, вызванными летчиком — при летных испытаниях). Погрешности, вызываемые перечисленными факторами, могут иметь различную величину, оценив которую и следует решить вопрос о целесообразности применения гармонического анализа или других более сложных методов. При этом надо учитывать, что эти методы, как правило, значительно более трудоемки. Оценка влияния наложений первого типа, вызванных случайными причинами, будет рассмотрена в § 17.7.

Вначале остановимся на методах гармонического анализа, полагая кривую $f(t)$ периодической. Коэффициенты ряда Фурье

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin\omega t)$$

определены формулами

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt;$$
$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt. \qquad (17.21)$$

Если функция $f(t)$ задана графически, то для определения коэффициентов ряда Фурье используются различные способы, которые могут быть разделены на две группы: способы, основанные на вычислении интегралов (17.21) по непрерывной кривой $f(t)$, и способы, основанные на численном интегрировании в формулах (17.21). Если же значения $f(t)$ заданы через дискретные промежутки времени, то применим только способ численного интегрирования. Вычисление интегралов (17.21) по непрерывной кривой может быть произведено с помощью специальных приборов — гармонических анализаторов.

При численном интегрировании возникает погрешность, величина которой зависит от принятого метода численного интегрирования и вида подынтегральной кривой. Обычно при вычислениях интегралов (17.21) применяется метод трапеций:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt\approx\frac{2}{\Delta tN}\sum_{k=0}^{N-1}f(t_k)\cos n\omega t_k\Delta t=a_n^*; \qquad (17.22)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt\approx\frac{2}{\Delta tN}\sum_{k=0}^{N-1}f(t_k)\sin n\omega t_k\Delta t=b_n^*,$$

где N — число участков, на которые разбит период.

Вычисленные по формулам (17.22) приближенные значения коэффициентов Фурье a_n^* и b_n^* равны

$$a_n^*=a_n+a_{N-n}+a_{N+n}+a_{2N-n}+a_{2N+n}+\ldots=a_n+\sum_{i=1}^{\infty}(a_{iN-n}+a_{iN+n});$$

$$b_n^*=b_n-b_{N-n}+b_{N+n}-b_{2N-n}+b_{2N+n}+\ldots=b_n+\sum_{i=1}^{\infty}(b_{iN+n}-b_{iN-n}).$$

Следовательно, погрешность определения коэффициентов ряда Фурье выражается формулами

$$\delta a_n=\sum_{i=1}^{\infty}(a_{iN-n}+a_{iN+n});$$
$$\delta b_n=\sum_{i=1}^{\infty}(b_{iN+n}-b_{iN-n}). \qquad (17.23)$$

Формулы (17.23) дают возможность правильно выбрать число интервалов разбиения периода.

Заметим еще, что на практике применяются различные приближенные методы гармонического анализа (метод огибающих, метод сдвига и т. д.). Они позволяют получить некоторое качественное представление о гармоническом составе. Однако их возможности весьма ограничены.

§ 17.7. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Как уже упоминалось выше, в практике нередко приходится встречаться с кривыми $f(t)$, которые, если для упрощения задачи не рассматривать случайные наложения, состоят из периодической функции $\varphi_п(t)$ с периодом, равным времени одного оборота $T_в$ исследуемого винта, и гармоник (одной или нескольких), частоты которых не кратны частоте вращения винта. Гармонический анализ такой кривой на принимаемом обычно за период в интервале $T_в$, равном времени одного оборота винта, может привести к существенным погрешностям. Поэтому надо применить какие-либо другие методы определения амплитуд. В [39] обстоятельно рассматриваются различные методы выявления периодических составляющих и оценки их параметров, их возможности, преимущества и недостатки. Применение того или иного из них зависит от конкретной задачи.

На практике могут быть случаи, когда частоты всех гармоник известны с достаточной точностью заранее, или, наоборот, эти частоты должны быть определены по материалам эксперимента. Иногда задачей обработки является определение всех составляющих полигармонического процесса, а в других случаях — только одна чем-либо характерной гармоники. Наконец, в различных случаях различны и требования к точности определения амплитуд. В зависимости от этих факторов и возможностей наличной вычислительной техники и следует выбирать метод анализа.

Рассмотрим вначале случай, когда частоты гармоник известны (обычно из физических соображений). В отдельных случаях эта задача решается без усложнения математического аппарата. Надо только для гармонического анализа вместо $T_в$ выбрать действительный период T функции $f(t)$. Практически это не всегда возможно. Период T может оказаться настолько большим, что соответствующую кривую нельзя получить или практически невозможно обработать. В этом случае амплитуды гармоник исследуемой функции целесообразно определять с помощью метода наименьших квадратов (см. § 17.5 и [39]). Если считать функцию $f(t)$ заданной абсолютно точно, т. е. не рассматривать пока погрешности измерения и расшифровки и случайные наложения, то точность определения амплитуд этим методом не зависит от величины обрабатываемого участка процесса. Поэтому анализ может быть произведен для участка процесса достаточно малой продолжительности, который не трудно получить в эксперименте и относительно легко обработать. В этом и заключается основное преимущество такого метода. Целесообразно выбирать величину обрабатываемого участка процесса так, чтобы на ней укладывалось целое число интервалов, равных времени одного оборота винта. Это упрощает вычисления.

Если частоты гармоник, образующих полигармонический процесс, неизвестны, то для их определения следует использовать метод интегрального преобразования Фурье с модификацией А. Н. Крылова или с так называемыми спектральными окнами [39]. Учитывая конкретные особенности исследуемых процессов на вертолетах, можно сократить объем вычислений. Нет необходимости выполнять интегральные преобразования Фурье в широком диапазоне частот с небольшим шагом по частоте. Более целесообразно вначале применить интегральное преобразование с указанной модификацией к отысканию амплитуд гармоник с частотами, кратными частоте вращения, т. е. гармоник, частоты которых известны. Затем, вычтя из исследуемого процесса найденные таким образом гармоники, целесообразно выполнить корреляционное преобразование.

По виду преобразованной функции надо решить вопрос о наличии каких-либо других гармоник. Как известно, при наличии случайной составляющей решение этого вопроса чрезвычайно затруднительно и достаточно полных математических методов для этого нет. Поэтому надо ориентироваться на физическую сторону явления. Следует определить, соответствует ли отмеченная в преобразованной функции периодическая составляющая какой-либо из возможных для рассматриваемого объекта частот или нет. В последнем случае ее появление является случайным и вызвано случайными составляющими в процессе (подробнее см. в [39]). Неизвестные ранее частоты можно уточнить с помощью фазовых диаграмм. Этот прием также подробно описан в [39]. Метод интегрального преобразования позволяет найти значения амплитуд, которые, однако, при этом являются приближенными. Так как значения частот в результате выполнения описанных приемов установлены, то можно получить и более точные значения амплитуд, используя метод наименьших квадратов. Объем вычислений при использовании интегрального преобразования Фурье может оказаться очень большим. Для его сокращения целесообразно применение алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Можно использовать и более простые методы, когда надо оценить одну, чем-либо характерную гармонику — низшую, имеющую наибольшую амплитуду (ведущую), с известной частотой и т. д. Для этого целесообразно воспользоваться одним из методов селекции. Так, для оценки низшей гармоники можно использовать метод усреднения процесса. Для оценки гармоники, имеющей наибольшую амплитуду, наиболее подходящим является корреляционный метод, а для выделения гармоники с известной частотой — один из вариантов метода, основанного на демодуляции. Описание этих методов дано в [39]. Там же приводятся частотные характеристики этих методов, позволяющие оценить возможность каждого из них в зависимости от объема имеющихся данных и предполагаемого состава полигармонического процесса.

Как уже упоминалось выше, в действительности в исследуемых процессах всегда имеется случайная составляющая, что приводит к погрешностям при определении амплитуд отдельных гармоник. Значения амплитуд, полученные при применении того или иного метода § 17.6 и 17.7, следует рассматривать как случайные величины. Для того чтобы уменьшить влияния случайных наложений, необходимо определять средние значения амплитуд $M^*(a_п)$ и $M^*(b_n)$ по результатам обработки нескольких (k) реализации процесса:

$$M^*(a_n)=\frac{\sum_{i=1}^{k} a_{ni}}{k}\ ;\ M^*(b_n)=\frac{\sum_{i=1}^{k} b_{ni}}{k}. \qquad (17.24)$$

Имея такие данные, можно обычным способом оценить точность определения и если a_{ni} и b_{ni} распределены нормально, то указать доверительные интервалы для $M(a_n)$ и $M(b_n)$. Оценки для средних значений (17.24), как это нетрудно видеть, являются состоятельными и несмещенными. Однако аналогичная оценка для амплитуды $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$:

$$M^*(A_n)=\frac{\sum_{i=1}^{k} A_{ni}}{k}$$

является смещенной. Несмещенную оценку амплитуды $\bar{A}_n$ можно определить по формуле

$$\bar{A}_n=\sqrt{M^{*2}(a_n)+M^{*2}(b_n)}.$$

Перейдем теперь к анализу случайных процессов. Как известно, случайной функцией называется функция, значение которой при

каждом данном значении аргумента является случайной величиной. В результате каждого опыта получается реализация случайной функции. Аргументом обычно является время, случайная функция при этом называется случайным процессом, а в эксперименте получают его реализации. В результате интегрального преобразования Фурье реализации случайного процесса получается случайная функция частоты ω, которая поэтому (и по ряду других причин) не является подходящей для дальнейшего анализа. В качестве спектральной характеристики стационарного случайного процесса используется спектральная плотность

$$S_x(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau, \qquad (17.25)$$

где $K_x(\tau)$ — корреляционная функция. Как показано в теории случайных процессов [7, 37], случайный процесс можно представить как предел суммы малых слагаемых, представляющих собой каждое гармонику с амплитудой $V(\omega)\Delta\omega$ и частотой ω:

$$X(t)=\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{\omega} V(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\Delta\omega=\int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,dt,$$

где $V(\omega)$ при заданном значении ω — случайные числа. Величина $S(\omega)d\omega$ представляет собой дисперсию случайной величины $V(\omega)d\omega$, т. е. амплитуды элементарной гармоники в разложении стационарного случайного процесса на гармонические колебания. Рассмотрим реализации процесса колебаний с одной частотой ω и различными амплитудами A_i:

$$y_i=A_i\sin\omega t. \qquad (17.26$$

По определению $D(A_i)=M(A_i^2)$. (17.27)

Энергия колебаний в системе с одной степенью свободы, массой M и жесткостью c: $E=\frac{M_y^2}{2}+\frac{cy^2}{2}=\frac{cA^2}{2}$.

Таким образом, величина A^2 с точностью до множителя $c/2$ характеризует энергию данной реализации процесса колебаний (17.26), а дисперсия $D(A_i)$ на основании (17.27) — среднее по реализации значение этой энергии. В итоге получим, что $S(\omega)d\omega$ характеризует энергию элементарного гармонического колебания с частотой ω, а $S=f(\omega)$ — распределение энергии по частотам непрерывного спектра. Таков физический смысл спектральной плотности для рассмотренного частного вида случайного процесса. Аналогично может быть выявлен смысл $S(\omega)$ для других по физической природе процессов.

Практическое определение спектральной плотности производится по реализации конечной продолжительности (в отличие от соотношения (17.25), в котором интегрирование должно быть выполнено в пределах от 0 до ∞). Поэтому теоретическое соотношение (17.25) неприменимо. Употребляют оценки, основанные на введении так называемых «спектральных окон»:

$$S^*(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} h(\tau)K^*(\tau)\,\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

(использована оценка корреляционной функции $K^*(\tau)$) или

$$S^*(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} w(\omega-\omega_1)F(\omega_1)\,d\omega_1,$$

где $F(\omega_1)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{T}\left|\int_0^T x(t)\,\mathrm{e}^{i\omega_1 t}\,dt\right|^2$

(непосредственное определение $S(\omega)$ из реализации $x(t)$). Функции $h(\tau)$ или $w(\omega-\omega_1)$ — спектральные окна, рекомендации по их выбору см. [37]. Оба метода практически эквивалентны. Существуют и методы с более простой схемой расчета, удобные для реализации в аналоговых вычислительных устройствах, но применимые только при больших продолжительностях реализаций, если нет необходимости выяснять тонкую структуру $S(\omega)$.

Как и в других разделах, где рассматриваются методы математической статистики, здесь затронута лишь незначительная часть понятий и положений теории случайных процессов, многие из которых (взаимные спектральные плотности стационарно связанных процессов, теория выбросов, фильтрация случайных сигналов из шумов и многое другое) дают эффективные средства анализа результатов эксперимента.

Список литературы

1. **Акимов А. И., Берестов Л. М., Михеев Р. А.** Летные испытания вертолетов. М.: Машиностроение, 1980. 399 с.
2. **Ананьев И. В., Тимофеев П. Г.** Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование. М.: Машиностроение, 1965. 528 с.
3. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. М.: ГИТТЛ, 1958. 628 с.
4. **Баскин В. Э. и др.** Теория несущего винта. М.: Машиностроение, 1973. 364 с.
5. **Болотин В. В.** Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 325 с.
6. **Браверман А. С. и др.** Балансировка одновинтового вертолета. М.: Машиностроение, 1975. 176 с.
7. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.
8. **Володко А. М.** Безопасность полетов вертолетов М.: Транспорт, 1981. 224 с.
9. **Гродко Л. Н.** О малых колебаниях механических систем, обладающих круговой симметрией. — Механика твердого тела, 1967, № 1, с. 62—64.
10. **Гродко Л. Н.** О колебаниях упругого несущего винта на кардановом подвесе. — Механика твердого тела, 1967, № 2, с. 62—65.
11. **Дондошанский В. К.** Расчет колебаний упругих систем на электронных вычислительных машинах. М.—Л.: Машиностроение, 1965. 368 с.
12. **Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В.** Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ГИТТЛ, 1955. 556 с.
13. **Ильичев В. Д.** Математическое планирование, анализ и обобщение данных при параметрических исследованиях. — Труды ЦАГИ, 1966, вып. 995. 15 с.
14. **Ильичев В. Д., Назаров В. В.** Результаты прецизионных частотных испытаний как исходные данные при различных исследованиях прочности летательных аппаратов. — Труды ЦАГИ, 1974, вып. 1562. 44 с.
15. **Ильичев В. Д.** Линейная идентификация в аэроупругости. — Ученые записки ЦАГИ, 1972, т. III, № 4, с. 77—87.
16. **Кан С. Н., Свердлов И. А.** Расчет самолета на прочность. М.: Машиностроение, 1966. 520 с.
17. **Когаев В. П.** Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. М.: Машиностроение, 1977. 232 с.
18. **Кирпичев М. В.** Теория подобия. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 96 с.
19. **Лисс А. Ю.** Уравнения деформации лопасти воздушного винта и свойства ортогональности форм ее собственных колебаний. — Изв. вузов. Авиационная техника, 1972, № 4, с. 56—66.
20. **Лисс А. Ю., Маргулис Г. У.** Использование метода интегрирующих матриц для расчета собственных колебаний лопасти воздушного винта с учетом изгиба в двух плоскостях и кручения. — Изв. вузов. Авиационная техника, 1973, № 1, с. 30—37.
21. **Лисс А. Ю.** Расчет деформаций лопасти воздушного винта в полете. — Изв. вузов. Авиационная техника, 1973, № 2, с. 40—45.
22. **Миль М. Л. и др.** Вертолеты (расчет и проектирование). Книга I. Аэродинамика. М.: Машиностроение, 1966. 456 с.
23. **Миль М. Л. и др.** Вертолеты (расчет и проектирование). Книга II. Колебания и динамическая прочность. М.: Машиностроение, 1967. 424 с.
24. **Михеев Р. А.** Расчет вертолета на прочность. Ч. I. Изд. МАИ, 1974. 143 с.
25. **Михеев Р. А.** Расчет вертолета на прочность. Ч. II, Изд. МАИ, 1973. 205 с.

26. **Михеев Р. А.** Расчет вертолета на прочность. Ч. III. Изд. МАИ, 1974. 150 с.
27. **Нормы** летной годности гражданских вертолетов СССР, М., 1971. 184 с.
28. **Образцов И. Ф.** Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных пространственных конструкций. М.: Машиностроение, 1966. 392 с.
29. **Павлов А. В.** Аппаратура и методы измерений при летных испытаниях самолетов. М.: Машиностроение, 1967. 216 с.
30. **Пановко Я. Г.** Основы прикладной теории упругих колебаний. М.: Машиностроение, 1967. 314 с.
31. **Проскуряков А. П.** Теория несущего винта при нулевом угле атаки. — Прикладная математика и механика, 1956, т. XX, вып. 4, с. 519—531.
32. **Развитие** авиационной науки и техники в СССР. М.: Наука, 1980. 496 с.
33. **Райхер В. Л., Богданов Б. Ф., Ушаков И. Е.** К методике построения диаграмм выносливости.— Заводская лаборатория, 1978, № 4, с. 465—466.
34. **Риз П. М., Пожалостин А. И.** Вибрации и динамическая прочность воздушных винтов. — Труды ЦАГИ, 1974, вып. 609, 1974, 80 с.
35. **Романевский А. Ю., Климов В. И.** Строительная механика самолета. Изд. МАИ, 1965. 302 с.
36. **Светлицкий В. А.** Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978. 222 с.
37. **Свешников А. А.** Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 464 с.
38. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. I. М.: Наука, 1973. 536 с.
39. **Серебренников М. Г., Первозванский А. А.** Выявление скрытых периодичностей. М.: Наука, 1965. 244 с.
40. **Смыслов В. И.** Исследование колебаний линейной системы при многоточечном возбуждении и автоматизации измерений. — Труды ЦАГИ, 1970, вып. 1217, 75 с.
41. **Степнов М. Н., Гиацинтов Е. В.** Усталость легких конструкционных сплавов. М.: Машиностроение, 1973. 320 с.
42. **Стрелков С. П.** Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 440 с.
43. **Стригунов В. М.** Расчет самолета на прочность. Ч. I. Изд. МАИ, 1973. 125 с.
44. **Стригунов В. М.** Расчет самолета на прочность, Ч. II. Изд. МАИ, 1974. 225 с.
45. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле. М.: ГИФМЛ, 1959. 440 с.
46. **Тимошенко С. П., Гудьер Дж.** Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
47. **Тищенко М. Н., Некрасов А. И., Радин А. С.** Вертолеты. Выбор параметров при проектировании. М.: Машиностроение, 1976. 368 с.
48. **Туркина А. И.** Анализ влияния атмосферной турбулентности на уровень переменных напряжений изгиба в лопастях несущего винта вертолета. — Изв. вузов. Авиационная техника, 1980, № 2, с. 83—86.
49. **Фигуровский В. И.** Расчет на прочность беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 356 с.
50. **Харкевич А. А.** Автоколебания. М.: ГИТТЛ, 1954. 170 с.
51. **Шнуров З. Е.** Метод конечного элемента с итерациями для расчета форм и частот свободных колебаний естественно закрученных лопастей воздушных винтов. — Труды ЦАГИ, 1972, вып. 1430, 27 с.

Оглавление

Предисловие 3

Введение 4

§ В.1. Задачи работ по прочности 4
§ В.2. Общие принципы и методы обеспечения прочности . . 8
§ В.3. Расчетные случаи норм прочности 12

1. Выносливость конструкции вертолета. Ресурс 16

§ 1.1. Основные закономерности, определяющие долговечность конструкции 16
§ 1.2. Основные конструктивные и технологические факторы, влияющие на долговечность 23
§ 1.3. Ресурс по условиям усталостной прочности 26

2. Суммирование сил и моментов, действующих на втулку от лопастей винта 30

§ 2.1. Соотношения между силами, действующими на различные лопасти винта 30
§ 2.2. Суммирование сил, совпадающих по направлению. Первое правило суммирования 34
§ 2.3. Суммирование векторов сил и моментов, повернутых относительно друг друга. Второе правило суммирования 37
§ 2.4. Силы и моменты относительно невращающихся осей . 39

3. Собственные изгибные колебания лопастей несущего винта (методы расчета) 41

§ 3.1. Уравнение изгибных колебаний невращающейся лопасти 41
§ 3.2. Невращающаяся лопасть с постоянными по радиусу жесткостью и погонной массой 43
§ 3.3. Некоторые выводы о собственных частотах и формах . 47
§ 3.4. Метод последовательных приближений, основанный на интегральном соотношении (3.18) 48
§ 3.5. Расчет напряжений при падении лопасти на ограничитель свеса 51
§ 3.6. Уравнение колебаний вращающейся лопасти в плоскости взмаха. Метод Галеркина 52
§ 3.7. Свойство ортогональности собственных форм 56
§ 3.8. Формула для учета влияния центробежной силы . . . 57
§ 3.9. Изгибные колебания в плоскости вращения 59
§ 3.10. Метод конечных элементов 61
§ 3.11. Возможности рассмотренных методов расчета частот и форм собственных изгибных колебаний лопастей . . 65

4. Резонансные диаграммы. Сложные виды собственных колебаний 67

§ 4.1. Резонансные диаграммы 67
§ 4.2. Сложные виды колебаний лопастей 72
§ 4.3. Пределы применения рассмотренных методов для задач, не связанных с лопастью. Общие свойства свободных колебаний 79

5. Расчет вынужденных колебаний лопастей 82

§ 5.1. Исходные соотношения для определения аэродинамической нагрузки 82
§ 5.2. Методы расчета аэродинамической нагрузки 87
§ 5.3. Расчет изгибных колебаний лопасти методом Галеркина 89
§ 5.4. О других методах расчета изгибных колебаний лопасти 92
§ 5.5. О расчете более сложных видов колебаний 95

6. Нагружение лопастей в полете 98

§ 6.1. Изгибающие моменты лопасти и напряжения, вызываемые ими в лонжероне 98
§ 6.2. Комлевая часть лопасти. Напряжения в обшивке . . 104
§ 6.3. Особенности нагружения лопастей винта без индивидуальных горизонтальных шарниров 107

7. Флаттер несущего винта 110

§ 7.1. Автоколебания отсека лопасти 110
§ 7.2. Уравнения махового флаттера абсолютно жесткой лопасти, прикрепленной к втулке с помощью горизонтального шарнира 113
§ 7.3. Решение уравнений флаттера лопасти 118
§ 7.4. Обеспечение безопасности по флаттеру 121
§ 7.5. Флаттер несущего винта 124
§ 7.6. Влияние трения в осевом шарнире 126
§ 7.7. Другие практические важные сведения о флаттере . . 129

8. Рулевые винты 132

§ 8.1. Нагрузки на лопасти рулевого винта 132
§ 8.2. Изгибные колебания лопастей и способы их уменьшения 135
§ 8.3. Особенности нагружения винта с втулкой на карданов подвесе 137

9. Системы управления винтами 140

§ 9.1. Нагрузки, действующие на детали системы управления, и задачи расчета 140
§ 9.2. Шарнирный момент лопасти 142
§ 9.3. Расчет первого участка системы управления 146
§ 9.4. Расчет второго участка системы управления 147
§ 9.5. Прочность проушин при действии переменных нагрузок 149

10. Усталостная прочность втулок несущих и рулевых винтов и других агрегатов 151

§ 10.1. Определение нагрузок на втулку 151
§ 10.2. Силы и напряжения в деталях втулки 153
§ 10.3. Усталостная прочность других агрегатов 156

11. Вибрация фюзеляжа 158

§ 11.1. Переменные силы на втулке несущего винта 159
§ 11.2. Собственные и вынужденные изгибные колебания фюзеляжа как упругой балки 161
§ 11.3. Метод добавочной массы. Динамическая жесткость. Учет демпфирования 164
§ 11.4. Методы расчета колебаний более сложных моделей фюзеляжа 166

§ 11.5. Дополнительные меры по снижению уровня вибраций 168
§ 11.6. Вибрации других типов 170

12. Земной резонанс 173

§ 12.1. Колебания винта на упругозакрепленном основании . 173
§ 12.2. Параметры, определяющие возникновение земного резонанса 175
§ 12.3. Земной резонанс на вертолете 177
§ 12.4. Расчетные случаи и конструктивные меры по обеспечению безопасности от земного резонанса 179

13. Прочность при больших однократных нагрузках. Определение нагрузок 183

§ 13.1. Нагрузки при маневре 183
§ 13.2. Нагрузки при полете в неспокойном воздухе 186
§ 13.3. Нагрузки при посадке. Кинетическая энергия 187
§ 13.4. Нагрузки при посадке. Силы 190
§ 13.5. Расчетные нагрузки 193

14. Прочность фюзеляжа при больших однократных нагрузках . 194

§ 14.1. Нагрузки 194
§ 14.2. Нормальные напряжения на регулярных участках фюзеляжа 197
§ 14.3. Касательные напряжения. Расчет шпангоутов 201
§ 14.4. Приближенные методы для регулярных участков . . . 202
§ 14.5. Напряжения на участках с вырезами 204
§ 14.6. Диаграммы растяжения — сжатия. Критические напряжения в стрингерах 207
§ 14.7. Критические напряжения потери устойчивости обшивки 211

15. Прочность крыла, оперения, шасси и других агрегатов при больших однократных нагрузках 214

§ 15.1. Нагрузки на крыло 214
§ 15.2. Определение напряжений в элементах конструкции крыла 215
§ 15.3. Расчет оперения 217
§ 15.4. Расчет шасси 218
§ 15.5. Расчет подредукторной рамы, систем управления и других агрегатов 221

16. Экспериментальные методы обеспечения прочности 224

§ 16.1. Цели и задачи эксперимента. Методы его проведения 224
§ 16.2. Методы оценки прочности под действием заданных нагрузок 228
§ 16.3. Методы определения нагруженности 232
§ 16.4. Проверка запасов до автоколебаний 235
§ 16.5. Исследования вибраций фюзеляжа 238
§ 16.6. Определение динамических характеристик конструкции 241

17. Некоторые теоретические основы экспериментальных методов 247

§ 17.1. Теория подобия 247
§ 17.2. Тензометрия 251
§ 17.3. Определение напряжений, сил и моментов 255
§ 17.4. Характеристики случайных величин 262
§ 17.5. Некоторые методы математической статистики . . . 265
§ 17.6. Спектральное представление процесса. Гармонический анализ 267
§ 17.7. Спектральный анализ 271

Список литературы 276